

RELACIONES DE RECIPROCIDAD GENERALIZADAS PARA RENDIJAS

OSCAR MATA MÉNDEZ
Departamento de Física. Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM)
Instituto Politécnico Nacional

Resumen: En esta publicación demostramos ciertas relaciones de reciprocidad para rendijas en metales de conductividad infinita cuando son iluminadas por un haz bidimensional. Se consideran los dos casos fundamentales de polarización (T.E y T.M.)

GENERALIZED RECIPROCIDY RELATIONS BY SLITS

Abstract: In this paper, we demonstrate generalized reciprocity relations of the diffraction of a two-dimensional electromagnetic beam wave by a thick slit in a perfectly conducting screen. The two fundamental case of polarization are treated. Moreover, we show that reciprocity relations for rough surfaces are apply in our case.

1. INTRODUCCIÓN

En óptica se utiliza muy frecuentemente una teoría escalar de la luz. La polarización no es tomada en cuenta. Por ejemplo, el estudio de la difracción por una abertura, en una pantalla infinitamente delgada, se lleva a cabo con la ayuda de la fórmula de Kirchhoff.^{1,2} El campo en la abertura se identifica al campo incidente, mientras que en el lado no iluminado de la pantalla el campo y la derivada normal se suponen nulos. Es conocido que estas hipótesis, aun cuando son matemáticamente inaceptables, conducen a resultados que están de acuerdo con el experimento^{3,4} cuando la longitud de onda es muy pequeña en relación a las dimensiones de la abertura y el punto de observación está alejado de la pantalla.

Otra aproximación escalar (debida a Lord Rayleigh) se aplica cuando las dimensiones de la abertura son considerablemente inferiores a la longitud de onda.^{5,6}

Cuando la longitud de onda y las dimensiones del objeto difractante son del mismo orden —situación que se encuentra en la región de microondas en el estudio de fibras ópticas y en óptica integrada— no

pueden ignorarse los efectos de polarización. En este caso es conveniente recurrir a las ecuaciones de Maxwell. Con respecto al problema de la difracción por una rendija, se ha estudiado mucho mediante las ecuaciones de Maxwell y condiciones de frontera pertinentes cuando el espesor de la pantalla es infinitamente pequeño.^{1,7,,8,9} En cambio, por lo que sabemos, el problema más realista de la rendija en una pantalla con espesor ha sido poco estudiado.^{10,11,12,13,14,15} Es de notar que en todas las publicaciones mencionadas, salvo la referencia 15, el campo incidente es una onda plana.

En cuanto a las relaciones de reciprocidad, éstas se han estudiado con respecto a redes de difracción,^{16,17,18} superficies rugosas,^{19,20} cilindros²¹ y aberturas en pantallas.⁶ Su importancia reside en lo estético de la información contenida así como asegurar la precisión de teorías aproximadas.

En este artículo presentamos ciertas relaciones de reciprocidad de rendijas en una pantalla con espesor cuando son iluminadas por un haz. A nuestro entender, únicamente se han determinado relaciones de reciprocidad cuando la pantalla es infinitamente delgada.

da⁶ y cuando la onda incidente es plana. Las deducciones están basadas en el lema de Cadilhac.²²

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos una pantalla infinitamente conductora de espesor h , con una rendija de ancho l paralela al eje OZ e iluminada por un haz monocromático de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ e independiente de Z . El campo es sistemáticamente descrito por expresiones complejas, con la dependencia en el tiempo, $\exp(-i\omega t)$. La notación se resume en la figura 1. La unicidad de la solución y la invariancia del sistema bajo una traslación paralela a OZ implican que los campos eléctricos E magnético H son independientes de Z . Si el campo eléctrico E^i (o magnético H^i) es paralelo a la rendija nos encontramos en el caso T.E. (o T.M.). El formalismo estudiado se aplica a los dos casos de polarización.

