ACTA MEXICANA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Vol. III, Nos. 11-12, Julio-Diciembre, 1985
págs. 15-17

# EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA PARA LA FÓRMULA DE LARMOR

GONZALO ARES DE PARGA, MARCO A. ROSALES y CESÁREO GARCÍA MARTÍNEZ
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM)
Instituto Politécnico Nacional

**Resumen:** Se comprueba la Fórmula de Larmor para partículas cargadas a partir del paquete coherente para el oscilador armónico.

**THE CORRESPONDENCE PRINCIPLE FOR THE LARMOR FORMULA**

**Abstract:** The Larmor formula is verified for charged particles from the coherent packet of the harmonic oscillator.

## INTRODUCCIÓN

Una de las tesis fundamentales de la Mecánica Cuántica es el llamado Principio de Correspondencia. Cuando no se consideran partículas cargadas, éste se manifiesta a través del teorema de Ehrenfest aplicado a un paquete de tipo gaussiano que asemeje lo más posible a una partícula clásica. Nuestra meta consiste en obtener una relación de tipo Larmor[1] a partir de las transiciones cuánticas que aparecen cuando se introduce el campo electromagnético en la teoría de Schrödinger.

## 1. EL PAQUETE COHERENTE PARA EL OSCILADOR ARMÓNICO

Si consideramos nuestra partícula sujeta a un potencial isotrópico armónico, tenemos que la solución general es:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \sum_{n,l,m=0}^{\infty} A_{nlm}\, U_n(x)\, U_l(y)\, U_m(z) \exp\left\{-i\left[\frac{3}{2} + n + l + m\right]\omega t\right\} \tag{1.1}$$

donde las $U_n$ corresponden a las soluciones del problema unidimensional. Si proponemos como condición inicial

$$\psi(\mathbf{r},0) = U_0(x-a)\, U_0(y)\, U_0(z) \tag{1.2}$$

Como $U_0$ es el estado base es claro que no existirá dispersión del paquete en $y$ y $z$. Luego tendremos

$$A_{nlm} = A_{n00}\, \delta_0^l\, \delta_0^m \tag{1.3}$$

y evaluando los coeficientes, se tiene que:

$$A_{n00} = \frac{(\alpha a)^n l^{-1/4\,\alpha^2 a^2}}{(2^n\, n!)^{1/2}} \text{ donde } \alpha^4 = \frac{m k}{\hbar^2} \tag{1.4}$$

Es fácil ver que si se sustituye (1.4) en (1.1) se obtiene, después de un algebra directa,[2] que

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{\alpha^{-1/2}}{\Pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha x - \alpha a \cos\omega t)^2 - i\left(\frac{1}{2}\omega t + \alpha^2 a x \operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{4}\alpha^2 a^2 \operatorname{sen} 2\omega t\right)\right] \qquad (1.5)$$

Un cálculo directo y sin complicaciones, utilizando las propiedades de los polinomios de Hermite, genera los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} &< x > = a \cos\omega t \\ &< p_x > = -m a \omega \operatorname{sen}\omega t \\ &< y > = < z > = < p_y > = < p_z > = 0 \\ &\Delta_x \Delta p_x = \Delta_y \Delta p_y = \Delta_z \Delta p_z = \hbar/2 \end{aligned} \qquad (1.6)$$

todo esto demuestra que hemos escogido un paquete de ondas inicial que bajo la fuerza armónica se comportará como una "partícula clásica".

Uno de los puntos interesantes es que en Mecánica Clásica uno puede plantearse la restricción de permitir el movimiento solamente en la dirección $x$. Aquí hemos hecho lo mismo pero respetando el principio de incertidumbre al fijar $\Delta x_i \, \Delta p_{x_i} = \hbar/2$. Se podría decir que ésta es la versión cuántica de la restricción clásica.

## 2. FÓRMULA DE LARMOR

La fórmula de Larmor[1] pretende describir la energía radiada por una carga acelerada a velocidades no relativistas, y para un electrón está dada por:

$$E_{\text{rad}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2 \qquad (2.1)$$

## 3. RADIACIÓN ESPONTÁNEA

Considerando que no existe interferencia entre los estados del paquete, debido al movimiento puramente oscilatorio, se encuentra que la aproximación dipolar para la teoría semiclásica,[3] al igual que la teoría cuántica del campo,[4] predicen que el número de transiciones por unidad de tiempo para nuestro paquete se expresa por:

$$N = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3 \hbar}\sum_k \sum_{n+l+m<k} |A_{k00}|^2 \, \omega^3_{k00,nl,m} \, |< k, 00|\mathbf{r}|nlm>|^2 \qquad (3.1)$$

La razón de no incluir efectos de espín en la radiación es porque al no existir en este caso interacción espín-órbita, el estado de espín no es alterado en transiciones dipolares.[5]

Nos limitaremos a considerar que el paquete no es gravemente deformado en toda una oscilación y de esta forma considerar como constante los coeficientes $A_{k00}$. Es verdad que si se quisiera considerar la emisión instantánea aparecerían términos de interferencia que complicarían mucho el cálculo de este primer acercamiento.

Luego, nuestra aceleración considerada clásicamente debe ser la aceleración promediada en una oscilación

$$|a_c|^2 = \frac{a^2\omega^4}{2}.$$

Nuestra fórmula de Larmor a demostrar se convierte en

$$E_{\text{rad}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{a^2\omega^4}{2} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2\omega^4 \qquad (3.2)$$

Utilizando el hecho que para $n + l + m < k$ se tiene

$$< k00|\mathbf{r}|m, l, m> = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}\delta_l^0\,\delta_m^0\,\delta_m^{k-1}$$

Luego (3.1) se reduce a:

$$N = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3\hbar}\omega^3\sum_k \frac{(\alpha a)^{2k} \, l^{-1/2\alpha^2 a^2}}{2^k\, k!}\frac{1}{\alpha^2}\frac{k}{2} \qquad (3.3)$$

o sea:

$$N = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3\hbar}\omega^3 a^2 \qquad (3.4)$$

Como en cada transición permitida se radía la energía $\hbar\omega$ nuestra energía radiada es pues:

$$E_{\text{rad}} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2\omega^4 \qquad (3.5)$$

que corresponde con (3.2).

## 4. CONCLUSIONES

Debido al resultado obtenido se verifica el principio de correspondencia, aunque queda abierto el problema de deducir una relación de emisión instantánea que incluya la interferencia.

Del hecho de que en Electrodinámica la Fórmula de Larmor sea equivalente a la radiación por frenado, se propone se analice el problema general de una partícula cargada en forma de paquete coherente en el caso relativista. Se deduzca su comportamiento considerando la emisión y se obtenga la ecuación de Abraham-Lorentz al promediar.

**Agradecimientos**

Este trabajo ha sido parcialmente patrocinado por el Gobierno del Estado de México.

**BIBLIOGRAFÍA**

1. **Jackson, J. D.:** *Classical Electrodynamics,* Second Edition, Wiley, New York, 1975. Secc. 14, Ec. 14-22.
2. **Schiff, L. I.:** *Quantum Mechanics,* Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968, Sec. 13.
3. **Low, F. E.:** "Correspondence Principle Approach to Radiation Theory", *Am. J. Phys.* **29**, 298 (1961).
4. Referencia 2, Sec. 57, Ec. 75-31.
5. **Davydov, A. S.:** *Quantum Mechanics,* 2da. Edition, Pergamon Press, Oxford, 1976, pág. 407.