Acta Mexicana de
Ciencia y Tecnología
Vol. VIII. Nos. 1-2-3. 1974

99

Aplicación de la geometría proyectiva al cálculo de la vida media de elementos radioactivos

G. A. Ciurlizza y T. V. M. Miranda *
(Recibido, julio 1974)

RESUMEN

Se aporta un Método, para el cálculo de la vida media de los Elementos Radioactivos, basado en Geometría Proyectiva. El Método propuesto se aplica a datos experimentales reportados en la literatura,[1] obteniéndose resultados satisfactorios en el cálculo de la vida media del torón ${}_{86}Tn^{220}$.

ABSTRACT

A Method for calculation of half life of Radiactive Elements is given in this work. Such Method is based on Projective Geometry. Proposed Method is applied to experimental data reported on literature [1] and obtaining satisfactory results on calculation of half life of Thoron ${}_{86}Tn^{220}$.

I. ANTECEDENTES BIBLIOGRAFICOS

En Fenómenos de Dinámica Fisicoquímica, Sturtevant,[2] fue el primer autor que aplicó la Geometría Proyectiva, al cálculo de parámetros Cinéticos. El trabajo del autor antes mencionado, versa sobre el cálculo de constantes de velocidad, de reacciones de segundo orden. Frampton [3] y colaboradores, aplican la Geometría Proyectiva al análisis Químico Cuantitativo, otros autores han aplicado la Geometría Proyectiva a las reacciones autocatalíticas,[4] así como a estudios dilatométricos.[5]

II. METODO MATEMATICO PROPUESTO

Un elemento radioactivo se descompone proporcionalmente al peso de elemento presente, lo que lleva a la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W \qquad (1)$$

* Sección de Graduados de la ESIQIE, I. P. N.

Donde W.—peso del elemento radioactivo a las "t" unidades de tiempo

λ.—constante de proporcionalidad

Integrando la ecuación (1) se obtiene:

$$\ln \frac{W}{Wo} = -\lambda t \tag{2}$$

Donde Wo.—peso inicial de producto radioactivo

Llámase tiempo de vida media "τ", al tiempo necesario para que desaparezca la mitad del peso inicial del elemento radioactivo o sea:

$$\tau <=> W = \frac{Wo}{2} \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \tag{4}$$

Ahora bien, haciendo 4 lecturas de actividad radioactiva a espacios de tiempo fijos se tendrá:

$$t_n = t_1 + (n-1)\,\Delta t <=> W_n \qquad n = 1, 2, 3, 4. \tag{5}$$

Aplicando (5) a (2)

$$\ln \frac{W_n}{Wo} = -\lambda\,[t_1 + (n-1)\Delta t] \tag{6}$$

Si a la ecuación (6) se le llama término "n", el término "n+1" será:

$$\ln \frac{W_{n+1}}{Wo} = -\lambda\,[t_1 + n\Delta t] \tag{7}$$

Restando (7) de (6)

$$-\lambda\Delta t = \ln \frac{W_{n+1}}{W_n} \tag{8}$$

Con la ecuación (8) ya puede ser calculada λ, nada más que dicha ecuación está apoyada en dos puntos y la Geometría Proyectiva permite apoyarla en 4, como se verá más adelante, mejorando así la exactitud del cálculo de λ, del cual se puede obtener el valor del tiempo de vida media del elemento radiactivo ver ecuación (4).

