Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 102-119

De los números poligonales a los números de Bernoulli

Fecha de recepción: Junio, 1997

Francisco Javier Peralta Coronado
Escuela Universitaria de Formación de Profesorado
Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España

Resumen. *En este trabajo se trata de calcular, por procedimientos elementales, la suma de las potencias p-ésimas de los n primeros números naturales. Para ello, se utiliza una metodología heurística basada en los siguientes principios: iniciar el proceso con un planteamiento en casos más simples, utilizar razonamientos de tipo geométrico para deducir identidades algebraicas y recurrir a la historia de la matemática (los números poligonales y piramidales, en este caso). Se llega así de un modo sencillo a la introducción de los números de Bernoulli.*

Abstract. *The aim of this work is to calculate, through elementary procedures, the addition of the p-th powers of the first natural numbers. We have used a heuristic methodology, based on the following principles: starting the process with posing in the simpler cases, usivã¿geometric reasoning to deduce algebraic identities, and resorting to the history of mathematics (polygonal and pyramidal numbers in this case). Thus, we can easily get to the introduction of Bernoulli's numbers.*

Introducción

El cálculo de la suma de los n primeros números enteros positivos 1, 2,..., n se puede efectuar con sólo tener conocimientos elementales de matemáticas; en cambio, para hallar la suma de los cuadrados, de los cubos o, en general, de las potencias p-ésimas de los mismos, se requiere conocer teorías más complejas. En este trabajo se van a ofrecer, precisamente, ciertas ideas para que los alumnos de los últimos cursos de bachillerato o también estudiantes de primer año de licenciatura en ciencias o ingeniería, guiados por su profesor, puedan calcular heurísticamente dichas sumas sin necesidad de recurrir a temas nuevos y relativamente elevados para algunos de esos niveles, como sería el estudio de las progresiones aritméticas de orden superior y de las diferencias finitas.

Como los números 1, 2,..., n están en progresión aritmética, su suma se podría obtener, sin más, a partir de la fórmula que da la suma de n términos consecutivos de ese tipo de progresiones. Trataremos de deducirla, sin embargo, por medio de procedimientos geométricos sencillos, pues con la generalización de estos últimos se darán los primeros pasos en pos de la resolución del problema propuesto.

Ya se ha mencionado la pretensión de que el alumno llegue a la solución utilizando una metodología heurística, de la que destacamos los aspectos siguientes: el hecho de que para resolver un problema pueda ser acertado intentar antes la resolución de

ón: Junio, 1997

ta Coronado
de Profesorado
Madrid, España

otros planteados de forma más sencilla, la conveniencia de emplear razonamientos geométricos elementales como recurso para deducir identidades algebraicas, la oportunidad de presentar en algún momento cuestiones relacionadas con la historia de la matemática (los números poligonales y piramidales en este caso), y el que quede constancia de la posibilidad de hacer un recorrido por diferentes cuestiones hasta llegar, con procedimientos muy simples, a conceptos pertenecientes a capítulos más elaborados de la matemática (los números de Bernoulli, que aparecerán al final de este trabajo).

Respecto al grado de dificultad del artículo, hemos de advertir que para su comprensión hay que estar familiarizado con las sucesiones, los números combinatorios, el símbolo sumatorio y el procedimiento de inducción. Digamos asimismo que, aunque para dar los primeros pasos se trabaja con razonamientos sencillos e intuitivos y con cálculos elementales, poco a poco los cálculos se van complicando por la necesidad de generalizar las relaciones algebraicas que se han ido obteniendo, lo que sucede desde el apartado 6 hasta el final del trabajo.

En todo caso, el trabajo no está destinado directamente a los alumnos para su lectura, sino dirigido a sus profesores; de él podrán tomar, si lo estiman oportuno, ciertas ideas que, convenientemente aderezadas, puedan serle útiles para proponerlas a algunos o a todos sus estudiantes de la manera que consideren más adecuada (en concreto, en la última parte del artículo podría no ser necesario exigir el rigor en todas las demostraciones, siendo suficiente en ocasiones con llegar a las conclusiones de una manera informal, después de observar lo que sucede en casos particulares).

1. CÁLCULO DE $1+2+...+n$ POR PROCEDIMIENTOS GEOMÉTRICOS

1.1. Como ya se ha indicado vamos a tratar de hallar la suma de los n primeros números enteros positivos con razonamientos de tipo geométrico.

Comencemos con un caso más sencillo: calcular, por ejemplo, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ (si llegamos a resolver geométricamente este caso particular, probablemente sea luego fácil pasar al caso general de n sumandos).

Daremos a los alumnos la siguiente indicación: considerar cada sumando como el área de un rectángulo, uno de cuyos lados sea *1*, y hacer una representación geométrica del problema. Posiblemente ello les conduzca a la Figura 1.

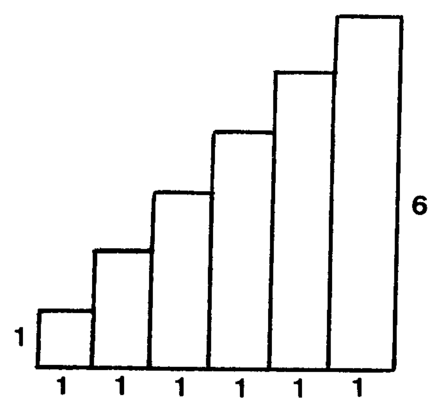

Figura 1

A continuación se les dirá que consideren un rectángulo en el cual se pueda inscribir la figura anterior, y que razonen después geométricamente. Seguramente llegarán a la construcción de las Figuras 2A ó 2B.

