Modificación del método de Guggenheim para funciones potenciales y su aplicación a la ecuación de fricción de Koo

G. A. Ciurlizza * y T. V. M. Miranda *
(Recibido, marzo 1974)

RESUMEN

El Método de Guggenheim,[1] ha sido empleado únicamente, para interpretar datos de Cinética Química, en donde se presentan funciones exponenciales. En el presente trabajo, se modifica dicho Método, para emplearlo, en funciones potenciales, aplicándolo al cálculo de los parámetros, que contiene la ecuación de Koo;[2] dicha ecuación relaciona el factor de fricción de Darcy y el número de Reynolds.[3] Los resultados de esta aplicación fueron satisfactorios.

ABSTRACT

Guggenheim's Method,[1] had been employed only for interpretation of Chemical Kinetics data where exponential functions are present. In this work, such Method is modified in order to apply it to parameter calculations in potential functions as those that contain Koo's equation. Such equation relates Darcy's friction factor with Reynold's number.[3] Results of this application were satisfactory.

I. ANTECEDENTES

Guggenheim elaboró un Método de cálculo de la constante de velocidad de reacción, para reacciones de primer orden, las cuales obedecen a una función exponencial. este Método puede ser aplicado también a otro tipo de fenómenos físicos, como el descrito por la ecuación de Koo,[2] que es la siguiente función potencial:

$$f - a = c\,Re^{-b} \qquad 1$$

Donde f = factor de fricción de Darcy

Re = número de Reynolds

$a, b, c,$ son parámetros que dependen de la rugosidad relativa (e/D)

e = espesor medio del borde

D = diámetro del tubo

* Sección de graduados, ESIQIE, I.P.N.

La ecuación 1, suministra, la forma de interpretar numéricamente, las gráficas de Bridgman; [3] en donde se encuentra, el factor de fricción de Darcy V.S. el número de Reynolds, teniendo como parámetro la rugosidad relativa (e/D).

Las bases fundamentales para el presente estudio fueron:

El Método de Guggenheim; [1]

la Ecuación de Koo; [2]

y las Gráficas de Bridgman. [3]

II. METODOS MATEMATICOS

a) *Método Clásico* [4]

La ecuación 1, es linearizable tomando logaritmos, obteniéndose la siguiente expresión:

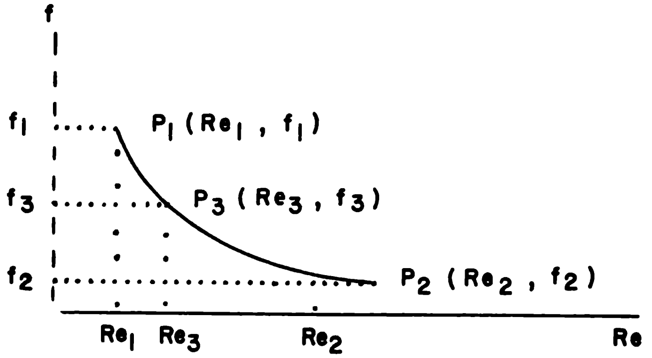
$$\log (f - a) = -b \log Re + \log c \qquad 2$$

La ecuación 2 indica, que al graficar log $(f - a)$ V.S. $\log Re$ se debe obtener una línea recta (para cada rugosidad relativa), figura 1. Los datos de Bridgman [3] fueron tratados por mínimos cuadrados, [5] para la obtención de los parámetros "b" y "c", habiéndose previamente determinado "a" por el Método de los tres puntos [4] que se resume a continuación.

Para mejor comprensión del Método antes mencionado se construye, el esquema 1.

El esquema 1, describe la forma general de una curva de Bridgman, [3] en la cual para determinar la asintota "a", se toman 2 puntos extremos, seleccionados al azar, P_1 (Re_1, f_1) y P_2 (Re_2, f_2) y uno intermedio calculado a partir de "Re_1" y "Re_2", por la siguiente fórmula:

$$(Re_3 = (Re_1 Re_2)^{1/2} \qquad 3$$



Esquema 1.

