Las bases de la logística hilbertiana

Jacques Herbrand

Durante los últimos años, una nueva doctrina de lógica se ha desarrollado bajo la égida del matemático alemán Hilbert. Se dice que esta doctrina es capaz de examinar y resolver todos los problemas y dificultades, surgidos en los últimos cuarenta años, concernientes a los fundamentos de las matemáticas. Creemos que es de interés apuntar brevemente cuáles son las ideas fundamentales sobre las que se apoya y la manera en que se hace uso de ellas. No pretendemos explicar las ideas de Hilbert mismo en estas páginas; el instrumento que él forjó es independiente de esta presentación. Sólo deseamos presentar los principios de su teoría en una forma desde la que intentaremos de que queden más claras y menos sujetas a objeciones que otras que han sido seleccionadas hasta ahora.

La característica de esta nueva doctrina —que su fundador ha llamado metamatemáticas, esperando expresar con ello que todas las cuestiones de principio que conciernen a las matemáticas quedarían incluídas en ella— es que tiene como objeto de estudio, no los objetos con que los matemáticos se preocupan usualmente sino las proposiciones mismas que pueden pronunciarse acerca de estos objetos. Asi, la doctrina toma en cuenta las proposiciones que pueden establecerse en una teoría y busca sus propiedades características. Es, en cierto sentido, una matemática del lenguaje.

Para alcanzar esta meta las metamatemáticas podrían haber tomado el lenguaje ordinario y estudiado las oraciones que se pueden formar con estas palabras. Pero este lenguaje es, en verdad, demasiado poco adecuado para las matemáticas; es infinitamente más conveniente usar un lenguaje especial que posea la simplicidad deseada y en el que puedan expresarse todas las oraciones que tienen sentido en matemáticas. De hecho, tales lenguajes ya habían sido creados gracias a los esfuerzos de los logicistas. En su co-

Mathesis, 5 (1989) 543-555

nocido trabajo *Principia Mathematica*, Russell y Whitehead exhibieron un lenguaje particularmente simple, en el que sólo se necesita un número extremadamente limitado de signos. Todos los lenguajes que se han usado desde entonces se han derivado del de ellos.

Para entender claramente los principios de este lenguaje debemos recordar, primero, lo que una teoría matemática comprende: toma en cuenta ciertas categorías de objetos y, en ellas, ciertos objetos particulares, ciertas propiedades que estos objetos pueden tener[1] y ciertas relaciones que pueden existir entre ellos. Por ejemplo, en aritmética estudiamos los enteros positivos; la relación fundamental que consideramos vale entre dos números cuando el segundo se obtiene del primero añadiendole *uno*. De manera similar, en geometría estudiamos puntos y la relación fundamental vale entre tres puntos cuando están en la misma línea recta. Somos capaces de demostrar que todas las proposiciones que podemos imaginar se pueden enunciar usando solamente estos objetos y esta relación. De ahora en adelante, designaremos objetos y relaciones fundamentales por medio de letras (como se hace en álgebra o para puntos en geometría). En particular, ciertas letras, que llamaremos [variables] se habrán de considerar indeterminadas y representarán un objeto *arbitrario* en una cierta categoría de objetos (jugarán el mismo papel que las variables en álgebra). Cuando queremos traducir una teoría determinada a nuestro lenguaje, estas letras siempre serán las mismas para el mismo objeto, propiedad o relación. La oración [L] objeto a tiene la propiedad Φ se traducirá como $\Phi(a)$; la oración [L] objeto a tiene la relacion **R** con el objeto b se traduce como $a\mathbf{R}b$ y así sucesivamente. Así, tenemos cierta número de proposiciones, las proposiciones atómicas de la teoría, de manera tal que cualquier otra proposición que tuvieramos que enunciar en esta teoría puede construirse empezando con ellas.

