ACTA MEXICANA DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Vol. III, Nos. 11-12, Julio-Diciembre, 1985
págs. 7-13

ESTABILIDAD Y OPTIMIZACION DE PROCESOS DE CONTROL

FRANCISCO OLIVA HERRERA*
Sección de Graduados de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME)
Instituto Politécnico Nacional

Resumen: Este artículo trata sobre la optimización de la función de costo de un proceso de control descrito por un modelo matemático que consiste en una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Por ello se utiliza el principio del máximo de Pontryagin, que es una derivación del cálculo de variaciones, y tal vez una de las herramientas más adecuadas para optimizar procesos de control. También se trata el poblema de la estabilidad de un proceso de control por el método de Liapunov. Al final se hace la observación de que un proceso controlado mediante el principio del máximo de Pontryagin tiene el origen como un punto globalmente estable en el sentido de Liapunov. Se mencionan algunas aplicaciones en los últimos párrafos del artículo.

STABILITY AND OPTIMIZATION OF CONTROL PROCESS

Abstract: This article is about the optimization of the objetive funtion of a control process that has an ordinary differential equation of an order n as a model. For that purpose it's used the Pontryagin maximum principle, a derivation of a variational calculus. The Liapunov method is used to study the stability of the control process. At the end, it's observed that a process controled with the maximum principle is globally stable within the Liapunov method. Some applications are mentioned in the last paragraphs of the article.

Los procesos aquí tratados serán descritos por ecuaciones diferenciales como modelos. La terminología adecuada se irá describiendo en el transcurso del texto. Se definirá primero lo que es un punto crítico.

Definición 1: Un punto crítico o de equilibrio x_0 de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ es un punto para el cual se tiene $f(x_0) = 0$, es decir, donde $\dot{x} = 0$ y por lo tanto $x(t)$ = constante para toda t, por lo que también al punto crítico se le llama punto estacionario. Notación, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; a t se le llamará el, "tiempo".

Mediante una traslación es posible que el punto x_0 sea el origen de coordenadas del espacio $\mathbb{R}^n$. Supondremos que x o $x(t)$ es un vector de dimensión n.

Interesa estudiar la estabilidad del origen (punto crítico) para lo cual se dará una definición heurística primero e inmediatamente después una totalmente formal. Supodremos que el espacio donde se trabaja es un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 2 (heurística): El origen, siendo un punto crítico, es estable si toda solución de $\dot{x} = f(x)$ que empiece cerca del origen permanece cerca de él para toda t. Si además de ser estable el origen se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

se dirá que el origen es *asintóticamente estable.* Cuando una solución que no empieza cerca del origen, sino en cualquier punto de $\mathbb{R}^n$, se acerca al origen, se tendrá estabilidad global.

*Becario de la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) del Instituto Politécnico Nacional.

Definición 3 (estabilidad): Si el origen es un punto crítico, entonces el origen es:

i) estable si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $y_0 \,\varepsilon\, \Omega$ y $||y_0|| < \delta$, entonces $||x(t, y_0)|| < \varepsilon$ para $t \geq 0$.*

ii) Asintóticamente estable si además de ser estable se cumple

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t, y_0)|| = 0$$

iii) inestable en cualquier otro caso.

La estabilidad global se entenderá igual que en la definición heurística.

La estabilidad definida a través de la definición anterior se llama estabilidad de Liapunov.

A lo largo de esta exposición se trabajará con la ecuación diferencial "ordinaria" $\dot{x} = f(x)$ llamada autónoma, pero un tratamiento similar se puede hacer en el caso no autónomo $\dot{x} = f(x, t)$. Las ecuaciones con que aquí se trabaja se llaman ordinarias para diferenciarlas de las ecuaciones en derivadas parciales; con objeto de ilustrar estas definiciones se considerarán los siguientes ejemplos que corresponden a sistemas lineales de la forma $\dot{x} = Ax$, donde A es una matriz constante de n renglones y n columnas.

