

## DESCRIPCIÓN TEÓRICA DE LOS ARREGLOS TRIANGULARES DE BURT-UNIDIMENSIONALES

FRANCISCO CASANOVA DEL ANGEL  
 Sección de Graduados, Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura (ESIA)  
 Instituto Politécnico Nacional

**Resumen:** Se presenta la descripción teórica de cuatro arreglos tabulares de datos así como sus algoritmos de construcción ejemplificados. Se aplica la teoría del análisis factorial a dichos arreglos para ver la relación teórica entre individuos y variables en estudio y la coherencia de los cálculos y resultados.

### THEORETICAL DESCRIPTION OF FOUR TABULAR ARRANGEMENTS OF BURT

**Abstract:** A theoretical description of four tabular arrangements of data is presented here together with its building algorithms exemplified. The theory of factor analysis is applied to these arrangements to demonstrate the theoretical relation between individuals and variables under study and the coherence of the calculations and the results.

#### 0. Introducción

En este artículo se presenta la descripción tórica de cuatro arreglos tabulares de datos, su forma esquemática y sus respectivos algoritmos de construcción. Se ejemplifican para una mayor asimilación del proceso de construcción ya que el éxito descriptivo e inferencial del estudio de un conjunto de datos y su relación depende del tratamiento inicial de los datos.

Mediante la aplicación de estos arreglos tabulares de datos a la teoría del análisis factorial se deducen las fórmulas baricéntricas y de transición así como sus particularidades y bondades que les imprimen los respectivos algoritmos de construcción.

#### 1. Arreglo transpuesto de descripción lógica o arreglo disjunto completo transpuesto

A partir de una tabla disjunta completa  $k(i, q)$

sobre  $I \times Q$  es posible construir una tabla o arreglo transpuesto de descripción lógica (Fig. 1) en la que las modalidades de respuesta se conviertan en individuos, de modo que:

$$\forall q \in Q, i \in I \text{ existe } q \in J \text{ con } p = 0, \dots, n-1$$

tal que

$$k'(i, j) = k(j, i) = 1 \text{ y } (j' \in q, j' \neq j) \\ \rightarrow k'(j', i) = 0$$

ó

$$k(j, i_s) = 1 \vee 0 \ \& \ \forall i_s \in I, i_s \leq i_p \\ \rightarrow k(j, i_p) = 1 \vee 0$$

(1)



$$k_{II}(i_s, i_p) = \text{Card} \{ k(j, i_s) = k(j, i_p) \}$$

$$= 1 \mid j, s \in J \forall p = 1, \dots, n\}$$

$k_{II}(i_s, i_p) = k_{BC}(i_s, i_p)$  es el número de elementos de  $Q$  que poseen simultáneamente las propiedades  $i_s, i_p$ .  $k^*(i)$  representa a las masas de las variables de una matriz  $k_{JJ}$ . El subíndice  $BC$  de  $k$  significa "Burt completa".

En este caso no existen bloques diagonales ( $Q_q \times Q_q \mid i = 1, \dots, p$ ). Existe únicamente la diagonal que contiene los valores de las masas  $k(j) = k^*(i)$  donde  $k^*(i)$  son las masas de las columnas o variables de la tabla transpuesta de descripción lógica o masas de los individuos de la tabla disjunta completa.

Tampoco existen los bloques extradiagonales ( $Q_i \times Q_{i'} \mid i \neq i'$ ) de más de un solo elemento. Los bloques unidimensionales  $Q_i$  contienen los valores de contingencia del bloque  $Q_i$  con el  $Q_{i+s}$  para toda  $s = 1, \dots, n$ .

Como ejemplo de una tabla o arreglo de Burt-unidimensional o de bloques unidimensionales o diagonal de masas de las variables, véase el arreglo tabular de la figura 4, construido haciendo uso del ejemplo del arreglo transpuesto de descripción lógica (Fig. 2) dado en la sección 1, así como a partir de la definición teórica.

Recuérdese que  $K_{II}(i_s, i_p)$  es el número de elemen-

tos de  $Q$  que poseen simultáneamente las propiedades  $i_s, i_p$  y que no existen bloques diagonales  $Q_q * Q_q$  de más de un solo elemento.