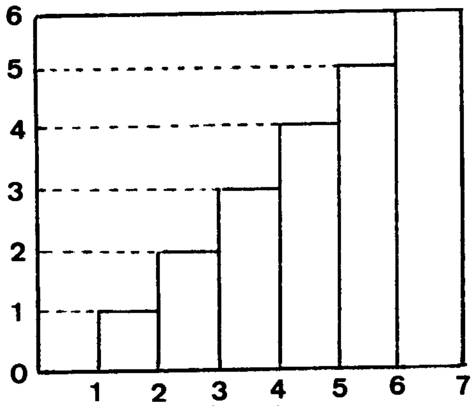

Figura 2A

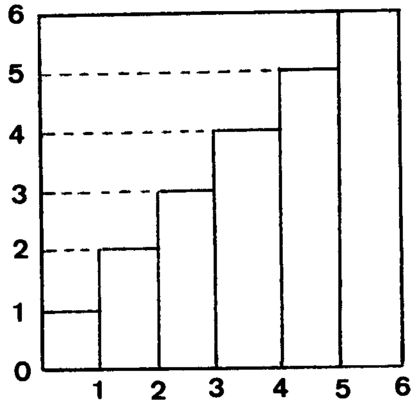

Figura 2B

En el primer supuesto, se deducirá fácilmente que $1 + 2 + ... + 6$ es la mitad del área del rectángulo de lados 6 y 7; esto es: $1 + 2 + ... + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$. Si se parte en cambio de la Figura 2B, se observa que el área del cuadrado de lado 6 se puede descomponer en: $(1 + 2 + ... + 6) + +(1 + 2 + ... + 5)$; por lo tanto: $6 \cdot 6 = 2(1 + 2 + ... + 6) - 6$, y de ahí $= 2(1 + 2 + ... + 6)$, que conduce al mismo resultado para $1 + 2 + ... + 6$ que el obtenido anteriormente.

El paso al caso general no debe ofrecer dificultad, y se llegará a que

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

1.2. Un método parecido al anterior, también geométrico, es el siguiente: se dibuja una cuadrícula 7×7 y, en ella, se raya el área correspondiente a la suma $1 + 2 + ... + 6$ (Figura 3).

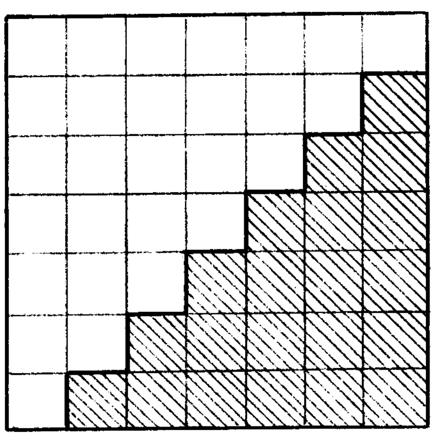

Figura 3

Por simetría, esa área también puede rayarse en la zona superior izquierda de la figura. Una y otra aparecen en la Figura 4.

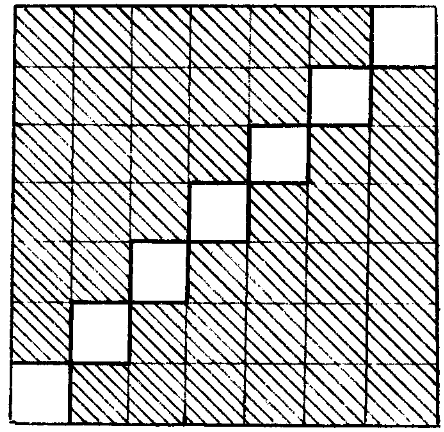

Figura 4

Por tanto, se tiene: $2 \cdot (1 + ... + 6) = 7 \cdot 7 - 7$; esto es, $1 + 2 + ... + 6 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$; que se generaliza fácilmente al caso de n sumandos.

1.3. Siguiendo con este tipo de razonamientos geométricos, pero centrado no en la suma, sino en cada uno de sus sumandos, rayemos el área correspondiente al sumando de valor k dentro de un cuadrado de lado $k + 1$ (Figura 5).

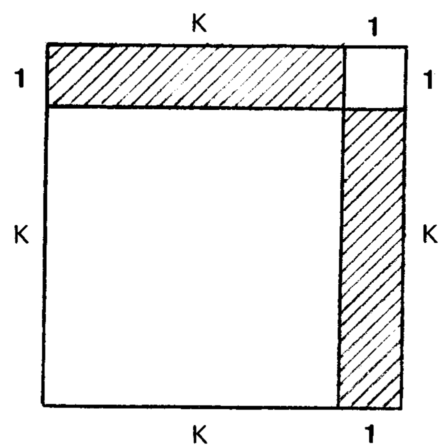

Figura 5

Sumando las áreas rayadas con el cuadrado superior derecho obtenemos $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ (en realidad, esta es la comprobación geométrica de que $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$).

Dando ahora sucesivamente a k los valores 1,2,...,n, se tiene:

$$2.1 + 1 = 2^2 - 1^2$$
$$2.2 + 1 = 3^2 - 2^2$$
$$2.3 + 1 = 4^2 - 3^2$$
$$- - - - - - - - - - - - -$$
$$2(n-1) + 1 = n^2 - (n-1)^2$$
$$2n + 1 = (n+1)^2 - n^2,$$

y sumando cada columna, se llega a: $2(1 + 2 + ... + n) + n = (n+1)^2 - 1^2$, que conduce directamente a la expresión

$$1 + 2 + ... + n = n\,(n+1)/2 \qquad (1).$$

1.4. Denotando, $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$, (1) puede expresarse: $S_1 = n(n+1)/2$.

Análogamente escribiremos, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$, y en general: $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + ... + n^p$.

2. LOS NÚMEROS POLIGONALES

2.1. Los babilonios ya estaban familiarizados con los **números poligonales** ([1], pág. 56; [3], pág. 129), que fueron obtenidos jugando con piedrecillas colocadas en forma de polígonos; y posteriormente han sido estudiados por diferentes matemáticos a lo largo de la historia, como Pitágoras, Diofanto Fermat y Gauss.

Según los polígonos que se formen, se originan los distintos números poligonales: los números **triangulares, cuadrados, pentagonales,..., n-agonales,...;** los tres primeros son representados respectivamente en las Figuras 6, 7 y 8.