Ejemplo 1: $\dot{x} = y$
$\dot{y} = x$

donde: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

La ecuación, eliminando el tiempo t, se puede escribir

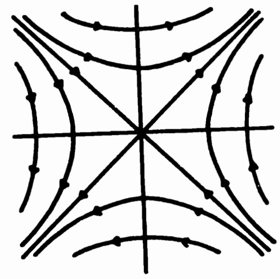
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

que al resolverla por separación de variables nos da la familia de soluciones (una para cada c).

$$x^2 - y^2 = c$$

*$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, para $x = (x_1 \ldots, x_n)$.

cuya gráfica se da en la figura 1.



Punto de "Silla de - montar" Inestable.

Figura 1.

Como se ve, una solución que empieza cerca del origen no permanece cerca, sino que se aleja de él, por lo que en este caso el origen es inestable. (Las únicas soluciones que se acercan al origen son las alojadas en el eje que forma 135° con el eje x.) En este caso el origen se llama "punto silla".

Ejemplo 2:

$\dot{x} = y$

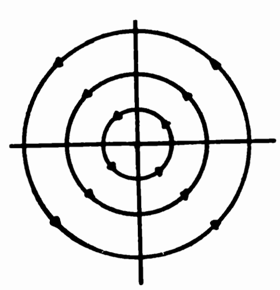
$\dot{y} = -x,$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

se tiene $x^2 + y^2 = c$, que es una familia de circunferencias con centro en el origen y radio $c \geq 0$, cuya gráfica se muestra en la figura 2.



Punto Vórtice Estable

Figura 2.

En este caso el origen es estable, pero no asintóticamente estable, ya que toda solución (circunferencia) que empieza cerca del origen permanece cerca (a la misma distancia) del origen. En este caso el origen se llama "centro" o "vórtice".

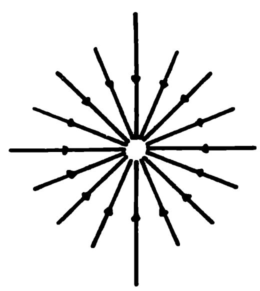
Ejemplo 3:

$$\dot{x} = -x$$

$$\dot{y} = -y;$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x}$, se tiene $y = cx$, rectas que entran al origen (Fig. 3).



Punto Estrella

Figura 3.

En este caso el origen se llama punto "estrella" o "nodo" y es asintóticamente estable.

Un procedimiento para investigar estabilidad es calcular las soluciones, pero esto a veces es difícil, por lo que se acostumbra recurrir a otro tipo de procedimientos indirectos. En el caso de sistemas lineales, $\dot{x} = Ax$, hay un teorema que dice:

Teorema 1: Si $\dot{x} = Ax$ es un sistema lineal autónomo de $n \times n$ cuya matriz de coeficientes es no singular, entonces el origen es:

i) asintóticamente estable si las partes reales de todos los valores característicos de A son negativas;
ii) estable, pero no asintóticamente estable, ni A tiene al menos un par de valores característicos imaginarios puros de multiplicidad uno, ningún par de valores característicos de multiplicidad mayor de uno y ningún valor característico con partes reales positivas;
iii) inestable en cualquier otro caso.

Refiriéndonos a los ejemplos antes citados vemos que:

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y del determinante det $(A - \lambda I) = 0$, se obtiene $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ (lo que hace que el origen sea inestable, de acuerdo al teorema 1).

Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ por lo que el origen es estable pero no asintóticamente estable.

Ejemplo 3: con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e implica que el sistema es asintóticamente estable.

Para sistemas no lineales se recurre a otros procedimientos indirectos:

I) Sistemas casi lineales

$$\dot{x} = Bx + q(x)$$

donde $q(x)$ es una función no lineal tal que

$$\lim_{||x|| \to 0} \frac{q(x)}{||x||} = 0$$

entonces el comportamiento del sistema es el mismo que el del sistema lineal

$$\dot{x} = B(x) \text{ ,}$$

es decir, que se analiza de acuerdo al teorema 1.

II) Sistemas no lineales en general $\dot{x} = f(x)$ se analizan usando la llamada función de Liapunov:

Definición 4: Una función $V(x)$ continua y positiva definida en Ω se llama función de Liapunov no creciente en Ω con respecto a $\dot{x} = f(x)$ si para cada solución $x(t)$ de esta ecuación se cumple $\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant 0$ para todas t tales que $x(t) \in \Omega$

Usando esta definición y algunos teoremas como los siguientes se investiga si el origen es estable, asintóticamente estable o inestable.