Resulta de las investigaciones de Russell y Whitehead[2] que para hacer esto es necesario introducir solamente los tres siguientes signos (y su número se podría reducir aún más): el signo **V** quiere decir "o", el signo **f** significa "es falso que", el signo (x), donde x es una variable, quiere decir "hay un objeto x tal que". (Por ejemplo, si **P** Y **Q** son proposiciones, **PVQ** quiere decir " **P** o **Q**" y **P** quiere decir "es falso que **P**"; finalmente, si (x) es una proposición que contiene a la variable x, **(E)** (x) quiere decir "hay un objeto x tal que $\mathbf{f}(x)$".)

Además, es necesario introducir un sistema de puntos que sustituyan a las marcas de puntuación del lenguaje ordinario. Un sistema de dos puntos es una marca de puntuación más fuerte que un sistema de un punto y, en general, un sistema arbitrario de puntos es más fuerte que un sistema con un número menor de puntos (Así, en los ejemplos anteriores habría sido necesario, para escribir las cosas correctamente, hacer que un sistema de puntos más grande que cualquier otro apareciendo en **P** siguiera al símbolo $\sim$ y lo mismo para los signos **V** y **(E***x*). En la práctica, sin embargo, empleamos reglas que son un poco más complicadas para poder evitar el uso de un número demasiado grande de puntos en las proposiciones.)

Los autores de *Principia Mathematica* muestran, luego, como todas las oraciones pueden ser traducidas usando estos signos. Por ejemplo, "**P** implica **Q**" se traduce como (es falso que **P** o **Q**). Asi, de ahora en adelante escribiremos $\mathbf{P} \supset \mathbf{Q}$ en lugar de **P**.**V** **Q** introduciendo el signo " ". Pero este signo no es esencialmente diferente de los otros; debe ser considerado como una abreviación y se supone implícitamente que debe ser sustituído por su definición. De la misma manera, "**P** y **Q**" se traduce como $\sim : \sim \mathbf{P}.\mathbf{V}.\sim\mathbf{Q}$ (es falso que **P** es falso o que **Q** es falso), y escribimos **P&Q** como abreviación. "Para toda x, $\mathbf{f}(x)$" se traduce como $\sim :(\mathbf{E}x).\ \sim \mathbf{f}(x)$ (es falso qué exista una x para la que $\mathbf{f}(x)$ sea falsa) y se abrevia $(x).\mathbf{f}(x)$. No podemos indicar, con más detalle, como proceder en todos los casos; pero podemos llegar a la conclusión de que es inútil introducir otros signos que $\sim$. **V**, y **(E***x***)** para poder traducir todas las proposiciones posibles. De aquí en adelante supondremos implícitamente que todas las proposiciones matemáticas que se consideren están escritas en este lenguaje.

Ahora que poseemos un instrumento más conveniente y simple que el lenguaje ordinario, nos preguntamos bajo qué condiciones una proposición es verdadera en una teoría dada; en otras palabras, deberíamos analizar las reglas de razonamiento. La mayor parte de este trabajo fue realizada por Russell y Whitehead. Recordemos, en primer lugar, que todo razonamiento que un matemático puede llevar a cabo en una teoría dada puede ser efectuado suponiendo que ciertas proposiciones son verdaderas — estas proposiciones, fijadas previamente, dependen de la teoría y se les llama "hipótesis " de la teoría (o "axiomas" de la teoría, los dos términos tienen el mismo sentido para nosotros) — y deduciendo otra proposiciones verdaderas de éstas por medios puramente lógicos, por medio de reglas universales de razonamiento que son independientes de la teoría bajo consideración. Supongamos que todas estas hipótesis están escritas en nuestro nuevo lenguaje. Puede haber un número finito de éstas; es esencial hacer notar que puede haber también una infinidad. Un ejemplo de esto es lo que se llama "axioma de inducción matemática" en la aritmética y que establece que si una propiedad es verdadera para 0 y, cada vez que es verdadera para x lo es también para $x \sim 1$, entonces la propiedad es verdadera para todo número. Cuando este axioma se usa, se usa sólo para ciertas propiedades; por lo tanto, el axioma hace surgir tantos axiomas como propiedades a las que puede aplicarse y por lo tanto es una matriz que incluye una infinidad de axiomas y no un axioma propiamente dicho.