Con objeto de demostrar que el argumento del logaritmo de la ecuación (8) es una razón anarmónica, se hace necesario la construcción del siguiente diagrama de proyección central:

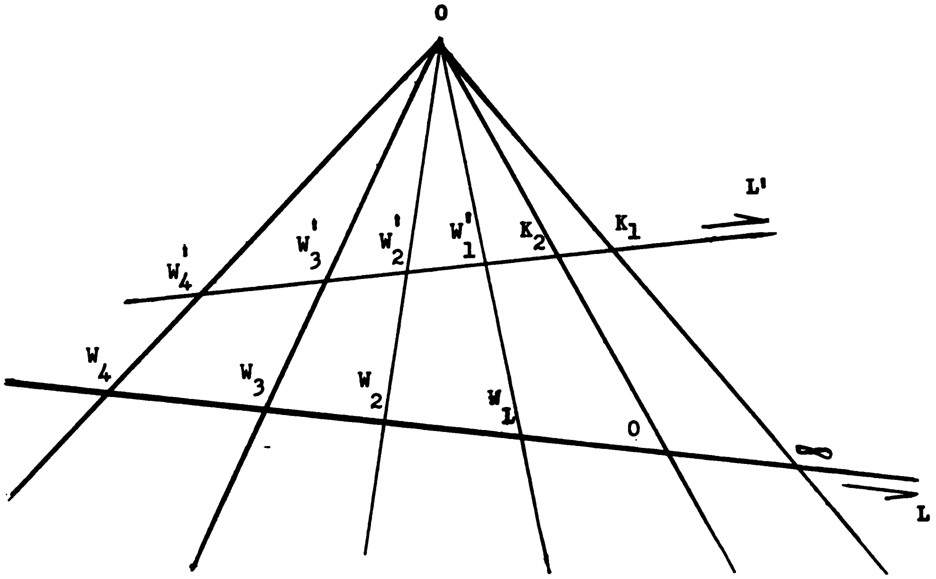


DIAGRAMA 1.

Aprovechando el Teorema de la conservación de la razón anarmónica en el diagrama 1, se encuentra una relación a la cual hemos llamado razón anarmónica básica "α_b"

$$\alpha_b = \frac{(K_2 - W'_{n+1})\,(K_1 - W'_n)}{(K_2 - W'_n)\,(K_1 - W'_{n+1})} = \lim_{\substack{K_2 \to 0 \\ K_1 \to \infty}} \frac{(K_2 - W_{n+1})\,(K_1 - W_n)}{(K_2 - W_n)\,(K_1 - W_{n+1})} \tag{9}$$

Sustituyendo límites en (9)

$$\alpha_b = \frac{W_{n+1}}{W_n} \qquad n = 1,2,3. \tag{9'}$$

Considerando la ecuación (9') y (8) se tendrá la siguiente expresión

$$-\lambda \Delta t = ln\, \alpha_b \tag{10}$$

Definamos una razón anarmónica interna para relacionarla con α_b y apoyar el cálculo de λ en cuatro puntos

$$\alpha_{in} = \frac{(W_3 - W_2)\,(W_4 - W_1)}{(W_2 - W_1)\,(W_4 - W_3)} = \frac{(W'_3 - W'_2)\,(W'_4 - W'_1)}{(W'_2 - W'_1)\,(W'_4 - W'_3)} \tag{11}$$

$$\alpha_{in} = \frac{W_2(\frac{W_3}{W_2} - 1)\ W_4(1 - \frac{W_1}{W_4})}{W_2(1 - \frac{W_1}{W_2})\ W_4(1 - \frac{W_3}{W_4})} \tag{12}$$

De (9′) se desprenden las tres siguientes ecuaciones:

$$\alpha_b = \frac{W_2}{W_1} \tag{13}$$

$$\alpha_b = \frac{W_3}{W_2} \tag{14}$$

$$\alpha_b = \frac{W_4}{W_3} \tag{15}$$

Multiplicando miembro a miembro (13), (14) y (15)

$$\alpha_b^3 = \frac{W_4}{W_1} \tag{16}$$

Sustituyendo (13), (14), (15) y (16) en (12) se tendrá:

$$\alpha_{in} = \frac{(\alpha_b - 1)\ (1 - \alpha_b^{-3})}{(1 - \alpha_b^{-1})\ (1 - \alpha_b^{-1})} \tag{17}$$