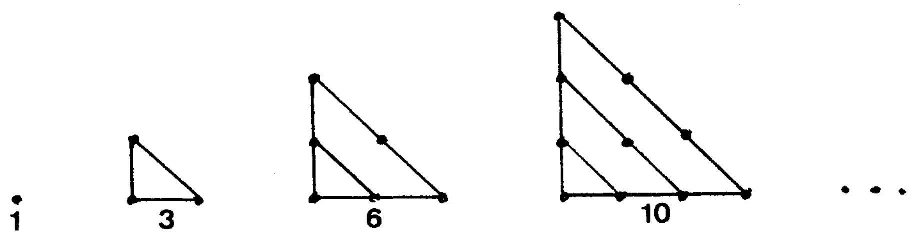

Figura 6

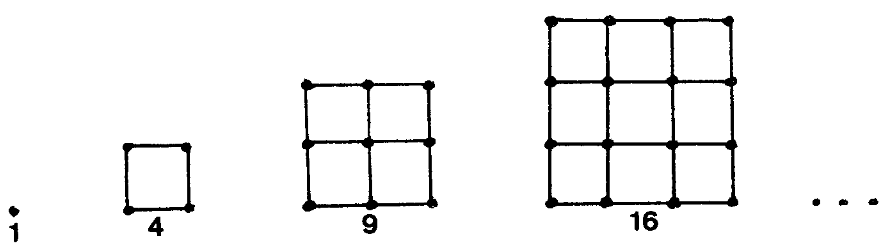

Figura 7

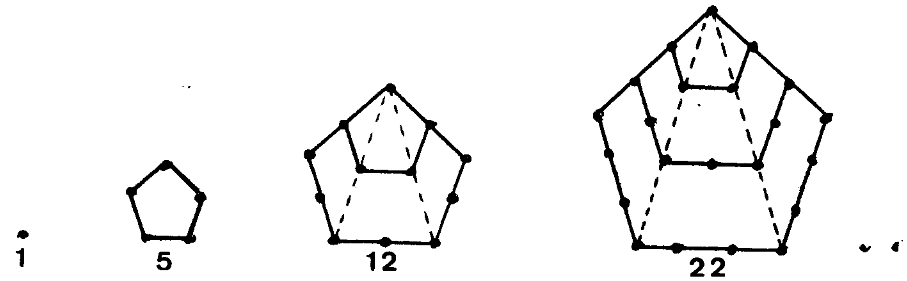

Figura 8

2.2. Tratemos de hallar la expresión de los términos generales de las sucesiones que los definen, esto es, de:

$$x'_n: 1, 3, 6, 10, ... ; \quad y'_n: 1, 4, 9, 16, ... ; \quad z'_n: 1, 5, 12, 22, ... \qquad (2).$$

Ninguna de dichas sucesiones es una progresión aritmética, ya que las diferencias entre cada dos términos consecutivos no son constantes, sino 2, 3, 4, ... en la primera; 3, 5, 7, ... en la segunda; y 4, 7, 10, ... en la tercera. Es decir, en las sucesiones (x'_n), (y'_n) y (z'_n), las diferencias entre cada dos términos consecutivos forman una progresión aritmética (de diferencias 1, 2 y 3, respectivamente).

Si en cada una de tales progresiones aritméticas añadimos un primer término igual a 1, se siguen teniendo tres progresiones aritméticas, que son las siguientes:

$$x_n: 1, 2, 3, 4, ... ; \quad y_n: 1, 3, 5, 7, ... ; \quad z_n: 1, 4, 7, 10, ... \qquad (3).$$

Es evidente asimismo que $x'_1 = x_1, x'_2 = x_1 + x_2, x'_3 = x_1 + x_2 + x_3, ... ; y'_1 = y_1, y'_2 = y_1 + y_2, y'_3 = y_1 + y_2 + y_3, ... ; z'_1 = z_1, z'_2 = z_1 + z_2, z'_3 = z_1 + z_2 + z_3, ...$. Por tanto, cada una de las sucesiones de (2) es, respectivamente, la sucesión de las sumas parciales de cada una de (3).

Ahora bien, los términos generales de las progresiones aritméticas (x_n), (y_n) y (z_n) son: $x_n = n$, $y_n = 2n - 1$, $z_n = 3n - 2$, por lo que para hallar los términos generales de las sucesiones (x'_n), (y'_n), (z'_n), bastará con calcular la suma de los n primeros términos de cada una de las primeras. Se tienen así:

$$x'_n = n(n + 1)/2, \quad y'_n = n^2, \quad z'_n = n(3n - 1)/2, ... \qquad (4).$$

Aunque, evidentemente, no es necesario conocer la fórmula que da la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética para poder calcular x'_n, y'_n, z'_n, sino que basta para ello con saber cuánto vale $1 + 2 + ... + n$. En efecto: si $u_n = an + b$, entonces

$$u_1+u_2+...+u_n=(a+b)+(2a+b)+...+(na+b)=a(1+2+...+n)+bn=an(n+1)/2+bn.$$

2.3. Los números poligonales gozan de muchas propiedades. Aunque no se necesiten para el resto de este trabajo, parece obligado citar alguna:

a) La suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado ([3], pág. 130).

b) Si se multiplica por 8 un número triangular y luego se le suma una unidad, se obtiene un número cuadrado (resultado debido a Diofanto) ([4], pág. 141).

c) Todo entero positivo es un número triangular o la suma de 2 ó 3 números triangulares; resultado establecido por Fermat ([2], pág 194). Su generalización (todo entero positivo es n-agonal o la suma de $2, 3, \ldots,$ ó n números n-agonales), debida a Gauss, fue finalmente demostrada por Cauchy ([5], pág. 103).

a) y b) son fáciles de probar, por lo que podrían ser propuestas sus demostraciones como ejercicios; c) en cambio, es más difícil, y la omitiremos.

3. LOS NÚMEROS PIRAMIDALES

3.1. Hallando las sucesiones de las sumas parciales de las sucesiones de números poligonales: $x''_n = x'_1 + \ldots + x'_n$, $y''_n = y'_1 + \ldots + y'_n$, $z''_n = z'_1 + \ldots + z'_n, \ldots$, se obtienen las sucesiones de los números piramidales:

$$x''_n\text{: } 1, 4, 10, 20, \ldots \text{ ; } y''_n\text{: } 1, 5, 14, 30, \ldots \text{ ; } z''_n = 1, 6, 18, 40, \ldots \text{ ; } \ldots \qquad (5).$$

Las tres primeras sucesiones vienen representadas respectivamente en la Figuras 9, 10 y 11.