Representamos por F , F^i y F^d las amplitudes complejas del campo total, incidente y difractado eléc-

trico y magnético según la polarización. El campo total F verifica la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad (1)$$

y las siguientes condiciones de frontera en S , superficie que limita a la pantalla del vacío:

$$F = 0 \quad , \quad \text{caso T.E.} \quad (2)$$

$$\frac{dF}{dn} = 0 \quad , \quad \text{caso T.M.} \quad (3)$$

donde $\frac{dF}{dn}$ denota la derivada normal de F en S . Si $y > h/2$ o $y < -h/2$, suponemos que es posible obtener la transformada de Fourier de F para y fija:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha', y) e^{i\alpha' x} d\alpha' \quad (4)$$

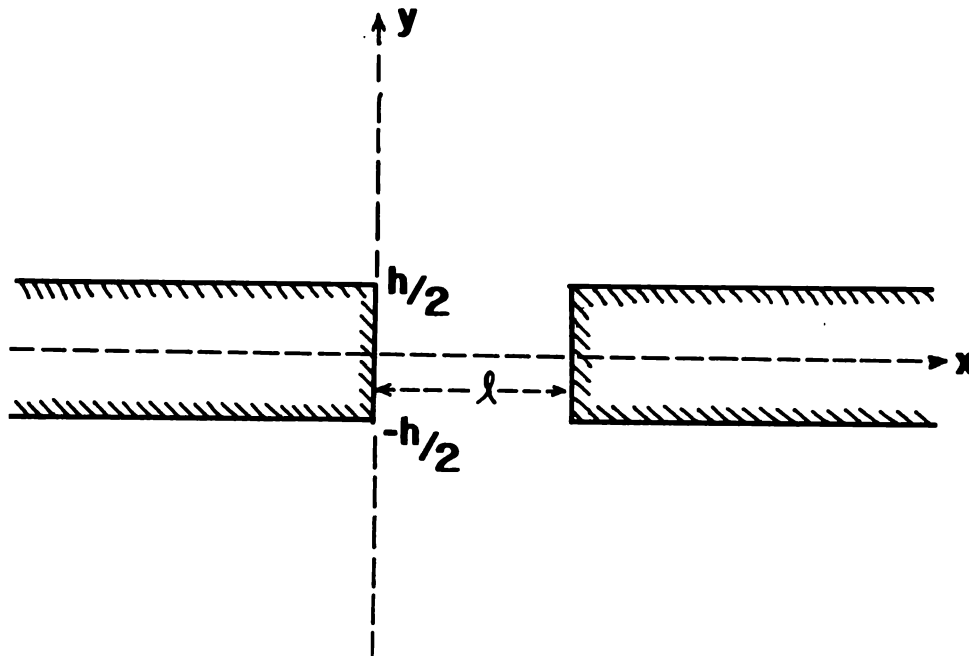


Fig. 1. Rendija (ancho, l ; espesor, h) es paralela al eje OZ .

3. EL LEMA DE CADILHAC

En 1980 Cadilhac²² mostró un lema muy importante que ha permitido obtener relaciones de reciprocidad para la red de difracción y la superficie rugosa, así como expresiones analíticas del campo difractado para estas estructuras.²⁰ A continuación enunciamos este lema con las modificaciones y notaciones convenientes a nuestro problema de la rendija.

Sea $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones definidas fuera de la pantalla metálica, las cuales verifican la ecuación de Helmholtz. Si realizamos la transformada de Fourier de u y v en x para y fijo, siendo $y > h/2$ y $y < -h/2$, obtenemos los siguientes desarrollos de ondas planas:

Si $y > h/2$:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U_h^-(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' + \int_{-\infty}^{\infty} U_h^+(\alpha') e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' \quad (5)$$

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} V_h^-(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' + \int_{-\infty}^{\infty} V_h^+(\alpha') e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' \quad (6)$$

Si $y < -h/2$:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U_b^-(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' + \int_{-\infty}^{\infty} U_b^+(\alpha') e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' \quad (7)$$

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} V_b^-(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' + \int_{-\infty}^{\infty} V_b^+(\alpha') e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' \quad (8)$$

$$\text{con } \beta' = (k^2 - \alpha'^2)^{1/2} \text{ ó } i(\alpha'^2 - k^2)^{1/2} \quad (9)$$

Si combinamos las dos ecuaciones de Helmholtz para u y v e integramos en la región Ω (Fig. 2) obtenemos:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx dy = 0$$