Con este valor de Re_3, en el esquema 1, se lee "f_3" y la asintota se calcula con la fórmula siguiente:

$$a = \frac{f_1 f_2 - f_3{}^2}{f_1 + f_2 - 2 f_3} \qquad 4$$

b) *Método de Guggenheim Clásico* [1]

Para la mejor comprensión del Método de Guggenheim Modificado, desarrollado en este trabajo, se expone brevemente el Método de Guggenheim Clásico.[1]

Para la aplicación del Método de Guggenheim Clásico,[1] es necesario que los datos obedezcan la función:

$$y - A = C\, e^{-Bx} \qquad 5$$

Donde x, y.—par de valores que obedecen la ecuación 5

A, B, C.—parámetros a determinar

Guggenheim,[1] propone hacer, una primera serie de lecturas de "y" a valores de "x" seleccionados al azar y otra segunda serie, a los mismos valores de "x", pero desplazados, en una constante, previamente seleccionada, o sea leer a "x + I", en este caso la ecuación quedaría:

$$y' - A = C\, e^{-B}\,(x + I) \qquad 6$$

Donde y'.—valor leído a "x + I"

I.—incremento de "x" previamente selecionado

Restando la ecuación 6 de la ecuación 5 y tomando logaritmos se obtiene:

$$log\,(y - y') = -Bx\,log\,e + log\,C\,(1 - e^{-BI}) \qquad 7$$

Al graficar en papel semilogarítmico, los datos en cuestión, según la ecuación 7, si ellos obedecen la forma funcional dada por la ecuación 5, se obtendrá una línea recta de cuya pendiente, puede ser calculada "B" y de cuya intersección al origen, puede ser calculada "C".

La ventaja de este Método es poder estimar "B" y "C" habiendo, eliminado el error que se tendría, al sacar logaritmos directamente de la ecuación 5 y requerir una estimación del valor de "A".

c) *Método de Guggenheim Modificado*

En el presente trabajo, se modificó el Método de Guggenheim,[1] para aplicarlo a funciones potenciales tomando como ejemplos la ecuación 1 de Koo.[2] Para ello se efectuó una primera serie de lecturas del factor de fricción de Darcy, a diferentes valores del número de Reynolds, que fueron denotadas simplemente con la letra "f" y que siguen la ecuación 1 o de Koo.[2]

Posteriormente, se efectuó una segunda serie de lecturas, denotadas con la letra "f'", que fueron realizadas a valores del número de Reynolds, calculados por la siguiente ecuación:

$$Re' = Re\ Re\ m.g. \tag{8}$$

Donde Re'.—números de Reynolds, a los cuales se deben obtener, los valores de la segunda serie de lecturas, del factor de fricción de Darcy (f')

Re.—números de Reynolds seleccionados al azar, para obtener los valores de la primera serie de lecturas, del factor de fricción de Darcy (f)

$Re\ m.g.$—media geométrica del número de Reynolds, determinada por la ecuación 3 * y obtenida a partir de los puntos extremos, de las secciones de curvas consideradas **

Por lo anteriormente explicado, la ecuación 1 de Koo,[2] para la segunda serie de lecturas, quedará en la siguiente forma:

$$f' - a = c\ Re^{-b}\ Re^{-b}\ m.g. \tag{9}$$

Restando a la ecuación 1, que rige para la primera serie de lecturas, la ecuación 9, que rige para la segunda serie de lecturas, se tendrá:

$$f - f' = c\ Re^{-b}\ (1 - Re^{-b}\ m.g.) \tag{10}$$

Sacando logaritmos a la ecuación 10, se obtiene la siguente expresión:

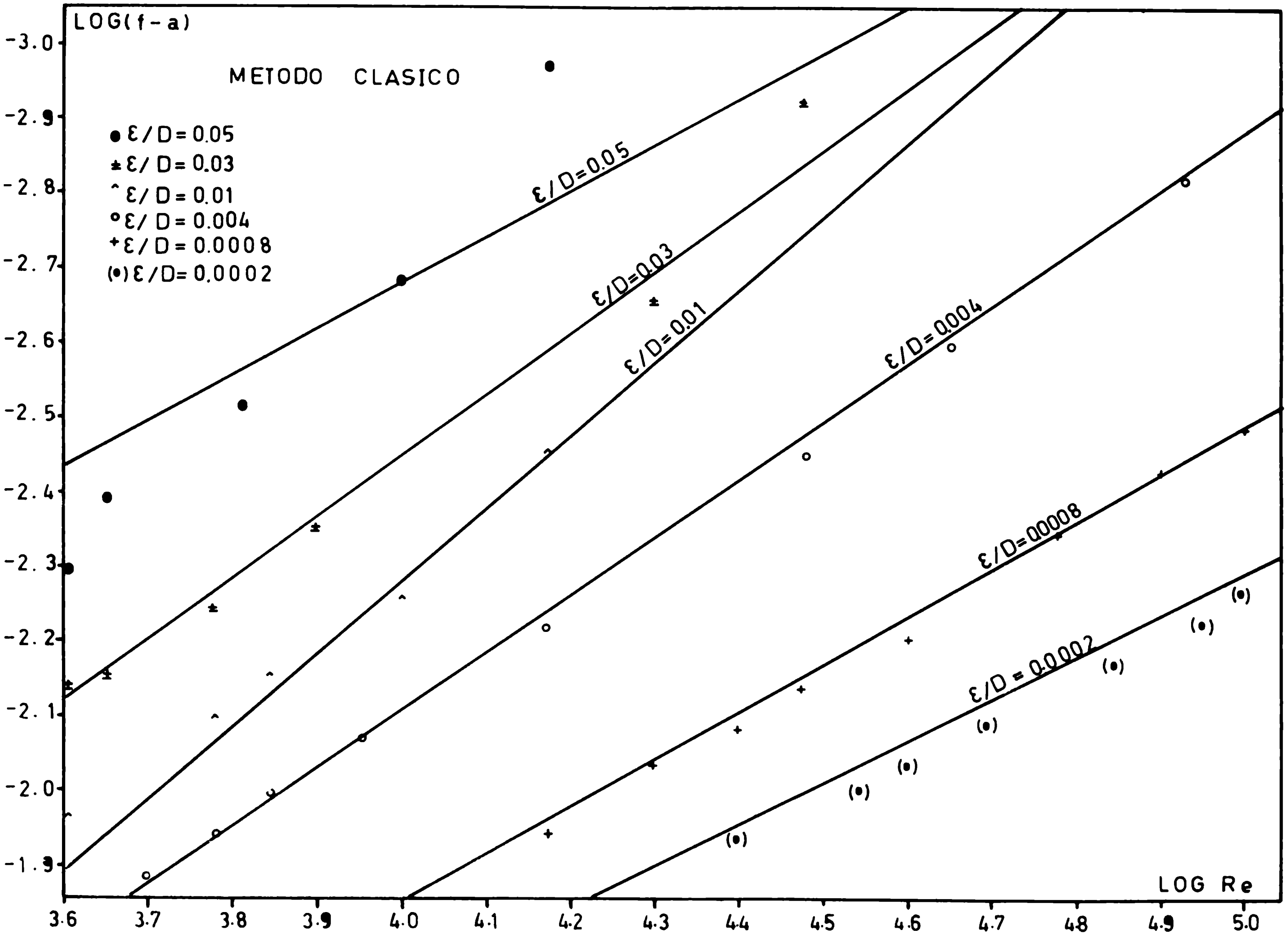
$$log\ (f - f') = -b\ log\ Re + log\ c\ (1 - Re^{-b}\ m.g.) \tag{11}$$