Teorema 2: El origen es un punto de equilibrio estable para $\dot{x} = f(x)$; $f(0) = 0$ si existe una función de Liapunov $V(x)$ para el sistema; si además $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ el origen es asintóticamente estable.

Existen muchos teoremas al estilo T.2 con mayor o menor refinamiento, así como otros relativos a inestabilidad.

Hay un teorema debido a Krasovski para sistemas no lineales, pero que en realidad vale (por las condiciones que exige) para sistemas casi lineales, por lo que no se mencionará aquí.

Cuando se estudia la estabilidad puede suceder que el sistema en estudio sea tal que en él intervenga o no una función de control. En sistemas inestables es conveniente en muchos casos introducir una función de control si se desea estabilizar el sistema; a veces en un sistema estable es conveniente introducir una función de control para hacer más rápida la estabilidad o para convertir una estabilidad en estabilidad asintótica. Vamos ahora a tratar sistemas de control o sistemas con control, especialmente el caso en que el control sea óptimo mediante el principio del máximo de Pontryagin,[2] y es en esta parte donde la "teoría de optimización de funciones y funcionales de costo" juega un papel importante.

Consideremos el problema de control

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^\nu$, de ir de un punto cualquiera x_0 a otro punto* deseado x_1 con un control $\mu = \mu(t)$ en un conjunto U de controles permisibles y supongamos que lo que nos cuesta usar el control μ está medido por el índice o función de costo.

$$c(\mu) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, \mu)\,dt \tag{2}$$

Se dice que el control $\bar{\mu}$ es "óptimo" si minimiza la función (2), es decir, si $c(\bar{\mu}) \leqslant c(\mu)$ para toda $\mu \in U$.

Definamos la función de la variable t siguiente:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(x, \mu)\,ds$$

Entonces $\dot{\sigma} = f^0(x, \mu)$. Agreguemos al sistema (1) esta ecuación y tendremos

$$\dot{z} = F(z, \mu) \tag{3}$$

donde $F = \begin{bmatrix} f^0 \\ f \end{bmatrix}$ siendo f la función vectorial

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}$$

Entonces el problema de ir de x_0 a x_1 se transforma en ir de $z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_0 \end{bmatrix}$ a $z_1 = \begin{bmatrix} \sigma(t_1) \\ x_1 \end{bmatrix}$ ya que $\sigma(t_0) = 0$.

Consideremos la función

$$H(z, \mu, \Phi) = \psi^0 f_0 + \psi^1 f_1 + \ldots + \psi^n f_n$$

donde $(\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^n) = \Phi$ es un vector arbitrario usado para definir H (hasta este momento).

Consideremos el sistema:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Phi}, \frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\partial H}{\partial \psi^0}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial \psi^n} \tag{4}$$

$$\frac{d\Psi^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z^i}, i = 0, 1, \ldots, n; z = (z^0, \ldots, z^n) \tag{5}$$

donde se observa que $\Phi = (\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^n)$ es un vector por determinar, desconocido. Con base en esto podemos enunciar el principio del máximo de Pontryagin:

Teorema 3: Sea $\mu(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, un control permisible ($\mu \in U$) tal que la trayectoria correspondiente $z(t)$ que parte de z_0 en el tiempo t_0 y llega a z_1 en el

*En un problema sin control no se puede asegurar que la solución que empieza en x_0 llega a un punto x_1 escogido o deseado de antemano.

tiempo t_1. Una condición necesaria para que el control $\mu(t)$ sea óptimo es que exista la función vectorial no cero $\phi(t) = (\psi^0, \ldots, \psi^n)$ correspondiente a $\mu(t)$ y $z(t)$ tales que (1) $H(\phi(t)\,\mu(t), z(t))$ sea máxima respecto a μ y que este máximo sea constante para toda t en $[t_0, t_1]$.

Cuando $f^0 = 1$ entonces la función de costo

$$c(\mu) = \int_{t_0}^{t} dt = t_1 - t_0$$

y se tiene el problema de optimización del tiempo, llamado "problema de tiempo mínimo".