Nos quedan por encontrar todas las reglas universales de razonamiento. Los autores de *Principia Mathematica* muestran que éstas pueden reducirse a un número muy pequeño y su investigación nos permite mostrar que todo razonamiento puede ser llevado a cabo usando sólo las reglas siguientes; todas las demás pueden deducirse de éstas:

Regla 1. Las proposiciones verdaderas se obtienen sustituyendo p, q y r en las siguientes proposiciones por cualquier otra proposición:

$$\mathrm{p} \vee \mathrm{p} . \supset \mathrm{p}, \ \mathrm{p} \supset . \mathrm{p} \vee \mathrm{q}, \ \mathrm{p} . \vee . \mathrm{q} \vee \mathrm{r} : \supset : \mathrm{q} . \vee . \mathrm{p} \vee \mathrm{q},$$
$$\mathrm{q} \supset \mathrm{r} . \supset : \mathrm{p} \vee \mathrm{q} . \supset . \mathrm{p} \vee \mathrm{r}$$

Regla 2. Si **P** es verdadera y si **P**$\supset$ **Q** es verdadera, entonces **Q** es verdadera, donde **P** y **Q** denotan proposiciones.

Regla 3. Si f(x) es una proposición verdadera, donde x es una variable, entonces (x).f(x) es una proposición verdadera.

Regla 4. Si f(xy) es una proposición que contiene a los objetos x y y (donde x es una variable y y un objeto determinado o una variable) que se vuelve verdadera cuando x es sustituída por y, entonces (Ex).f(xy) es una proposición verdadera.

Regla 5. Una proposición sigue siendo verdadera cuando en ella (Ex).f(x)Vp se cambia por (Ex)f(x).Vp o (Ex).f(x)&p por (Ex)f(x).&p o, inversamente, donde p es una proposición que no contiene a x y f(x) una proposición que contiene a x.

Supongamos, por ejemplo, que buscamos las proposiciones que son verdaderas cuando no hay hipótesis; en cierto sentido, entonces, estas serían las que son verdaderas independientemente de las proposiciones atómicas de que se formen. Estas se llaman "identidades"; proposiciones que son verdaderas según la Regla 1 son

ejemplos de ello. Se ve que todas las otras identidades se pueden formar empezando con éstas y haciendo uso de las otras cuatro reglas. Una teoría matemática se caracteriza ahora por sus hipótesis y todos los teoremas verdaderos en esta teoría se pueden obtener a partir de las hipótesis y de las identidades dadas por la Regla 1 usando las Reglas 2, 3, 4 y 5.

Consecuentemente, podemos razonar con los signos de nuestro lenguaje sin hacer referencia, en cada momento, a su significado en el lenguaje ordinario. Podemos operar de una manera puramente mecánica sin preocuparnos por el origen de los signos con que tratamos; llegamos a una especie de álgebra en la que todas las matemáticas pueden hacerse.

Este es el primer paso que debe tomarse —más aún, no se le debe todo a Hilbert que, en esto, tomó prestado a sus predecesores— para poder plantear los problemas fundamentales de las metamatemáticas. Una objeción surge al respecto: podemos preguntarnos como tenemos la seguridad de que *todas* las oraciones que pueden formarse en una teoría matemática son combinaciones de signos y de que *todas* las reglas de razonamiento que se pueden usar son las reglas que hemos indicado. Debemos reconocer que sólo tenemos una certeza experimental de ello y que se debe esencialmente a la existencia de *Principia Mathematica* — los autores de este trabajo han tenido éxito en reconstruir todo el fundamento de las matemáticas e, incluso, en desarrollar ciertas teorías de manera bastante avanzada. Por supuesto, no tenemos ninguna razón *a priori* para creer que estas reglas bastan en todo caso; pero tenemos la casi absoluta certeza de que todo argumento que hasta ahora ha sido considerado corrrecto en matemáticas puede ser llevado a cabo usándolas. Más aún, si algunos matemáticos, muy exigentes o no demasiado exigentes, quieren cambiarlas, el principio de los métodos descritos será siempre aplicable a las teorías que construye; solamente su uso se modificará. Por el momento, nos limitamos a teorías que se usan ordinariamente y podemos estar ciertos de que para éstas hemos tenido éxito en la tarea de proveer una traducción fiel y cierta.