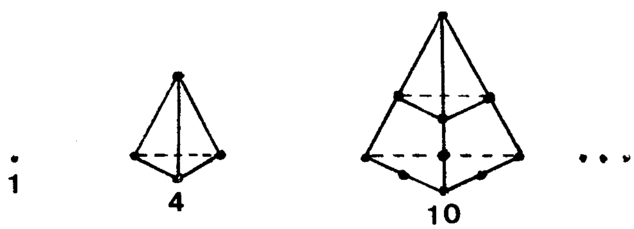

Figura 9

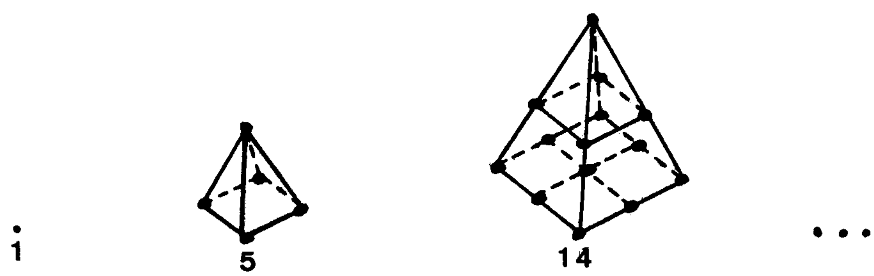

Figura 10

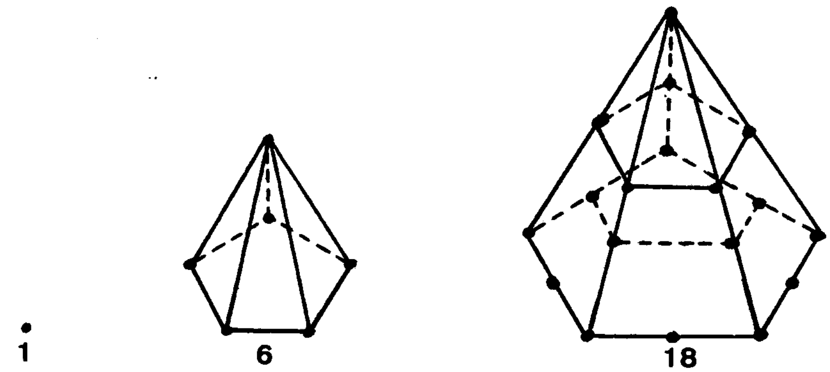

Figura 11

3.2. El cálculo del término general de cada una de estas sucesiones ofrece dificultades, ya que se trata de hallar las sumas como:

$$x''_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)/2, \quad y''_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad z''_n = \sum_{k=1}^{n} k(3k-1)/2, \ldots \qquad (6),$$

lo que no es posible hacer con los conocimientos que se tienen sobre progresiones aritméticas.

En efecto, la fórmula de la suma de n términos de una progresión aritmética permite efectuar sumas del tipo: $\sum_{k=1}^{n} (ak + b)$, mientras que ahora hay que realizar sumas de la forma $\sum_{k=1}^{n} (ak^2 + bk + c)$. Sin embargo, así como para calcular las primeras es suficiente con saber cuánto vale $S_1 = 1 + 2 + \ldots + n$, para hallar las segundas bastará con conocer el valor de $S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, así como de S_1, ya que evidentemente $\sum_{k=1}^{n} (ak^2 + bk + c) = aS_2 + bS_1 + cn$.

El problema se reduce, pues, a calcular $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, para lo que trataremos de generalizar los métodos empleados en el apartado 1 para hallar $1 + 2 + \ldots + n$.

3.3. La Figura 5 expresa cómo se modifica el área de un cuadrado de lado k al aumentar el lado en una unidad. Ahora intentaremos ver qué sucede con el volumen de un cubo de aristas OA, OB, OC de longitud k, al incrementar la longitud de cada arista en una unidad, y convertirse en el cubo de aristas OA', OB', OC', de longitud $k + 1$ (Figura 12).

Se observa en dicha figura que el nuevo volumen, $(k+1)^3$, excede del inicial, k^3, en el volumen de siete prismas rectangulares. Son los siguientes: tres de ellos tienen una base cuadrada de área k^2, y altura 1 (el de aristas $A'D$, $A'E$, $A'A$, el de aristas $B'F$, $B'G$ y $B'B$, y el de aristas $C'H$, $C'I$ y $C'C$); otros tres tienen una base cuadrada de área 1, y altura k (el de aristas JH, JD y HK, el de aristas LI, LF y LQ, y el de aristas ME, MG y MN); y el último es un cubo cuya arista mide la unidad (el de aristas QK, QP y PN). Por tanto: $3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3$, que no hace sino expresar cuál es el cubo de un binomio.

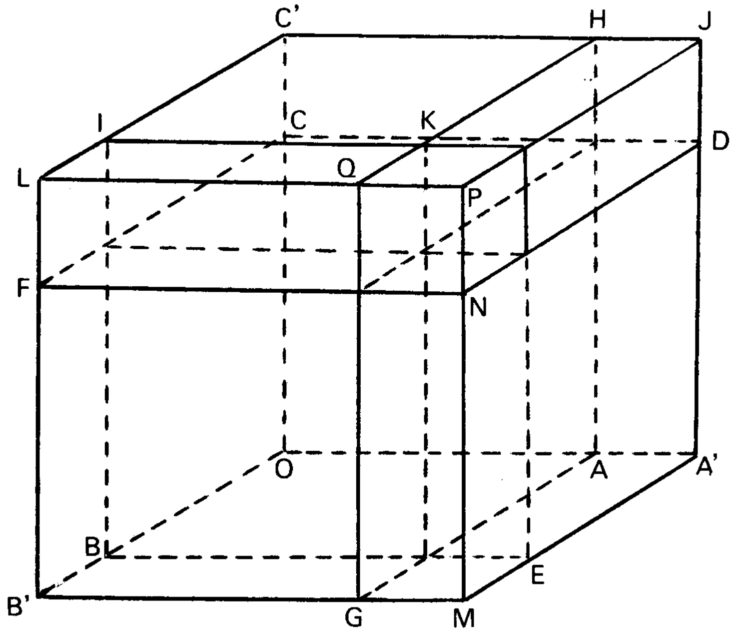

Figura 12

3.4. Por analogía con el método utilizado en 1.3., demos a k los valores 1, 2,..., n:

$$3.1^2 + 3.1 + 1 = 2^3 - 1^3,$$
$$3.2^2 + 3.2 + 1 = 3^3 - 2^3,$$
$$3.3^2 + 3.3 + 1 = 4^3 - 3^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = n^3 - (n-1)^3,$$
$$3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3.$$