El valor  $i_2 = 3$  del bloque diagonal  $i_2 * i_2$  se obtiene de la siguiente manera:

$$\boxed{1} + 0 + \boxed{1} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \boxed{1} = \textcircled{3}$$

del arreglo transpuesto de descripción lógica (Fig. 4). Así como el valor  $i_3 = 2$  del bloque extradiagonal  $i_3 * i_7$ :

$$\textcircled{2} = 1 + 1$$

La tabla  $I \times I$  es simétrica en relación a su diagonal principal por lo que su descomposición se puede hacer en una matriz triangular superior y en una matriz triangular inferior de la siguiente manera:

$$k_{BC}(i_s, i_p) = k_{TI}(i_s, i_p) + k_{TS}(i_s, i_p)$$

$$- \{ k(i_s, i_p) \mid i_s = i_p \}$$

donde  $k_{TI}$  es la tabla o arreglo triangular inferior y  $k_{TS}$  es la tabla o arreglo triangular superior de la tabla de Burt completa de bloques unidimensionales  $k_{BC}$  y como la diagonal se repite, es necesario restársela para obtener la matriz de Burt de bloques unidimensionales

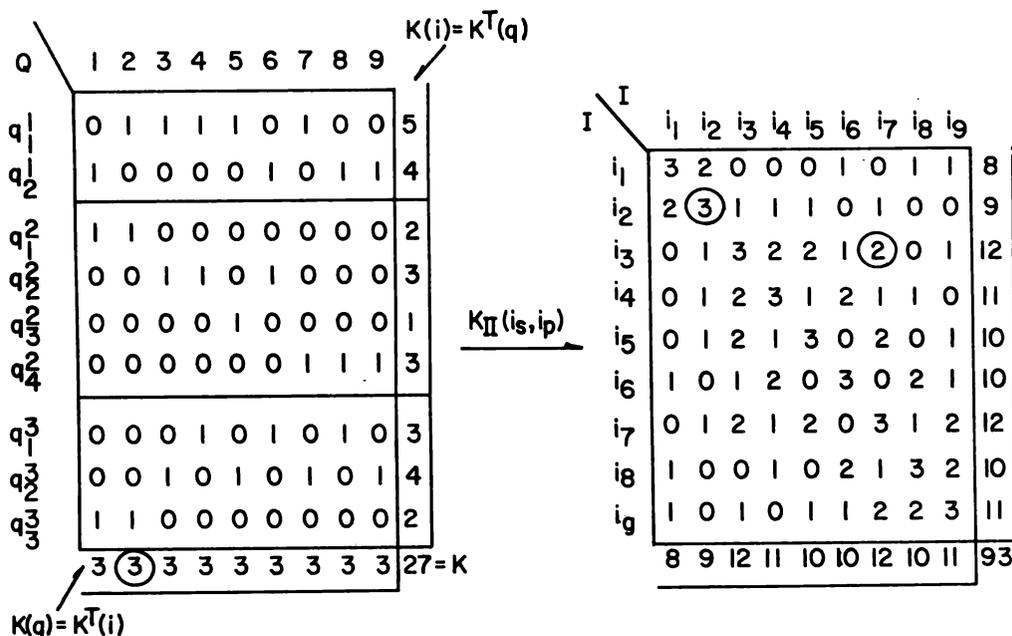


Figura 4.

nales. La transición  $f_i^j$  asociada a la tabla de correspondencias  $k_{BC} = k_{IJ}$  es el perfil  $\Pi_i^j$  de las dos transiciones que sufre la tabla original  $k_{IJ}$ , por tanto:

$$f_i^j = \Pi_i^j = f_i^j \quad \text{o} \quad f_j^i$$

es decir:

$$f_{i_s}^{i_s} = \sum \{ f_{i_p}^j f_j^{i_s} \mid j \in J \}$$

Una particularidad que tiene este arreglo de datos es que las nubes de puntos, además de tener el mismo número de dimensiones, son iguales; es decir,  $N(I) = N(J)$ .