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4: Ir de $X_0 \in \mathbb{R}^2$ (cualquier punto del plano) a $X_1 = 0$ (el origen de $\mathbb{R}^2$) en tiempo mínimo, si el sistema de control es:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \mu \qquad \|\mu\| \leqslant 1$$

$$\dot{x}_0 = 1$$

Solución:

Sean $\quad H = \psi^0 + \psi^1 x_2 + \psi^2 \mu$, ya que $f^0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi^0} = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi^1} = x_2 \qquad\qquad (6) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi^2} = \mu \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi^0}{dt} = 0$$

$$\frac{d\psi^1}{dt} = 0$$

$$\frac{d\psi^2}{dt} = -\psi^1$$

La función H de μ

$$H = \psi^0 + \psi^1 x_2 + \psi^2 \mu$$

es lineal en μ por lo que es máxima en $\mu = 1$ (Fig. 4), o en $\mu = -1$ (Fig. 5) ya que $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ es el rango permisible de μ.

Si sustituimos $\mu = 1$ en (6) se tendrá:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 1$$

cuya solución es

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(x_2)^2 + c$$

que es una familia de parábolas (una para cada valor de la constante c) (Fig. 6).

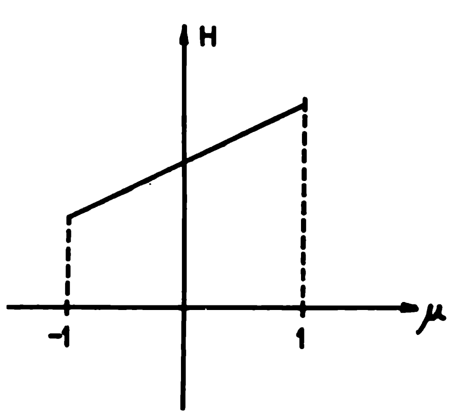


Figura 4.

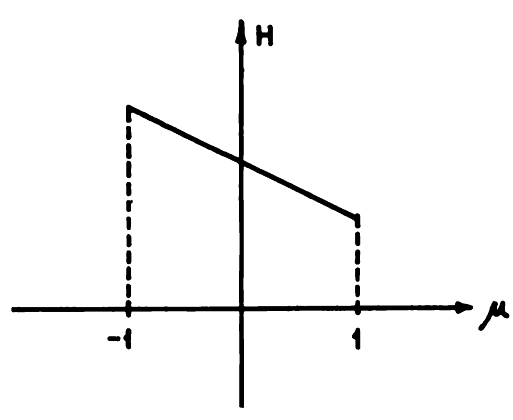
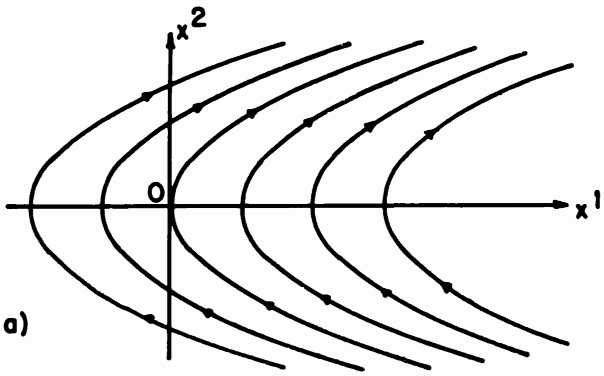


Figura 5.



a)

Figura 6

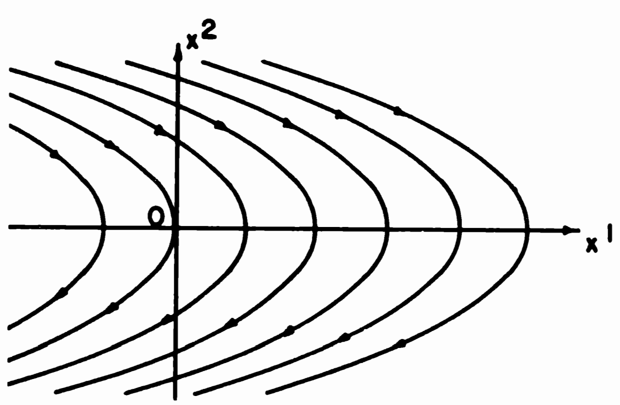
Para el control $\mu = -1$ el sistema (6) es

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -1 \tag{6'}$$

cuya solución es:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}(x_2)^2 + c_1$$

y su gráfica se indica en la figura 7



b)

Figura 7

Si superponemos las figuras 6 y 7 tendremos la figura 8.