Sumando las columnas se tiene:; esto es:

$$3S_2 = n^3 + 3n^2 + 3n - 3n\,(n+1)/2 - n = (2n^3 + 3n^2 + n)/2,$$

de donde se deduce que

$$S_2 = (2n^3 + 3n^2 + n)/6 \qquad (7).$$

Sustituyendo en (6) se tiene:

$$x''_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}\right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{12} + n\,\frac{(n+1)}{4} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6},$$

$$y''_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},k$$

$$z''_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3k^2}{2} - \frac{k}{2}\right) = 3\,\frac{(2n^3 + 3n^2 + n)}{12} - n\,\frac{(n+1)}{4} = \frac{n^3 + n^2}{2},$$

o lo que es lo mismo:

$$x''_n = n(n+1)(n+2)/6,\ y''_n = n(n+1)(2n+1)/6,\ z''_n = n^2(n+1)/2, \ldots \qquad (8).$$

3.5. Otra forma de calcular $\sum_{k=1}^{n} k^2$ es la siguiente: la superficie que aparece en la Figura 2 A puede considerarse que es suma de dos superficies: un cuadrado de lado 6, y un rectángulo de lados 1 y 6; por tanto, $6^2 + 6 = 2(1 + 2 + \ldots + 6)$. Generalizando este hecho, se tiene: $n^2 + n = 2S_1$ (en realidad se puede llegar a lo mismo, como es obvio, partiendo de (1)). Dando a n los valores 1, 2, ... , n, y posteriormente sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1^2 + 1 &= 2.1 \\ 2^2 + 2 &= 2.(1 + 2) \\ 3^2 + 3 &= 2.(1 + 2 + 3) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ n^2 + n &= 2.(1 + 2 + \ldots + n); \end{aligned}$$

luego

$$S_2 + S_1 = 2.(1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + (n-1)2 + n1) = 2.(1(n-1) + 1 + 2(n-2) + 2 + 3(n-3) + 3 + \ldots + n(n-n) + n) = 2(S_1 + nS_1 - S_2).$$

En consecuencia: $3S_2 = (2n + 1)S_1$, que nos conduce de nuevo a (7).

4. LOS NÚMEROS CUATRIDIMENSIONALES

4.1. A partir de las sucesiones de las sumas parciales de las sucesiones de números piramidales se obtienen los números cuatridimensionales que no tienen representación geométrica. Las sucesiones que los definen son las siguientes:

$$x'''_n: 1, 5, 15, 25, \ldots;\quad y'''_n: 1, 6, 20, 50, \ldots;\quad z'''_n: 1, 7, 25, 65, \ldots \qquad (9).$$

Sus términos generales correspondientes, según (8), serán:

$$x'''_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)/6,\ y'''_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(2k+1)/6,\ z'''_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)/2 \qquad (10);$$

y para calcularlos será preciso conocer previamente S_3.

Dicha suma la obtendremos generalizando los procedimientos seguidos en 3.4. y en 3.5., lo que veremos a continuación de forma resumida.

4.2. Dando a k los valores 1, 2,..., n en la expresión: $4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = (k+1)^4 - k^4$, y sumando, se llega a: $4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = (n+1)^4 - 1^4$.

Sustituyendo S_2 y S_1 por sus valores dados en (7) y (1), respectivamente, y operando, se obtiene:

$$S_3 = (n^4 + 2n^3 + n^2)/4 \qquad (11).$$

Sustituyendo por fin en (10) se llega a:

$$x'''_n = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{6}\ ((n^4 + 2n^3 + n^2)/4 + (2n^3 + 3n^2 + n)/2 +$$

$n(n + 1)) = (n^4 + 6n^3 + 1\ 1n^2 + 6n)/24$.

Análogamente:

$$y'''_n = (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n)/12, \quad z'''_n = (3n^4 + 10n^3 + 9n^2 + 2n)/24.$$

O si se prefiere:

$$x'''_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)/24, \quad y'''_n = n(n + 1)^2(n + 2)/12,$$
$$z'''_n = n(n + 1)(n + 2)(3n + 1)/24,... \qquad (12).$$

4.3. De (7) se deduce que $2n^3 + 3n^2 + n = 6S_2$, y dando a n los valores 1, 2,..., n y sumando:

$2S_3 + 3S_2 + S_1 = 6(1^2\ n + 2^2(n - 1) + 3^2(n - 2) + ... + (n - 1)^2\ 2 + n^2) = 6(1^2(n - 1) + 1^2 + 2^2(n - 2) + 2^2 + 3^2(n - 3) + 3^2 + ... + n^2(n - n) + n^2) = 6\ (S_2 + nS_2 - S_3)$.

De ahí se despeja S_3, que nos lleva de nuevo a (11).

4.4. En el caso concreto de S_3 hay además un procedimiento muy sencillo para su cálculo. Para su obtención por los alumnos se puede decir simplemente que vayan efectuando la suma para los primeros valores de n, y que traten de obtener regularidades. Así:

$$1^3 = 1,\ 1^3 + 2^3 = 9,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100,... .$$

Se observa que los segundos miembros son cuadrados: ¿de quiénes?. No es difícil llegar a que:

$$9 = 3^2 = (1 + 2)^2,\ 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2,\ 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$$

Parece deducirse por tanto que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$, lo que efectivamente puede probarse fácilmente por inducción, y no creemos necesario hacer.