La traza o inercia total asociada a la tabla  $I \times I$  definida como la suma de valores propios es:

$$I_{II}(N(I)) = \text{TRAZA}_{BC} = \sum \{ \lambda_{\alpha_{BC}} \mid \alpha_{BC} \in A \}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} \sum \{ \lambda_{\alpha_{BC}} \mid \alpha_{BC} \in A \} &= \sum \{ \lambda_{\alpha_{TI}} \mid \alpha_{TI} \in A \} \\ &+ \sum \{ \lambda_{\alpha_{TS}} \mid \alpha_{TS} \in A \} - 2 \sum \{ \lambda_{\alpha_{TI}} \mid \alpha_{TI} \in A \} \\ &\quad * \left( \frac{\text{CARD } I}{\text{CARD } I + 1} \right) \end{aligned}$$

donde  $\lambda_{\alpha_{BC}}$ ,  $\lambda_{\alpha_{TI}}$  y  $\lambda_{\alpha_{TS}}$  son los valores propios de la tabla de bloques unidimensionales, triangular inferior y triangular superior de Burt, respectivamente. Los valores propios obtenidos a través de este tipo de tabla o arreglo tabular no son muy fuertes; es decir, están muy cercanos al cero, pero no así su porcentaje de acumulación ya que la traza es débil.

Otras propiedades que estos arreglos tabulares muestran en forma evidente es que las leyes de frecuencia marginal son iguales,  $f_{I_{BC}} = f_{J_{BC}}$  ya que:

$$f_{I_{BC}} = \{ f_{i_{BC}} \mid i \in I \} = \{ f_{j_{BC}} \mid j \in J \} = f_{J_{BC}}$$

así como las leyes condicionales de  $j$  a la ocurrencia de  $i$  y la de  $i$  a la ocurrencia de  $j$ :

$$\begin{aligned} f_j^i &= \{ k_{BC}(i, j) / k_{BC}(i) \mid j \in J \} \\ &= \{ k_{BC}(i, j) / k_{BC}(j) \mid i \in I \} = f_i^j \end{aligned}$$

y a partir de aquí fácilmente se ve que los factores son los mismos para ambas nubes de puntos por el simple hecho de tener el mismo perfil:

$$F_\alpha = F_\alpha(f_{j=i}^i) \quad \text{y} \quad G_\alpha = G_\alpha(f_{j=i}^i)$$

Como  $F_\alpha(i)$  mide en valor absoluto la distancia que separa el centro de gravedad  $f_{j=i}^i$  de la proyección sobre el eje  $\alpha$  del perfil  $f_{j=i}^i$  representando a  $i$ , de la misma manera sucede para  $G_\alpha(j=i)$  que mide en valor absoluto la distancia que separa el centro de gravedad  $f_{j=i}^i$  de la proyección sobre el eje  $\alpha$  del perfil  $f_{j=i}^i$  representando a  $j=i$ .

No se cree inútil decir que la calidad de representación, peso, inercia y contribuciones respectivas, a partir del hecho de que  $F_\alpha(j) = G_\alpha(j)$  son iguales para ambas nubes de puntos.

### 3. Arreglo triangular inferior de Burt-unidimensional

A partir de la transpuesta de una tabla lógica  $k_{IJ}$  denominada  $k'_{IJ} = k_{JI}$  (Fig. 1) es posible construir una tabla triangular inferior de Burt de bloques unidimensionales (Fig. 5) de la siguiente manera:

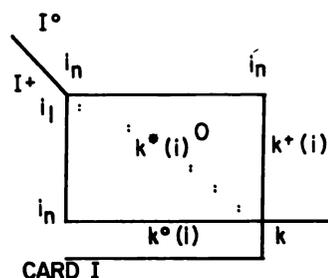


Figura 5.

$$\begin{aligned} k_{TI}(i_s, i_p) &= \text{Card} \{ k(j, i_s) = k(j, i_p) \} \\ &= 1 \mid j, s \in J \forall p = 1, \dots, k \end{aligned}$$

$k_{TI}(i_s, i_p)$  es el número de elementos de  $Q$  o  $J$  que poseen simultáneamente la propiedad  $i_k, i_p$  y con las mismas características que una matriz de bloques unidimensionales; es decir, no existen diagonales ni extradiagonales de más de un solo elemento. La diagonal son los valores de las masas  $k(j) = k^*(i)$ .