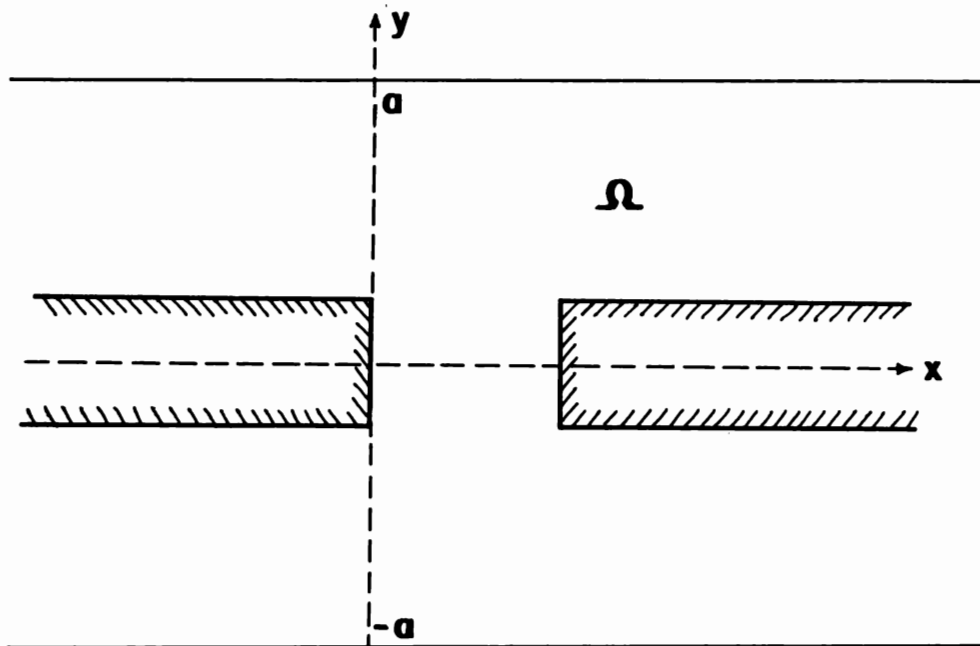


Fig. 2. Región de aplicación del lema.

El teorema de Green permite expresar esta última integral en tres integrales de línea: sobre la recta $y = -a$, sobre $y = a$ y por último una integral sobre S . Después de aplicar el teorema de Parseval-Plancherel, obtenemos:²⁰

$$\int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 4i\pi \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} & \beta' [U_h^+(\alpha') V_h^-(-\alpha') - U_h^-(\alpha') V_h^+(-\alpha')] d\alpha' \\ & - 4i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \beta' [U_b^+(\alpha') V_b^-(-\alpha') \\ & - U_b^-(\alpha') V_b^+(-\alpha')] d\alpha' \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ y $\frac{\partial v}{\partial n}$ son las derivadas normales de u y v en la dirección del vector normal apuntando hacia adentro de la pantalla, y S es la coordenada curvilínea de la superficie.

4. TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Supongamos que iluminamos la pantalla por arriba, el campo total puede representarse en ondas planas por:

Si $y > h/2$:

$$\begin{aligned} F(x, y) = & \int_{-k}^k A(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} r(\alpha') e^{i(\alpha'x + \beta'y)} d\alpha' \end{aligned} \quad (11)$$

Si $y < -h/2$:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} t(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' \quad (12)$$

El primer término de (11) es el campo incidente y el segundo el campo difractado hacia $y > h/2$. La expresión (12) representa el campo transmitido. Se ha aplicado la condición de onda saliente para garantizar la unicidad.²² Si identificamos (11) y (12) con (5) y (7) respectivamente, y denotamos por $U = [-k, k]$:

$$U_h^-(\alpha') = \begin{cases} A(\alpha') & , \alpha' \in U \\ 0 & , \alpha' \notin U \end{cases} \quad (13)$$

$$U_h^+(\alpha') = r(\alpha') \quad (14)$$

$$U_b^+(\alpha') = 0 \quad (15)$$

$$U_b^-(\alpha') = t(\alpha') \quad (16)$$

Sea $v(x, y)$ el complejo del campo total F^* , que resulta cuando iluminamos por arriba del metal con una onda incidente de amplitud $A^*(\alpha')$, si denotamos por primas las diferentes amplitudes que interviene:

$$V_h^-(\alpha') = \begin{cases} \bar{r}^*(-\alpha') & , \alpha' \in U \\ 0 & , \alpha' \notin U \end{cases}$$

$$V_h^+(\alpha') = \begin{cases} \bar{A}^*(-\alpha') & , \alpha' \in U \\ \bar{r}^*(-\alpha') & , \alpha' \notin U \end{cases}$$

$$V_b^-(\alpha') = \begin{cases} 0 & , \alpha' \in U \\ \bar{t}^*(-\alpha') & , \alpha' \notin U \end{cases}$$

$$V_b^+(\alpha') = \begin{cases} \bar{t}^*(-\alpha') & , \alpha' \in U \\ 0 & , \alpha' \notin U \end{cases}$$