Efectuando las simplificaciones adecuadas se tiene:

$$\alpha_b^2 + (1 - \alpha_{in})\ \alpha_b + 1 = 0 \tag{18}$$

Dejando α_b

$$\alpha_b = \left(\frac{\alpha_{in} - 1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_{in} - 1}{2}\right)^2 - 1} \tag{19}$$

Combinado (19) y (10) se obtiene la expresión adecuada para el cálculo de "λ"

$$\lambda = \frac{-1}{\Delta t} \ln \left[\left(\frac{\alpha^{in} - 1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha^{in} - 1}{2}\right)^2 - 1}\right] \tag{20}$$

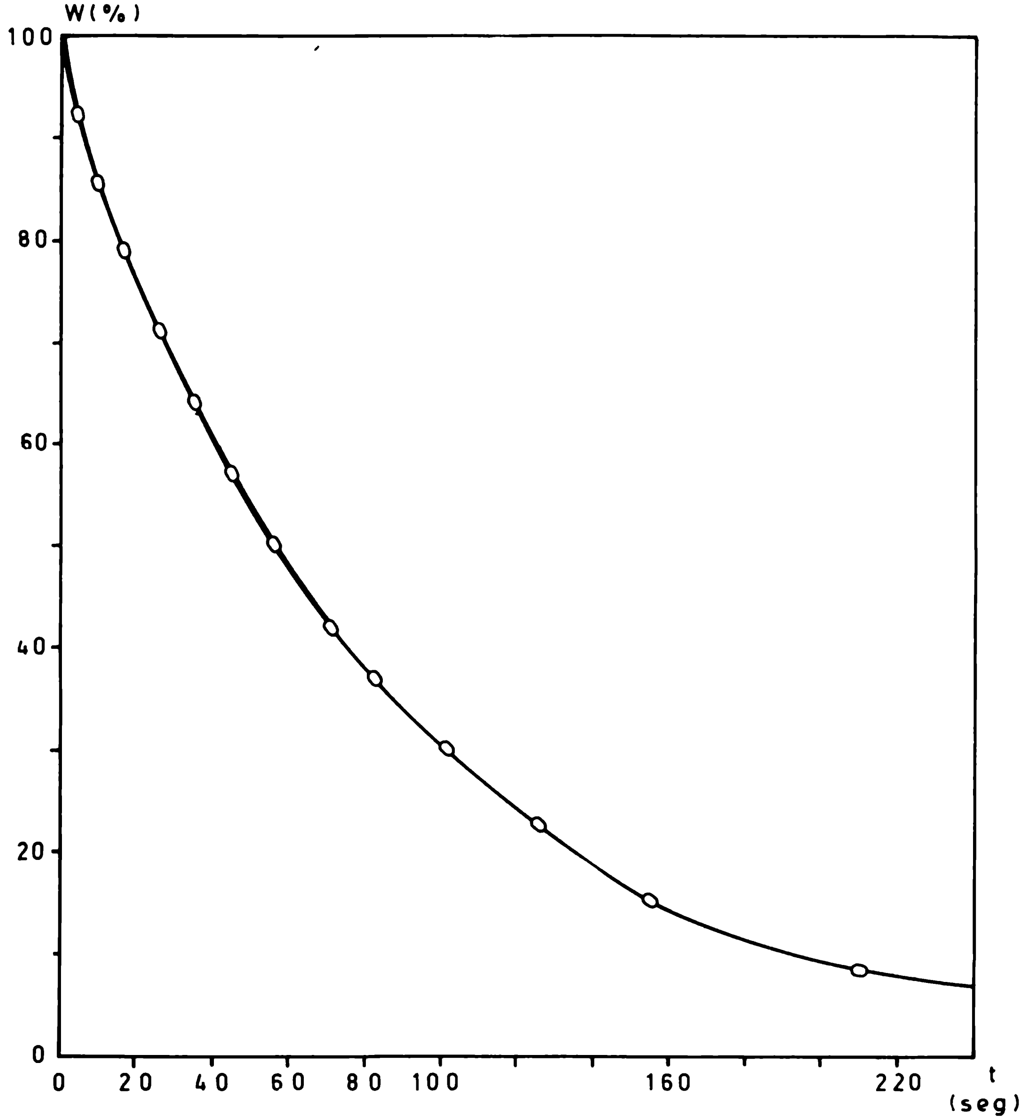
Para el cálculo del tiempo de vida media de un elemento radioactivo se combinan las ecuaciones (4) y (20)