Los elementos arriba de la diagonal son todos cero pero al algoritmo se le puede invertir y obtener una matriz triangular superior de Burt-unidimensional.

Como ejemplo de una tabla o arreglo triangular inferior de Burt-unidimensional, véase el arreglo tabular de la figura 6 construido haciendo uso del ejemplo

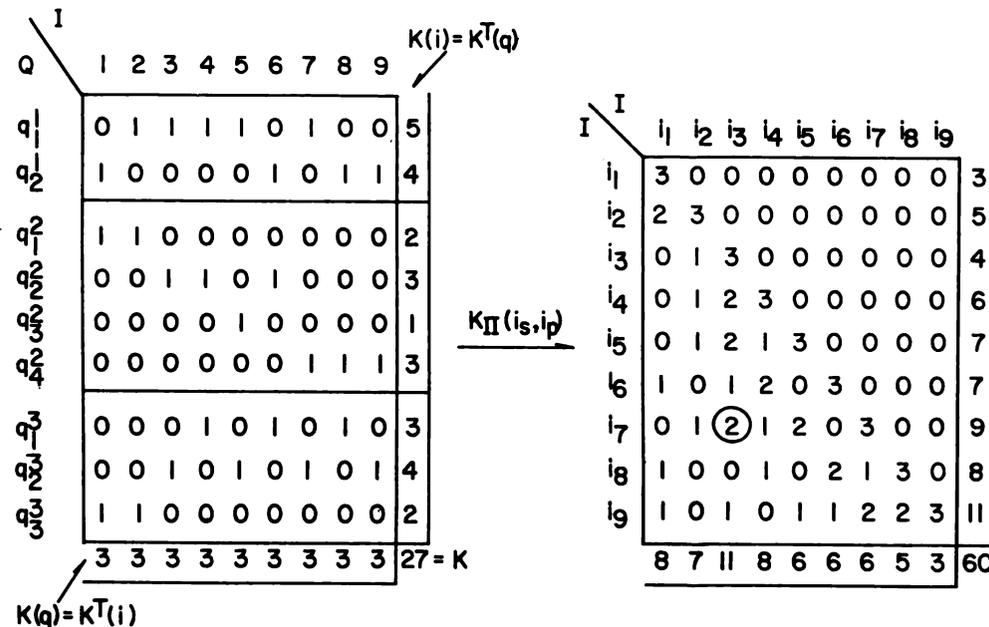


Figura 6.

del arreglo transpuesto de descripción lógica de la sección 1, figura 2, y a partir de la definición teórica.

Recuérdese que  $K_{Tl}$  es el número de elementos de  $Q$  o  $J$  que poseen simultáneamente las propiedades  $i_s, i_p$  para  $p = 1, \dots, k$ . Los elementos arriba de la diagonal son todos cero, y la diagonal son los elementos de la línea de margen de la tabla de Burt-unidimensional donde, por ejemplo, el valor  $(i_7, i_3) = 2$  del bloque extradiagonal  $i_7 * i_3$  es:

$$\textcircled{2} = 1 + 1$$

**4. Arreglo triangular superior de Burt-unidimensional**

A partir de la transpuesta de una tabla lógica  $k_{jl}$  es posible construir una tabla triangular superior de Burt de bloques unidimensionales (Fig. 7) de la siguiente manera:

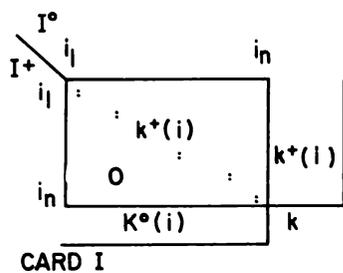


Figura 7.

$$k_{TS}(i_s, i_p) = \text{Card}\{k(j, i_s) = k(j, i_p) = 1 \mid j, k \in J$$

$$p = k, \dots, n\}$$

$k_{TS}(i_s, i_p)$  es el número de elementos de  $Q$  o  $J$  que poseen simultáneamente la propiedad  $i_s, i_p$  y con las mismas características que una matriz de bloques unidimensionales; es decir, no existen diagonales ni extradiagonales de más de un solo elemento. La diagonal son los valores de las masas  $k(j) = k^*(i)$ . Los elementos abajo de la diagonal son todos cero.