Hasta aquí sólo hemos reemplazado el lenguaje ordinario con otro más conveniente, esto no nos ayuda, en modo alguno, con los problemas que tienen que ver con los principios de las matemáticas. Hilbert buscó resolver las cuestiones que se pueden plantear dedicándose al estudio de las colecciones de signos que son traducciones de proposiciones verdaderas en determinada teoría. Pero quiso llevar a cabo este estudio satisfaciendo los requerimientos del más absoluto rigor. Deseó evitar todas las objeciones que los más severos críticos de los métodos matemáticos ordinarios habrían levantado. Se restringió al empleo de modos de razonamiento tan inmediatos que fuesen convincentes en todos los casos en que se usan.

El siguiente es el tipo de razonamieno que debe ser usado: consideremos una teoría matemática determinada y busquemos asegurarnos que todas las proposiciones que son verdaderas en esta teoría tienen una cierta propiedad A (esta propiedad es diferente en cada caso particular y caracteriza el caso). Primero habremos de pedir que siempre seamos capaces de determinar si cierta proposición tiene o no esta propiedad e incluso debemos tener el cuidado de indicar, de hecho, las operaciones que deben efectuarse para determinarlo. Entonces será necesario demostrar que todas las hipótesis de esta teoría y todas las proposiciones que son identidades según la primera regla, tienen la propiedad A; esto debe mostrarse por medio de un argumento que es descrito en detalle y que puede ser repetido, de hecho, para cualquier proposición arbitraria. Por último, se mostrará que si ciertas proposiciones tienen la propiedad A, la tendrán también todas las proposiciones derivables de ellas al aplicar las reglas 2-5; esto también se puede mostrar por medio de un argumento que puede repetirse en cada caso particular. Consideremos ahora un argumento hecho en esta teoría: se empieza en las hipótesis y se llega a una conclusión repitiendo las reglas de razonamiento. Para cada proposición intermedia verdadera que se introduzca en la argumentación, vale la propiedad A, y esto puede verificarse de hecho en cada paso del argumento. Al final de cierto número de pasos, que depende de la longitud del argumento, llegamos a una conclusión que, por ende, tiene tambíen la propiedad A. Por lo tanto, todas las proposiciones verdaderas de esta teoría tienen esta propiedad. Podemos establecer esto para cada argumento definido y esta prueba metamatemática no es otra cosa que un método práctico —un manual de operaciones— que sin duda alguna nos permite llevar a cabo la verificación.

Todo el razonamiento metamatemático se hace según el modelo anterior, escogiendo propiedades adecuadas A. Examinaremos dos de los problemas principales que surgen en el estudio de las teorías matemáticas a la luz de este método: hablamos de la consistencia y del tercero excluído. En primer lugar, definamos dos

términos que usaremos con frecuencia. Decimos que una teoría es *inconsistente* si es posible probar en ella tanto un teorema como su negación; por lo tanto, para alguna proposición **P**, **P** y $^{\sim}$**P** son verdaderas en la teoría. Podemos ver con facilidad que si es posible probar tanto **P** como $^{\sim}$**P** para una proposición **P**, entonces, es posible deducir de ello la verdad de toda proposición.[4] Así, si **P** es verdadera en una teoría, añadiendo $^{\sim}$**P** a las hipótesis de la teoría obtenemos otra en la que toda proposición es verdadera. Esto se traduce frecuentemente diciendo que todo resultado, verdadero o falso, puede deducirse de un resultado falso.

Decimos que una teoría es *completa* si para toda proposición **P** podemos probar **P** o $^{\sim}$**P**. Saber que una teoría no es completa quiere decir que podemos encontrar una proposicíon **P** tal que ni **P** ni $^{\sim}$**P** es verdadera en la teoría. Podemos demostrar, luego, que dos teorías, ambas consistentes, pueden obtenerse añadiendo **P** o $^{\sim}$**P** a las hipótesis. Inversamente, si podemos hacer esto, entonces la teoría en consideración no es completa. Nos vemos remitidos, pues, al problema de la consistencia para poder demostrar que una teoría es completa.