Si aplicamos el lema de Cadilhac, tomando en cuenta que la integral de superficie es nula, tanto en el caso T.E. como T.M.:

$$\begin{aligned} & \langle r(\alpha'), \bar{r}^*(\alpha') \rangle + \langle t(\alpha'), \bar{t}^*(\alpha') \rangle \\ & = \langle A(\alpha'), \bar{A}^*(\alpha') \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

donde hemos definido:

$$\langle f(\alpha'), g(\alpha') \rangle = \int_{-k}^k \beta' f(\alpha') g(\alpha') d\alpha' \quad (18)$$

En el caso particular que los dos campos incidentes coincidan $A(\alpha') = A^*(\alpha')$, obtenemos el teorema de la conservación de la energía.¹⁵ Por eso a la expresión (17) le llamamos el teorema de la conservación generalizada.

Si iluminamos con una onda plana $e^{i(\alpha x - \beta y)}$, el campo total para $y > h/2$ lo definimos por:

$$\begin{aligned} F = & e^{i(\alpha x - \beta y)} + \varepsilon e^{i(\alpha x + \beta y)} + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha') e^{i(\alpha' x + \beta' y)} d\alpha' \end{aligned} \quad (19)$$

donde hemos retirado la reflexión especular del campo difractado, siendo $\varepsilon = -1$ en T.E. y $\varepsilon = 1$ en T.M. Para $y < -h/2$, F viene dado aún por (12):

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} T(\alpha') e^{i(\alpha'x - \beta'y)} d\alpha' \quad (20)$$

así que la relación entre las representaciones (11-12) y (19-20) es:

$$\begin{aligned} r(\alpha') &= \varepsilon \delta(\alpha' - \alpha) + R(\alpha') \\ A(\alpha') &= \delta(\alpha' - \alpha) \\ t(\alpha') &= T(\alpha') \end{aligned} \quad (21)$$

esta transformación nos permitirá obtener la correspondiente expresión para ondas planas. Luego de (17) con $A(\alpha') = A''(\alpha')$ obtenemos:

$$\begin{aligned} < T(\alpha'), \overline{T(\alpha')} > + < R(\alpha'), \overline{R(\alpha')} > \\ &+ 2\varepsilon\beta R_e[R(\alpha)] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

resultado válido para superficies rugosas²⁰ cuando $T = 0$.

5. RECIPROCIDAD REFLECTIVA

Sean u y v los campos totales F y F'' respectivamente, que están presentes cuando se ilumina por arriba. Las amplitudes de F están dadas por (13-16) y las F'' también, simplemente colocando primas, el lema nos conduce en ambos casos de polarización a:

$$\begin{aligned} < r(\alpha'), A''(-\alpha') > \\ &= < r''(-\alpha'), A(\alpha') > \end{aligned} \quad (23)$$

si los campos inciden son ondas planas:

$$A(\alpha') = \delta(\alpha' - \alpha)$$

y

$$A''(\alpha') = \delta(\alpha' - \alpha'')$$

obtenemos de (23):

$$\beta'' R(-\alpha'') = \beta R''(-\alpha') \quad (24)$$

resultado válido también para superficies rugosas.²⁰

6. RECIPROCIDAD TRANSMITIDA

Sea u el campo total cuando se ilumina por arriba y v el campo total cuando se ilumina por abajo, las amplitudes de v son:

$$\begin{aligned} V_h^-(\alpha') &= 0 \\ V_h^+(\alpha') &= t''(\alpha') \\ V_b^-(\alpha') &= r''(\alpha') \\ V_b^+(\alpha') &= \begin{cases} A''(\alpha'), & \alpha' \in U \\ 0, & \alpha' \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

el lema implica, en ambos casos de polarización:

$$< t''(-\alpha'), A(\alpha') > = < t(-\alpha'), A''(\alpha') > \quad (25)$$

en el caso de ondas planas diferentes, se obtiene

$$\beta T''(-\alpha') = \beta'' T(-\alpha'')$$

Resultado similar al obtenido en la referencia 6 cuando se ilumina una abertura en una pantalla infinitamente delgada en el caso escalar.