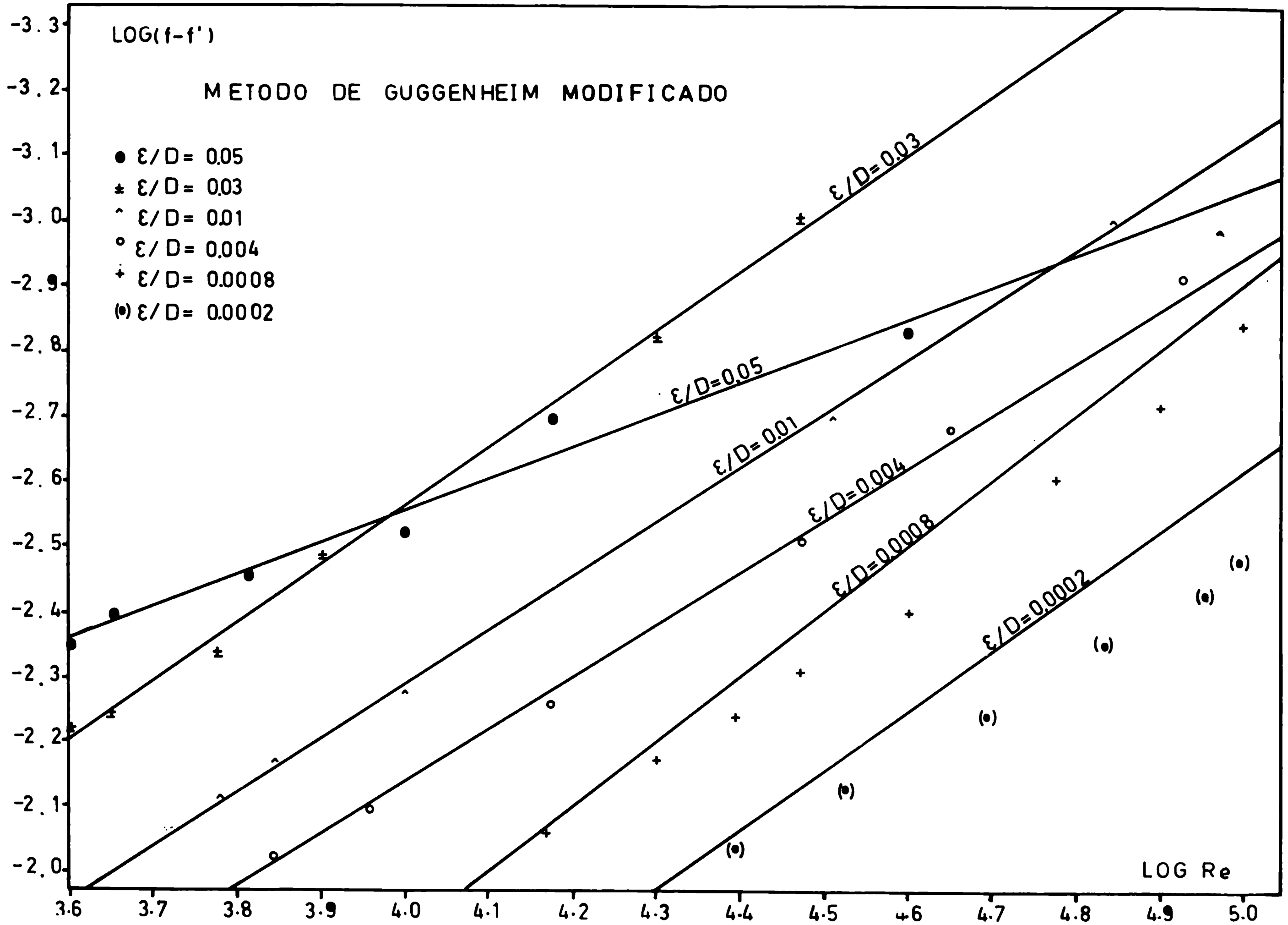
La ecuación 11 indica que al graficar $log\ (f - f')$ $V.S.$ $log\ Re$ se obtendrá una línea recta para cada una de las curvas de Bridgman [3] que tienen como parámetro la rugosidad relativa (e/D), de la pendiente de estas líneas rectas Fig. 2, se obtuvo el valor de "b" y de la intersección al origen se obtuvo el valor de "c". (Tabla II.)

Tanto en el Método Clásico [4] Fig. 1, como en el Método de Guggenheim Modificado Fig. 2, los valores de los parámetros fueron calculados aplicando la técnica de mínimos cuadrados,[5] para obtener además, de dichos valores, magnitudes de confianza estadística, resumidos en Tabla I y Tabla II.