Como $1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2$, se tiene por fin que $S_3 = n^2(n + 1)2/4$, que coincide con la expresión obtenida en (11).

5. LOS NÚMEROS POLITOPALES

5.1. Hallando las sucesiones de las sumas parciales de las sucesiones de términos generales $x_n = n$, $y_n = 2n - 1$, $z_n = 3n - 2$,..., se obtuvieron las sucesiones (x'_n), (y'_n), (z'_n),... definidas en (4); a partir de éstas, y siguiendo el mismo proceso, se llegó a las sucesiones (x''_n), (y''_n), (z''_n),..., cuyos términos generales vienen expresados en (8);

y de éstas se consiguieron las (x'''_n), (y'''_n), (z'''_n),..., definidas por (12). Evidentemente este proceso puede generalizarse todas las veces que se desee, para obtener los números **politopales**.

Así como las sucesiones de partida tenían su representación en la recta, los números poligonales podían representarse en el plano, los piramidales en el espacio, etc., los números **p-topales** (o politopales de dimensión p) admitirán su representación en el espacio de p dimensiones.

Por otro lado, para hallar el término general de las sucesiones de números poligonales era fundamental saber el valor de $S_1 = 1 + 2 + ... + n$, el término general de las sucesiones de números piramidales se obtenía asimismo a partir de S_2, y así sucesivamente. Por tanto, el cálculo del término general de las sucesiones de números $(p + 1)$-topales descansará en el conocimiento del valor de S_p, $p \in N^*$, que es a lo que nos vamos a dedicar en los apartados siguientes. Para ello trataremos de generalizar los métodos utilizados en 3.4. y 3.5. para hallar S_2, que asimismo fueron empleados en 4.2. y 4.3. para obtener S_3.

6. CÁLCULO DE S_p

6.1. Primer procedimiento.

De $(k + 1)^{p+1} = k^{p+1} + (p + 1)k^p + \binom{p+1}{2}k^{p+1} + ... + \binom{p+1}{p}k + 1$,

se tiene: $(p + 1)k^p + \binom{p+1}{2}k^{p-1} + ... + \binom{p+1}{p}k + 1 = (k + 1)^{p+1} - k^{p+1}$.

Dando a k los valores 1, 2,..., n, y sumando, se llega a:

$$(p + 1)S_p + \binom{p+1}{2}S_{p-1} + ... + \binom{p+1}{p}S_1 + n = (n + 1)^{p+1} - 1,$$

Por tanto: $S_p = \dfrac{1}{p+1}\left[(n+1)^{p+1} - n - 1 - \binom{p+1}{2}S_{p-1} - ... - \binom{p+1}{p}S_1\right]$,

o si se prefiere:

$$S_p = \frac{1}{p+1}\left[(n + 1)^{p+1} - (n + 1) - \sum_{j=2}^{p}\binom{p+1}{j}S_{p-j+1}\right] \qquad (13),$$

igualdad que se conoce con el nombre de "Fórmula de Euler-Maclaurin".

6.2. Segundo procedimiento.

Se tenían: $S_1 = n(n + 1)/2$, $S_2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$, $S_3 = n^2(n + 1)^2/4$, luego S_{p-1} será un polinomio en n de grado p:

$$S_{p-1} = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_0.$$

Damos a n los valores 1, 2,..., n:

$a_p\, 1^p + a_{p-1}\, 1^{p-1} + ... + a_1\, 1 + a_0 = 1^{p-1},$

$a_p\, 2^p + a_{p-1}\, 2^{p-1} + ... + a_1\, 2 + a_0 = 1^{p-1} + 2^{p-1},$

$a_p\, 3^p + a_{p-1}\, 3^{p-1} + ... + a_1\, 3 + a_0 = 1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1},$

. . . .

$a_p\, n^p + a_{p-1}\, n^{p-1} + ... + a_1\, n + a_0 = 1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + ... + n^{p-1}.$

Sumando cada columna:

$a_p S_p + a_{p-1} S_{p-1} + ... + a_1 S_1 + a_0\, n = 1^{p-1}\, n + 2^{p-1}\, (n-1) + 3^{p-1}\, (n-2) + ... + (n-1)^{p-1}\, 2 + n^{p-1} = 1^{p-1}(n-1) + 1^{p-1} + 2^{p-1}(n-2) + 2^{p-1} + 3^{p-1}(n-3) + 3^{p-1} + ... + (n-1)^{p-1}(n-(n-1)) + (n-1)^{p-1} + n^{p-1}(n-n)^{p-1} + n^{p-1}(n-n) + n^{p-1} = S_{p-1} + nS_{p-1} - S_p.$

Por tanto: $S_p = \dfrac{1}{1+a_p}[(n+1-a_{p-1})S_{p-1} - a_{p-2}S_{p-2} - ... - a_1S_1 - a_0n],$

o si se prefiere:

$$S_p = \frac{1}{1+a_p}\left[(n+1-a_{p-1})S_{p-1} - \sum_{j=2}^{p-1} a_{p-j}S_{p-j} - a_0 n\right] \qquad (14).$$

6.3. Como puede observarse, para hallar S_p, tanto a partir de (13) como de (14), es preciso conocer previamente $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$.

Por ejemplo, calculemos S_4 (a partir de S_1, S_2 y S_3):

De (13) se deduce:

$$S_4 = \frac{1}{5}\left[(n+1)5 - (n-1) - \binom{5}{2}S_3\binom{5}{3}S_2 - \binom{5}{4}S_1\right] = \frac{1}{5}\,[n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 - 10n^2(n+1)^2/4 - 10n(n+1)(2n+1)/6 - 5n(n+1)/2]$$

y operando se llega a:

$$S_4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)/30 \qquad (15).$$

Mediante (14) se tiene:

$S_4 = \dfrac{1}{1+a_4}[(n+1-a_3)S_3 - a_2S_2 - a_1S_1 - a_0n]$, siendo $S_3 = (n^4 + 2n^3 + n^2)/4$, y, por tanto: $a_4 = 1/4$, $a_3 = 1/2$, $a_2 = 1/4$, $a_1 = a_0 = 0$. En consecuencia:

$S_4 = \dfrac{1}{1+1/4}\ [(n + 1/2).(n^4 + 2n^3 + n^2)/4 - 1/4.(2n^3 + 3n^2 + n)/6]$ que conduce de nuevo a (15).