Nótese que los algoritmos de construcción de las tablas o arreglos triangular inferior y superior de Burt a partir de la tabla de bloques unidimensionales difieren únicamente en la toma de valores del subíndice  $p$ .

Como ejemplo de una tabla o arreglo triangular superior de Burt-unidimensional, véase el arreglo tabular de la figura 8 construido haciendo uso del ejemplo de un arreglo transpuesto de descripción lógica dado en la sección 1, figura 2.

Recuérdese que  $K_{TS}$  es el número de elementos de  $Q$  o  $J$  que poseen simultáneamente las propiedades  $i_s, i_p$  para  $p = 1, \dots, n$ .

Los elementos abajo de la diagonal son todos cero y la diagonal son los elementos de la línea de margen de la tabla de Burt-unidimensional, donde el valor

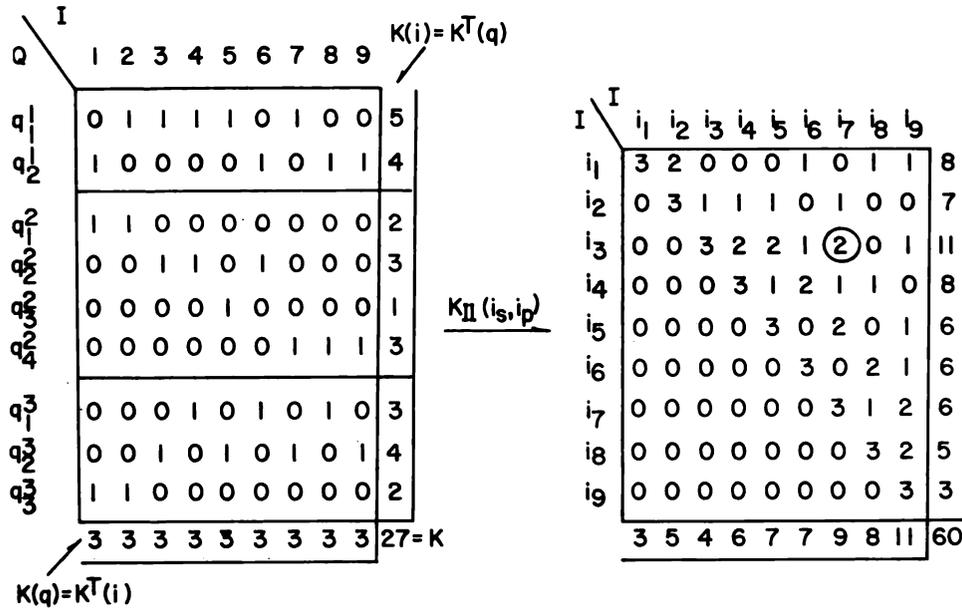


Figura 8.

$(i_3, i_7) = 2$  del bloque extradiagonal  $i_3 * i_7$  es:

$$\textcircled{2} = 1 + 1$$

La construcción de las tablas triangulares se puede expresar también de la siguiente manera:

$$k_{TI}(i_s, i_p) = k_{BC} - k_{TS} + \{k(i_s, i_p) \mid i_s = i_p\}$$

y

$$k_{TS}(i_s, i_p) = k_{BC} - k_{TI} + \{k(i_s, i_p) \mid i_s = i_p\}$$

Nótese asimismo que las diagonales de estos tres últimos arreglos o tablas son iguales; es decir, tienen los mismos valores:

$$\begin{aligned} \text{DIAG}(k_{BC}(i_s, i_p)) &= \text{DIAG}(k_{TI}(i_s, i_p)) \\ &= \text{DIAG}(k_{TS}(i_s, i_p)) \end{aligned}$$

pero no las mismas frecuencias. En particular, las tablas o arreglos triangulares tienen frecuencias transpuestas por tener líneas y columnas de margen transpuestas; es decir:

$$f_{i_l} = f_{j_s} \quad \text{y} \quad f_{i_s} = f_{j_l}$$

Las nubes de puntos en este tipo de arreglos trian-

gulares, además de tener el mismo número de dimensiones son transpuestas,  $N(I) = N'(J)$ . La inercia total asociada a las tablas  $I_{TI} \times I_{TI}$  e  $I_{TS} \times I_{TS}$  son iguales:

$$\begin{aligned} I_{TI} \times I_{TI} (N(I_{TI})) &= \sum \{ \lambda_{\alpha_{TI}} \mid \alpha_{TI} \in A \} \\ &= \sum \{ \lambda_{\alpha_{TS}} \mid \alpha_{TS} \in A \} \\ &= I_{TS} \times I_{TS} \end{aligned}$$