Para probar que una teoría es consistente, debemos encontrar una propiedad A que satisfaga las condiciones que hemos indicado y, más aún, tal que, si **P** tiene esta propiedad, entonces $^{\sim}$**P** no la puede tener. Entonces no podríamos construir agumentos que nos permitiesen probar al mismo tiempo **P** y su negación $^{\sim}$**P**. pues podríamos verificar, como ya se dijo, que **P** y $^{\sim}$**P** tendrían, ambas, la propiedad A, lo que es imposible.

Por otra parte, si queremos demostrar que una teoría no es consistente (o que una teoría es inconsistente), tenemos que encontrar una proposición **P** tal que tanto **P** como $^{\sim}$**P** sean demostrables; para probar que una teoría es completa, debemos encontrar un procedimiento que nos permita, siempre que sea dada una proposición **P**, probar **P** o $^{\sim}$**P**. Por lo tanto, tenemos un método que nos permite investigar si una teoría es inconsistente o no, completa o no. Mostraremos en qué condiciones tendremos que aplicar estos métodos.

Con frecuencia se adopta el punto de vista que afirma que, para que una teoría matemática no sea un vano juego de símbolos, una álgebra pura, como dijimos antes, debe ser la traducción de algo real; debe ocuparse de objetos que puedan ser concebidos, de hecho, por el entendimiento. Así, el estudio de los números dió lugar a la aritmética, el del espacio a la geometría, el del continuo al análisis y el de los conjuntos a la teoría de conjuntos. En este caso, las proposiciones atómicas de la teoría deben corresponder a propiedades fundamentales que los objetos considerados puedan tener y las relaciones fundamentales que existan entre ellos; las hipótesis deben corresponder a las proposiciones fundamentales que sean verdaderas para ellos. Sin embargo, es necesario estar alerta pues nunca podremos estar seguros que esta traducción no sea infiel y que no se revelará como insuficiente en algún momento. La teoría de conjuntos nos da un ejemplo bien conocido de ésto y mostró que es necesario ser prudente antes de afirmar que tal o cual propiedad es intuitivamente cierta para los objetos que se están considerando. La cuestión del postulado de Euclides ya había mostrado esto un siglo antes pero no de una manera tan urgente. El primer ejemplo nos da un caso en el que las pruebas de consistencia serían útiles para disipar las últimas dudas; el segundo ejemplo es uno en que es necesario mostrar que una teoría no es completa y que ha sido resuelto sin la ayuda de la metamatemática,[5] si bien de una manera insuficiente al mostrar que las geometrías de Euclides y Bolyai son, o ambas inconsistentes o ambas consistentes. Nada nos ha mostrado que problemas similares no surgen en teorías que se nos presentan como perfectas, por ejemplo, la aritmética.

¿Es posible que la aritmética no sea consistente? Sabemos que Brouwer afirma que es ilegítimo razonar acerca del conjunto de todos los enteros, le parece que la noción, en sí misma, no es suficientemente clara ni está suficientemente presente en nuestra intuición. En consecuencia, no es imposible que el razonamiento que se lleva a cabo usándolo no nos conduzca a contradicción. Podemos preguntarnos, también, si la aritmética es una teoría completa. Por ejemplo, consideremos el famoso teorema de Fermat que afirma que es imposible encontrar cuatro enteros *x*, *y*,*z* & *n* (mayor que 2) tales que

$$x^n+y^n = z^n. \text{ (A)}$$

No sería absurdo que fuera imposible demostrar este teorema y que fuera imposible probar que es falso. Esto nos mostraría, simplemente, que no tenemos un noción suficientemente precisa de la totalidad de todos los enteros y podríamos concluir de ello que es posible desarrollar dos aritméticas, ambas consistentes, tales que el teorema de Fermat se suponga verdadero en una y no verdadero en la otra. Por supuesto, en una de estas teorías nos veríamos llevados a suponer que existen cuatro números *x*, *y*, *z* & *n* tales que **(A)** vale para *n* mayor que dos sin ser capaces de dar los valores de estos cuatro números, pero no sería inconsistente suponer que existen. Problemas similares surgen en teoría de conjuntos y, de manera más urgente que en la aritmética. Hasta ahora, solo los métodos metamatemáticos han permitido que estas cuestiones sean tomadas en consideración y que se pueda empezar a darles respuesta.