6.4. Utilizando (13) ó (14) se obtienen análogamente

$S_1 = n^2/2 + n/2,$
$S_2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6,$
$S_3 = n4/4 + n^3/2 + n^2/4,$
$S_4 = n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30,$
$S_5 = n^6/6 + n^5/2 + 5n^4/12 - n^2/12,$
$S_6 = n^7/7 + n^6/2 + n^5/2 - n3/6 + n/42,$
$S_7 = n^8/8 + n^7/2 + 7n^6/12 - 7n^4/24 + n^2/12,$
$S_8 = n^9/9 + n^8/2 + 2n^7/3 - 7n^5/16 + 2n^3/9 - n/30,$
$S_9 = n^{10}/10 + n^9/2 + 3n^8/4 - 7n^6/10 + n^4/2 - n^2/2,$
. . . .

7. PROPIEDADES DE S_p

De las expresiones de S_1, S_2, S_3,... obtenidas en 6.4., y de la más general de S_p expuesta en (13), se deducen las siguientes propiedades:

7.1. S_p es un polinomio en n de grado $p + 1$ y sin término independiente; o sea: $S_p = c_0 (p)n^{p+1} + c_1 (p)n^p + ... + c_p (p)n$ (15).

(Cuando no haya lugar a confusión escribiremos simplemente c_k en vez de c_k (p)).

En efecto: S_1 no tiene término independiente; admitamos que eso mismo lo cumplen S_2, ,..., S_{p-1} , y veamos que también lo verifica S_p.

De (13) se deduce que S_p es de grado $p + 1$. Además, como ningún S_{p-j+1} tiene término independiente, el que podría aparecer en S_p provendría del desarrollo de $(n + 1)^{p+1} - (n + 1)$, que es nulo.

7.2. $c_0 (p) = 1/(p + 1)$.

Es consecuencia de que el coeficiente de n^{p+1} en el segundo miembro de (13) es $1/(p + 1)$.

7.3. $c_1 (p) = 1/2$.

Se observa que el coeficiente de n^p en el segundo miembro de (13) es $1/(p + 1)$ multiplicado por la diferencia entre el coeficiente de n^p en el desarrollo de $(n + 1)^{p+1}$ y el coeficiente de n^p en S_{p-1} (esto es, $c_0 (p - 1)$); es decir:

$$c_1(p) = \frac{1}{p+1}\left[(p + 1) - \binom{p+1}{2}\frac{1}{p}\right] = \frac{1}{2}.$$

7.4. $c_2 (p) = p/12$.

Se demostrará por inducción.

Evidentemente se cumple para $p = 2$, pues $c_2 (2) = 1/6$. Supongamos que se cumple para 3, 4,..., $p - 1$, y probémoslo para p.

El coeficiente de n^{p-1} del segundo miembro de (13) es 1/(p + 1) multiplicado por la diferencia entre el coeficiente de n^{p-1} en el desarrollo de $(n + 1)^{p+1}$ y la suma de los coeficientes de n^{p-1} en S_{p-1} (esto es, $c_1(p-1)$) y en S_{p-2} (o sea, $c_0(p-2)$). Su coeficiente será por tanto:

$$c_2(p) = \frac{1}{p+1}\left[\binom{p+1}{2} - \binom{p+1}{2}\frac{1}{2} - \binom{p+1}{3}\frac{1}{p-1}\right] = \frac{p}{12}.$$

7.5. $c_{2k+1}(p) = 0, k \geq 1, p \geq 3$.

Ahora veremos únicamente que $c_3(p) = 0$; en 8.3. se probará que $c_5 = c_7 = ... = 0$.

Demostremos por inducción que efectivamente el coeficiente de n^{p-2} en S_p es cero. Es evidente que se cumple para $p = 3$. Admitámoslo cierto para $4, 5, ..., p-1$.

El coeficiente de n^{p-2} en el segundo miembro de (13) es $1/(p+1)$ multiplicado por la diferencia entre el coeficiente de n^{p-2} en el desarrollo de $(n+1)^{p+1}$ y la suma de los coeficientes de los términos en n^{p-2} en S_{p-1} (esto es, $c_2(p-1)$), en S_{p-2} (o sea, $c_1(p-2)$), y en S_{p-3} (es decir, $c_0(p-3)$). Por tanto:

$$c_3(p) = \frac{1}{p+1}\left[\binom{p+1}{3} - \binom{p+1}{2}\frac{p-1}{12} - \binom{p+1}{3}\frac{1}{2} - \binom{p+1}{4}\frac{1}{p-2}\right] = 0.$$

7.6. S_p es un polinomio en n de grado $p+1$, sin término independiente, y que tampoco tiene términos de grados p-2, p-4, p-6,... ($p \geq 3$).

Es consecuencia de lo anterior.

Resulta por tanto que S_p tiene términos en n^{p+1}, n^p y n^{p-1}, y, a partir de este último, el grado de los términos siguientes va decreciendo de dos en dos hasta llegar al último, que será en n^2 si p es impar, y en n si p es par.

7.7. $c_0(p) + c_1(p) + ... + c_p(p) = 1$ (16).