Usamos las soluciones con $c = c_1 = 0$ como "curva de cambio", es decir, nos vamos con un control $\mu = -1$ si el punto x_0 está por encima de esa curva de cambio y al llegar a ella cambiamos a un control $\mu = 1$, entrando de este modo al origen sobre la curva de cambio. En forma similar, si x_0 está debajo de la curva de cambio, nos vamos con un control $\mu = 1$ hasta encontrar la curva de cambio y luego entramos sobre ella al origen con un control $\mu = -1$.

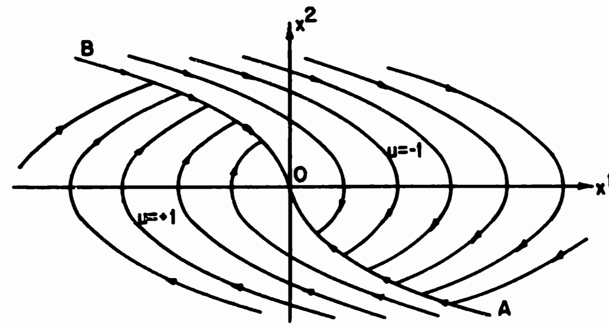


Figura 8

Este problema, llamado de síntesis, usa el control de tipo *bang-bang, relay* o relevador u *on-off:* $\mu = 1$ en un tramo y $\mu = -1$ en otro; claro que en el caso de que x_0 esté sobre la curva de cambio se usará un solo control: bien $\mu = 1$ o bien $\mu = -1$. Se demuestra[1] que en el caso lineal el control óptimo siempre es de tipo *bang-bang*.

Ejemplo 2:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu$$

Este ejemplo se puede ver en Pontryagin *et al,*[2] y el comentario interesante es que el sistema (6) sin control:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \tag{6''}$$

es un centro y con control una espiral, por lo que un sistema estable (centro) se convierte en un sistema asintóticamente estable (espiral).

Una conclusión interesante es que con controles óptimos, mediante el principio del máximo de Pontryagin, se puede obtener no sólo la estabilidad de Liapunov local sino la estabilidad global: se puede ir desde cualquier punto x_0 al origen $x_1 = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Una observación interesante es que al maximizar $H(z, \mu, \phi)$ respecto a μ, la función puede ser lineal o no lineal, con o sin restricciones, por lo que se debe conocer ampliamente el problema de optimización de funciones de cualquiera de esos tipos. Se hace notar que siendo $\mu \in \mathbb{R}^r$ un vector, la optimización, en general, es para funciones de r variables: las componentes de $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$.

Las aplicaciones del principio del máximo son en ingeniería y física: reactores químicos, nucleares, torres de destilación, vuelos espaciales, circuitos eléctricos y electrónicos, etc., así como en las ciencias sociales; en general en todo fenómeno que pueda tener como modelo una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales.

De estas aplicaciones podemos citar algunos casos:

En un reactor químico, por ejemplo en un proceso en el que a partir de un producto A quisiéramos, mediante el control de la temperatura, transformarlo en un producto B, la optimización consistirá en obtener el máximo de B a partir de A con la temperatura óptima.

En un vuelo espacial, un alunizaje por ejemplo, nuestro objetivo sería llegar, con el mínimo de combustible, a la superficie lunar sin estrellarnos, es decir, llegar allá con velocidad cero.

En realidad hay muchos artículos y libros en la actualidad donde se tratan estas aplicaciones,[3,4] por lo que conviene consultar la bibliografía proporcionada con este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. **La Salle, J. & S. Lefschetz:** *Stability by Liapunov direct methods*. Academic Press.
2. **Pontryagin, L.S.** *et al: The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Pergamon Press.
3. **Liang-Tseng Fan:** *The Continuous Maximum Principle*. John Wiley & Sons.
4. **Leitmann George:** *Optimization Thechniques*. Academic Press.