El problema de la consistencia también aparece desde un punto de vista que es puramente matemático. Consideremos nuevamente el teorema de Fermat; supongamos que lo hemos demostrado usando argumentos que Brouwer considera ilegítimos y que, sin embargo, los matemáticos usan todo el tiempo; por ejemplo, trayendo a colación la colección de todos los enteros o de todos los números racionales o irracionales. Supongamos también que hemos podido probar metamatemáticamente que la teoría obtenida usando estas nociones es consistente. Estaríamos seguros, entonces que es imposible encontrar de hecho, cuatro números tales que **(A)** con *n* mayor que 2 pues esto implicará la inconsistencia de este sistema y un argumento que satisface todos los requerimientos de Brouwer ha mostrado que esto es imposible. Debemos concluir de ello que tenemos el derecho a utilizar estas nociones prohibidas pues todo resultado que se ha obtenido usándolas como pasos intermedios no puede ser falso. Solamente estas nociones deben ser consideradas por Brouwer como elementos sin significado real, como elementos ideales —como los llama Hilbert. De esta manera, el fundador de la metamatemática siente que ha reconciliado los requerimientos del intuicionista que comparte el punto de vista de Brouwer y los de los matemáticos que no quieren abandonar ninguno de sus métodos usuales.

La cuestión del tercero excluído se trata también fácilmente. El principio del tercero excluído asegura que, dada una proposición **P**, **P** es verdadera o **~P** lo es. Es decir, **PV~P** es una proposición verdadera en toda teoría. De hecho, esto se sigue sin dificultad de nuestras propias reglas de razonamiento que permiten que el principio sea usado en toda teoría. En general, el principio se usa del siguiente modo: suponemos sucesivamente que **P** es verdadera y que **P** es falsa y mostramos que en cualquier caso podemos deducir una proposición **Q** del supuesto. De aquí concluímos que **Q** es verdadera en esta teoría. Por lo tanto podemos usar el principio en cualquier teoría en la que nuestras reglas de razonamiento no conduzcan a una contradicción. Pero de ello no resulta que **P** sea demostrable o que $\sim$**P** sea demostrable: la teoría puede ser incompleta. En otras palabras, es posible que ni **P** ni $\sim$**P** sean verdad; sin embargo, podemos suponer, sucesivamente, que **P** es verdadera y que **P** es falsa en cualquier argumento. Nos vemos conducidos a dos sentidos distintos del tercero excluído: uno puramente matemático traducido por el hecho de que **PV**$\sim$**P** es una identidad; otro metamatemático que conduce a la cuestión de saber si una teoría es completa.

Tal es la forma general de esta nueva lógica. Busca examinar, solamente, teorías existentes y estudia las características de las proposiciones verdaderas en ellas. No toma parte en las discusiones que estas teorías hacen surgir y no busca desacreditarlas. Se limita a indicar que los resultados obtenidos por medio del razonamiento conducido de tal y tal manera tienen tales y tales propiedades. Hemos indicado solamente su aplicación a las teorías matemáticas usuales. Pero supongamos que estamos trabajando en una teoría para la que las reglas ordinarias de razonamiento se han modificado; en ese caso, como hemos apuntado, una vez que estas reglas han sido formulada, los métodos de la metamatemática siguen siendo aplicables y nos permiten el estudio de tales teorías. La metamatemática, en modo alguno, busca saber si una teoría dada describe las propiedades de un objeto particular de manera conveniente, tampoco si corresponden a algo real; más aún, no lo podrían hacer. Desde el punto de vista metamatemático, todas las teorías tienen el mismo derecho a ser citadas.