Para el cálculo de "a" en el Método de Guggenheim Modificado, se despeja dicha constante de la ecuación 1 de Koo [2] y para cada par de valores $P(Re,f)$, se calcula uno de "a", efectuando posteriormente el promedio aritmético, al cual en calcula uno de "a" efectuando posteriormente el promedio aritmético, el cual en este artículo, se le asignará el nombre de "$\bar{a}$".

* El valor Re m.g. es le mismo que Re_3 ($Re_3 = Re\ m.g.$).
** Las secciones de las curvas de Bridgman [3] consideradas, son las correspondientes a la zona de flujo turbulento.


LOG(f-a)
METODO CLASICO
● Ɛ/D=0.05
± Ɛ/D=0.03
^ Ɛ/D=0.01
○ Ɛ/D=0.004
+ Ɛ/D=0.0008
(•) Ɛ/D=0.0002
Ɛ/D=0.05
Ɛ/D=0.03
Ɛ/D=0.01
Ɛ/D=0.004
Ɛ/D=0.0008
Ɛ/D=0.0002
LOG Re
-3.0
-2.9
-2.8
-2.7
-2.6
-2.5
-2.4
-2.3
-2.2
-2.1
-2.0
-1.9
3.6
3.7
3.8
3.9
4.0
4.1
4.2
4.3
4.4
4.5
4.6
4.7
4.8
4.9
5.0


LOG(f-f')
METODO DE GUGGENHEIM MODIFICADO
ε/D= 0,05
ε/D= 0,03
ε/D= 0,01
ε/D= 0,004
ε/D= 0,0008
ε/D= 0,0002
ε/D=0,03
ε/D=0,05
ε/D=0,01
ε/D=0,004
ε/D=0,0008
ε/D=0,0002
LOG Re
-3.3
-3.2
-3.1
-3.0
-2.9
-2.8
-2.7
-2.6
-2.5
-2.4
-2.3
-2.2
-2.1
-2.0
3.6
3.7
3.8
3.9
4.0
4.1
4.2
4.3
4.4
4.5
4.6
4.7
4.8
4.9
5.0

III. INTERPRETACION DE LAS GRAFICAS DE BRIDGMAN;[3] POR METODOS ESTADISTICOS DE CORRELACION Y REGRESION [5]

Para efectuar un estudio comparativo, del Método Clásico,[4] de interpretación de funciones potenciales y el Método propuesto en este trabajo, se calcularon los valores que aparecen en la Tabla I y en la Tabla II, dichas tablas contienen además de los valores de los parámetros "a", "b", "c", de la ecuación 1, de Koo,[2] valores del coeficiente de correlación y del error típico medio, determinado según Métodos tradicionales de cálculo.[5]

IV. DISCUSION DE RESULTADOS

Para analizar acertadamente, la aplicación del Método propuesto en este trabajo, a la ecuación 1 de Koo,[2] además de determinar los parámetros, de dicha ecuación, se evaluaron dos magnitudes estadísticas,[5] que fueron el coeficiente de correlación y el error típico medio, para cada una de las curvas de Bridgman,[3] estos resultados para el Método propuesto están resumidos en la Tabla II.

Se le efectuó también al Método Clásico,[4] un análisis similar, al realizado para el Método propuesto, Tabla I, con objeto de poder comparar ambos Métodos.

La información que se desprende de los cálculos efectuados, Tabla I y II, es la siguiente:

Tabla I Método Clásico [4]

e/D	b	a	c	r	Syx
0.05	0.6159	0.07193	0.6039	−0.9786	0.1234
0.04	1.0866	0.065	50.65	−0.9714	0.08063
0.03	0.8204	0.0568	6.801	−0.9976	0.03612
0.02	1.1327	0.049	106.8	−0.9909	0.04003
0.015	0.8954	0.044	15.45	−0.9987	0.01503
0.01	0.9699	0.03799	39.18	−0.9915	0.0694
0.008	0.9386	0.03547	31.16	−0.9966	0.03508
0.006	0.48948	0.03199	26.23	−0.9932	0.05687
0.004	0.775	0.02848	9.381	−0.9992	0.018056
0.002	0.7545	0.02348	10.47	−0.9975	0.03149
0.001	0.64909	0.0194	5.121	−0.9984	0.02362
0.0008	0.6388	0.01827	5.069	−0.9994	0.0144
0.0002	0.56217	0.01357	3.283	−0.9945	0.04101