$$\frac{\ln 2}{\tau} = \frac{-1}{\Delta t} \ln \left[\left(\frac{\alpha_{in} - 1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_{in} - 1}{2}\right)^2 - 1}\right] \tag{21}$$

$$\tau = -\frac{\Delta t \, ln\, 2}{ln\left[\left(\frac{\alpha_{in}-1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_{in}-1}{2}\right)^2 - 1}\right]} \tag{22}$$

III. APLICACION A DATOS EXPERIMENTALES

El tiempo de vida media del "torón $_{86}Tn^{220}$" reportado en la literatura es de 56 segundos,[1] con el Método propuesto en este trabajo se calculará el tiempo de



vida media a partir de los datos experimentales,[1] los cuales están representados en la figura 1. De la figura 1 se obtiene la siguiente Tabla:

Tabla 1 $\Delta t = 33$ segundos

Lectura	*t*	*W*(%)
1	33	67.0
2	66	44.3
3	99	30.3
4	132	21.4

Donde *t*.—tiempo de desintegración en segundos
W.—% en peso de elemento radioactivo

Sustituyendo los valores de la Tabla I en la ecuación (11), se obtiene:

$$\alpha_{in} = \frac{(30.3 - 44.3)\ (21.4 - 67.0)}{(44.3 - 67.0)\ (21.4 - 30.3)} = 3.1599$$

Ahora de la ecuación (22) se desprende el cálculo del tiempo de vida media

$$\tau = - \frac{33(0.69315)}{ln\left[\dfrac{3.1599 - 1}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{3.1599 - 1}{2}\right)^2 - 1}\right]}$$

$$\tau = - \frac{22.8739}{ln\ (1.0799 \pm 0.4076)}$$

Los dos resultados que suministra la ecuación anterior son:

$$\tau_1 = - 57.6 \text{ segundos (con el signo más)}$$
$$\tau_2 = 57.6 \text{ segundos (con el signo menos)}$$

El porciento de Desviación con respecto al valor reportado en la literatura [1] es el siguiente:

$$\%D = \left| \frac{56 - 57.6}{56.8} \times 100 \right| = 2.8\ \%$$

IV. CONCLUSIONES

El Método aportado en el presente estudio que se basa en Geometría Proyectiva, resultó adecuado, para determinar la vida media del torón ${}_{86}Tn^{220}$, ya que la desviación con respecto al Método de lectura directa fue de 2.8%.

REFERENCIAS

1. Harvey E. White: Física Moderna Universitaria. UTEHA, p. 648, 1965.
2. Sturtevant, J.: Amer. Chem. Soc., *59*:699, 1937.
3. Frampton, V. L., Evans, W. J. y Kuck, J. C.: Analytical Chemistry, *45*:356, 1973.
4. Ciurlizza, G. A. y Ruiz, M. C. M.: Acta Mexicana de Ciencia y Tecnología (en prensa).
5. Ciurlizza, G. A., Aldana, G. E. y Ruiz, M. C. M.: Rev. Soc. Quím., *17*:72, México, 1973.

RECONOCIMIENTO

Uno de los autores (A. C. G.) agradece a la S.E.D.I.C.T. (Sección de Especialización Docente e Investigación Científica y Tecnológica) su apoyo económico, el cual hizo posible el presente estudio.