Evidentemente se cumple para $p = 2$ (y $p = 3, 4, ..., 9$, según 6.4.). Supongamos que es cierto para $3, 4, ..., p$-1, y vamos a demostrarlo para p. Primero observamos que:

$$c_0(p)n^{p+1} + c_1(p)n^p + c_2(p)n^{p-1} + ... + c_p(p)n = \frac{1}{p+1}\Big[(n+1)^{p+1} -$$

$$(n+1) - \binom{p+1}{2}(c_0(p-1)n^p + c_1(p-1)n^{p-1} + c_2(p-1)n^{p-2} + ... +$$

$$c_{p-1}(p-1)n) - \binom{p+1}{3}(c_0(p-2)n^{p-1} + c_1(p-2)n^{p-2} + c_2(p-2)n^{p-3} + ... +$$

$$c_{p-2}(p-2)n) - ... - \binom{p+1}{p}(c_0(1)n^2 + c_1(1)n)\Big].$$

Por tanto:

$$c_0(p) + c_1(p) + ... + c_p = \frac{1}{p+1}\Big[1 + \binom{p+1}{1} + \binom{p+1}{2} + ... + \binom{p+1}{p} - 1 -$$

$$\binom{p+1}{2}(c_0(p-1) + c_1(p-1) + \ldots + c_{p-1}(p-1)) - \binom{p+1}{3}(c_0(p-2) +$$

$$c_1(p-2) + \ldots + c_{p-2}(p-2)) - \ldots - \binom{p+1}{p}(c_0(1) + c_1(1))\Bigg].$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción, $c_0(k) + c_1(k) + \ldots + c_k(k) = 1$ si $1 \leq k \leq p-1$, luego

$$c_0(p) + c_1(p) + \ldots + c_p(p) = \left[1 + \binom{p+1}{1} + \binom{p+1}{2} + \ldots + \binom{p+1}{p} -\right.$$

$$\left. 1 - \binom{p+1}{2} - \binom{p+1}{3} - \ldots - \binom{p+1}{p}\right] = 1, \text{ c.q.d.}$$

8. LOS NÚMEROS DE BERNOULLI

8.1. Se ha visto en 7.4. que $c_2(p) = p/12$; esto es: $c_2(p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\binom{p}{1}$.

De las expresiones de S_4, S_5, S_6,... en 6.4. se deduce que: $c_4(4) = -1/30$, $c_4(5) = -1/12$, $c_4(6) = -1/6$, $c_4(7) = -7/24$; que bien podrían escribirse así:

$$c_4(4) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{4}{4},\ c_4(5) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{10}{4},\ c_4(6) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{20}{4},\ c_4(7) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{35}{4}, \ldots .$$

Parece ser, por tanto, que $c_4 = -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4}\binom{p}{3}$ (se entiende que c_4 es $c_4(p)$), lo que efectivamente es fácil de probar.

Sea ahora (b_k) la sucesión: $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, $b_k = \dfrac{k \cdot c_k}{\binom{p}{k-1}}$, $k \geq 2$ (17).

Se deduce entonces que $b_2 = 1/6$, $b_3 = 0$, y que $b_4 = -1/30$.

8.2. $\sum_{k=0}^{p} b_k \binom{p+1}{k} = 0, p \geq 1$ (18).

En efecto. En virtud de (16), y teniendo en cuenta 7.2. y 7.3., se tiene:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1} = 1,$$

o lo que es lo mismo: $\sum_{k=2}^{p} \frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1} = \frac{p-1}{2(p+1)}$, o también: $\sum_{k=2}^{p} b_k \frac{p+1}{k}\binom{p}{k-1} = \frac{p-1}{2}$.

Ahora bien, $\frac{p+1}{k}\binom{p}{k-1} = \frac{p+1}{k} \cdot \frac{p!}{(k-1)!\,(p-k+1)!} = \frac{(p+1)!}{k!\,(p+1-k)!} = \binom{p+1}{k}$,

por lo que: $\sum_{k=2}^{p} b_k \binom{p+1}{k} = \frac{p-1}{2}$.

Teniendo en cuenta por último que $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{p} b_k \binom{p+1}{k} = 1 - \frac{1}{2}(p+1) + \sum_{k=2}^{p} b_k \binom{p+1}{k} = 1 - \frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{2} = 0,$$

c.q.d.

8.3. Los términos de la sucesión (b_k) son los llamados números de Bernoulli, que aparecen al desarrollar en serie de potencias la función $f(x) = x/(e^x - 1)$ (véanse por ejemplo [6], pág. 71 y 75; [7], pág. 706).

Los números de Bernoulli están unívocamente determinados por $b_0 = 1$ y la relación (18). En efecto:

Si, $p = 1$, $0 = b_0 \binom{2}{0} + b_1 \binom{2}{1} = 1 + 2\,b_1$, luego $b_1 = -1/2$;

si, $p = 2$, $0 = b_0 \binom{3}{0} + b_1 \binom{3}{1} + b_2 \binom{3}{2} = 1 - 3/2 + 3\,b_2$, luego $b_2 = 1/6$;

etc.

También se comprueba fácilmente que $b_3 = 0$, $b_5 = 0$, $b_7 = 0$, etc.; y, en general: $b_{2k+1} = 0$, $k \geq 1$ ([6], pág. 165; [7], pág. 706).

De esto último, y de la relación (17) que liga b_k con c_k, se deduce asimismo que $c_{2k+1} = 0$, $k \geq 1$, lo que prueba lo que se estableció en 7.5., según se había enunciado.

8.4. Como consecuencia de lo visto en el apartado 7 y en este mismo, se obtiene de nuevo otra expresión para S_p:

$$S_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1} n^{p-k+1} \qquad (19).$$

La ventaja de la misma radica en que para hallar S_p sólo hay que conocer previamente b_1 y los demás números de Bernoulli de subíndice par (los de subíndice impar son cero), que se obtienen fácilmente de ser $b_0 = 1$ y de la relación (18); lo que permite calcular S_p sin necesidad de hallar previamente S_1, S_2,..., S_{p-1}, como sucedía con las expresiones (13) y (14).

Bibliografía

L. HOGBEN. "El universo de los números". Destino. Barcelona, 1966.

E. LINÉS. "Fermat". Historia de la Matemática hasta el siglo XVII (p. 171-203). Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1986.

J. PERALTA. "Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemátioa". Huerga y Fierro. Madrid, 1995.

J. REY PASTOR y J. BABINI. "Historia de la Matemática", Vol I. Gedisa. Barcelona, 1986.

B. RODRÍGUEZ SALINAS y J.L. DE MARÍA. "Cauchy". Historia de la Matemática en el siglo XIX, 2ª parte (p. 79-111). Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1994.

F. SCHEID. "Análisis Numérico". Mc Graw-Hill. México, 1986.

M. SPIVAK. "Calculus". Vol. 2. Reverté. Barcelona, 1970.