CONCLUSIÓN

De un teorema general ha sido posible demostrar relaciones de reciprocidad para la rendija cuando es iluminada por un haz. Se encontraron las expresiones correspondientes a ondas planas y se vio que concuerdan con ciertos resultados conocidos.

REFERENCIAS

1. Sommerfeld, A.: "Optics", *Lectures on Theoretical Physics*, Vol. IV. Academic Press Inc., New York (1954).
2. Born, M. and Wolf, E.: *Principles of Optics*. Pergamon Press, New York (1964).
3. Silver, S.: "Microwave aperture antennas and diffraction theory". *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 131 (1962).
4. Harris, F.; Tavenner, S. and Mitchell, R.: "Single slit Fresnel diffraction patterns: comparison of experimental and theoretical results". *J. Opt. Soc. Am.*, **59**, 3, 293-297 (1969).
5. Rayleigh (Lord): "On the passage of waves through apertures in plane screen and allied problems". *Phil. Mag.*, **43** (1897).
6. Levine, H. and Schwinger, J.: "On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen I". *Phys. Review*, **74**, 8 (1948).

7. **Morse, P. and Rubenstein, P.:** "The diffraction of waves by ribbons and slit". *Physical Review*, **54**, 895-898 (1938).
8. **Bouwkamp, J.:** "Diffraction theory". *Rep. Progr. Phys.*, **17**, 35-101 (1954).
9. **Millar, R.:** "Diffraction by a wide slit and complementary strip I". *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **54**, 4, 479-496 (1958).
10. **Wirgin, A.:** "Influence de L'épaisseur de L'écran sur la diffraction par une fente". *C. R. Acad. Sci. Paris*, **270**, 1457-1460 (1970).
11. **Neerhoff, F. and Mur, G.:** "Diffraction of a plane electromagnetic wave by a slit in a thick screen placed between two different media". *Appl. Sci. Res.*, **28**, 73-88 (1973).
12. **Roumigières, J. L.; Maystre, D.; Petit R. et Cadilhac, M.:** "Estude de la diffraction par une fente pratiquée dans un écran infiniment conducteur d'e'paisseur quelconque". *Optics Commun.*, **9**, 402-405 (1973).
13. **Henke, H. and Fruchting, H.:** "Irradiation in a slotted half space and diffraction by a slit in a thick screen". *Nachrichtentech*, **29**, 401-405 (1976).
14. **Hongo, K. and Ishii, G.:** "Diffraction of an electromagnetic plane wave by a thick slit". *IEEE Transactions on Antennas and Propag.*, AP-26, 494-499 (1978).
15. **Mata Méndez, O.; Cadilhac, M. and Petit, R.:** "Diffraction of a two-dimensional electromagnetic beam wave by a thick slit pierced in a perfectly conducting screen". *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 328-331 (1983).
16. **Gerald M. Whitman:** "Reciprocity Identity for periodic surface scattering". *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol. AP-27, No. 2, March, 1979.
17. **A. Roger:** "Generalized reciprocity for gratings of finite conductivity". *Optica Acta*, Vol. 30, No. 5 (1983).
18. _____, "Generalized reciprocity relation for perfectly conducting gratings". *Optica Acta*, Vol. 29, No. 10 (1982).
19. _____, "New relations for the 2-D, finite rough surface in T.E. polarization". *Opt. Commun.*, Vol. 49, No. 3 (1984).
20. **D. Maystre, O. Mata Méndez and A. Roger:** "A new electromagnetic theory for scattering from shallow rough surfaces". *Optica Acta*, Vol. 30, No. 12 (1983).
21. **A. Roger:** "Reciprocity theorem applied to the computation of functional derivatives of the scattering matrix". *Electromagnetics*, Vol. 2 (1982).
22. **Petit, R.:** "Electromagnetic theory of Gratings", Serie "Topics in Current Physics 22", Springer, Berlin (1980).