La transposición toca a las leyes de frecuencia marginal así como a las leyes condicionales a partir de las cuales se obtienen factores transpuestos.

$$\begin{aligned} F_{\alpha_{TI}} &= \lambda_{\alpha_{TI}}^{-1/2} \sum \{ f_j^i G_{\alpha_{TI}}(j) \mid j \in J \} \\ &= \lambda_{\alpha_{TS}}^{-1/2} \sum \{ f_i^j F_{\alpha_{TS}}(i) \mid i \in I \} \\ &= G_{\alpha_{TS}} \end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned} G_{\alpha_{TI}} &= \lambda_{\alpha_{TI}}^{-1/2} \sum \{ f_i^j F_{\alpha_{TI}}(i) \mid i \in I \} \\ &= \lambda_{\alpha_{TS}}^{-1/2} \sum \{ f_j^i G_{\alpha_{TS}}(j) \mid j \in J \} \\ &= F_{\alpha_{TS}} \end{aligned}$$

presentándose la misma transposición con la calidad de representación, peso, inercia y contribuciones respectivas.

## 5. Conclusiones

Se construyeron los arreglos triangulares de Burt a partir del arreglo transpuesto disjunto completo con el fin de inducir la discriminación de las variables o de los individuos en estudio bajo la formación tipo bloques unidimensionales.

Los resultados obtenidos de la aplicación de los factores de los arreglos triangulares muestran una relación entre variables o individuos, según sea el caso, nada diferente la una de la otra ya que las nubes de puntos  $N(I_{TI}) = N(J_{TS})$  y  $N(I_{TS}) = N(J_{TI})$  construidas por el análisis factorial están en el mismo espacio  $n$ -dimensional y son transpuestas, por lo que la relación e imagen de resultados transpuestos afirman la coherencia de los datos.

La interpretación de los factores es más dinámica que la realizada a partir de una tabla de bloques unidimensionales por tener más claridad en sus correla-

ciones, además de que los cálculos se efectúan a mayor velocidad disminuyendo el tiempo de cálculo.

## BIBLIOGRAFÍA

1. **Benzécri, J-P.**: "Sur le généralisation su tableau de Burt et son analyse par bandes BANDES BURT". *Les Cahiers de L'analyse des données*, Vol. VII, No. 1, pág. 33-43, 1982. Editorial Dunod. Paris, France.
2. **Casanova del Angel F.**: "Un método para pronosticar valores". *Acta Mexicana de Ciencia y Tecnología*, I.P.N. Vol. II, No. 6, abril-junio, 1984, págs. 69-84. México.
3. \_\_\_\_\_ . "El análisis factorial y sus enfoques". *Boletín de Graduados e Investigación del I.P.N.* Vol. I, No. 4, enero-febrero, 1983. México.
4. **Cazes, P.**: "L'analyse de certains tableaux rectangulaires décomposés en blocs: généralisation des propriétés rencontrées dans l'étude des correspondances multiples. I. Définitions et applications a l'analyse canonique des variables qualitatives ANA. BLOCS I". *Les cahiers de l'analyse des Données*, Vol. V, No. 2, pp. 129-130, 1980. Editorial Dunod. Paris, France.
5. \_\_\_\_\_ , "L'analyse des certains tableaux rectangulaires décomposés en blocs: généralisation des propriétés rencontrées dans l'analyse des correspondances multiples. II. Questionnaires: Variantes de codages et nouveaux calculs de contributions ANA BLOCS II". *Les cahiers de L'analyse des Données*, Vol. V, No. 4, pp. 387-403, 1980. Editorial Dunod. Paris, France.