Valores obtenidos a partir de las gráficas de Bridgman,[3] por el Método Clásico.[4]

Donde *e/D*.—rugosidad relativa
"a", "b", "c".—parámetros de la ecuación 1 de Koo [2]
r.—coeficiente de correlación
Syx.—error típico medio

Tabla II Método propuesto (Guggenheim Modificado)

e/D	b	$\bar{a}$	c	r	Syx
0.05	1.0138	0.07202	21.1615	−0.9924	0.04311
0.04	0.6392	0.06475	1.0175	−0.9604	0.05631
0.03	0.8991	0.05774	10.7808	−0.9999	0.002787
0.02	1.1327	0.04894	106.8001	−0.9909	0.04003
0.015	0.8954	0.04397	15.4402	−0.9987	0.01473
0.01	0.8292	0.03814	10.5004	−0.9989	0.01547
0.008	0.94299	0.03581	30.0906	−0.9964	0.03654
0.006	0.80509	0.03203	11.2403	−0.9986	0.01694
0.004	0.7992	0.0289	11.3805	−0.999	0.02082
0.002	0.91288	0.02352	42.2603	−0.9883	0.08283
0.001	0.9633	0.02028	83.6407	−0.9887	0.09514
0.0008	1.0056	0.02041	132.6009	−0.9881	0.1016
0.0002	0.9165	0.01606	93.0507	−0.9688	0.1785

Valores obtenidos a partir de las gráficas de Bridgman,[3] por el Método propuesto en el presente trabajo.
Donde *e*/D.—rugosidad relativa
"a", "b", "c".—parámetros de la ecuación 1 de Koo [2]
r.—coeficiente de correlación
Syx.—error típico medio

Siendo el "coeficiente de correlación", una medida de qué tanto se adaptan los datos, al modelo matemático empleado, los valores de dicho coeficiente, contenidos en las Tablas I y II, muestran, que para la determinación de los parámetros de la ecuación 1 de Koo,[2] ambos Métodos son altamente confiables, pudiéndose usar en este caso, uno como Método de cálculo de parámetros y otro como Método de respaldo y comprobación.

Con respecto al "error típico medio", que es una medida de cuánto se dispersan los datos al aplicar un modelo matemático, los valores de esta magnitud estadística, enlistados en las Tablas I y II, dan a conocer, que al aplicar ambos Métodos, la dispersión de datos, es pequeña y de magnitud simejante.

Por simple observación de los parámetros de la ecuación 1 de Koo,[2] obtenidos por el Método propuesto en este trabajo, Tabla II y por el Método Clásico,[4] Tabla I, se ve que dichos parámetros prácticamente coinciden, de manera que, ambos Métodos resultaron igualmente eficientes, al ser aplicados a la ecuación 1 de Koo.[2]

V. CONCLUSIONES

1. El Método de Guggenheim,[1] fue desarrollado para funciones exponenciales, como la ecuación 5. En este trabajo se modifica dicho Método para funciones potenciales y esta modificación resulta eficiente, al ser aplicada al cálculo de parámetros, de la ecuación 1 de Koo.[2]

2. La ventaja del Método propuesto, en este trabajo, para funciones potenciales, es poder determinar el exponente y el coeficiente de la función potencial, "b" y "c" en el caso de la ecuación 1 de Koo,[2] sin arrastrar sistemáticamente el error de la asinota "a", en el caso de la ecuación 1 de Koo.[2]

REFERENCIAS

1. Guggenheim: Phil. Mag., *1*:538, 1926.
2. Koo, E. C.: Sc. D. Thesis in Chemical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1932.
3. Bridgman, P. W.: Dimensional Analysis, Universidad de Yale (Editorial), 1946.
4. Lipka, Joseph: "Computaciones Gráficas y Mecánicas", Editorial CECSA, 1970.
5. Keith J. Laidler: "Cinética de Reacciones Homogéneas en Fase Gaseosa", Editorial Alhambra, p. 210, 1971.