Esta posición agnóstica puede desagradar a muchos pero no debe ocultarse que, quizá, el papel de las matemáticas es simplemente proveernos con formas y argumentos y no el de buscar cuáles de estos se aplican a cuáles objetos. Así como el matemático que estudia la ecuación de propagación de onda ya no se pregunta si hay ondas en la naturaleza que satisfacen esta ecuación, ya no se pregunta cuando estudia aritmética o teoría de conjuntos si los conjuntos o los números en los que piensa intuitivamente satisfacen las hipótesis de la teoría que está considerando. Debía preocuparse con el desarrollo de las consecuencias de estas hipótesis y con presentarlas de la manera más sugestiva. El resto es asunto de físicos o de filósofos.

Los resultados que se han obtenido, hasta ahora, con estos nuevos métodos son todavía pocos; hay más esperanzas que realizaciones. Podemos atribuirlo sólo a la extrema dificultad de los problemas que surgen. De todas las teorías matemáticas usuales, sólo se ha mostrado la consistencia de la aritmética y ello solamente con ciertas restricciones en cuanto al uso del axioma de inducción matemática. Hace cinco años, Hilbert anunció que había probado la consistencia del análisis e incluso de la teoría de conjuntos con una hipótesis bien conocida, la hipótesis del continuo, pero estas demostraciones no fueron publicadas y parecen tener serias dificultades. Hay, sin embargo, otro punto de vista para llevar a cabo este trabajo y en según el cual se han obtenido resultados alentadores: el estudio de lo que los alemanes llaman el *Entscheidungsproblem* que consiste en buscar un método que nos permita reconocer con certeza (al cabo de un número de operaciones que puede ser determinado de antemano) si una proposición es una identidad y, si lo es, encontrar una prueba de la proposición. La solución a este problema nos permitiría reconocer si una proposición es verdadera en una teoría determinada que tenga un número finito de hipótesis pues puede probarse fácilmente que si la prueba de una proposición **P** hace uso de las hipótesis $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2,\ldots,H_n}$, entonces $\mathbf{H_1\&H_2\&\ldots\&H_n}$. **P** es una identidad e, inversamente, si tal proposición es una identidad, entonces **P** es verdadera en la teoría considerada. En particular, seríamos capaces de reconocer, entonces, si la teoría es o no consistente.[6] Y, en general, podemos maquinar de manera tal que hagamos que todos los argumentos matemáticos usuales en teorías que sólo tengan un número finito de hipótesis. Con ello, podemos ver la importancia del problema cuya solución nos permitiría decidir con certeza acerca de la verdad de una proposición en una teoría determinada. Esto nos daría un método general para las matemáticas que permitiría que la lógica matemática jugara el mismo papel frente a las matemáticas ordinarias que la geometría analítica juega *vis-à-vis* la geometría euclideana. Este problema está lejos de resolverse; solamente se ha tratado, hasta el momento, en casos particulares. En todo caso, el problema puede ser reducido a un problema aritmético y un estudio profundo de esta reducción nos da resultados curiosos acerca de la estructura de todas las demostraciones matemáticas y las cuestiones relacionadas con las paradojas que se obtienen al considerar el "conjunto" de todos los números que pueden ser definidos con un número finito de palabras.[7] Pero no podemos investigar estas cuestiones aquí sin rebasar los límites que nos hemos impuesto.

Estos son los métodos de la metamatemática y la dirección en que apunta. Hasta ahora, sólo se han dado los primeros pasos; regiones inmensas permanece inexploradas. Pero los resultados ya obtenidos bastan para mostrar el valor inmenso de esta doctrina; sólo la metamatemática basta para dar respuestas decisivas a preguntas que hasta ahora parecían escapar a todo tratamiento positivo. Posiblemente su influencia se extienda poco a poco a todas las ramas de las matemáticas y nos de métodos para ellas. Percatarnos de su gran ambición, la solución al *Entscheidungsproblem* tendrá una repercusión considerable, posiblemente tanto por sus consecuencias prácticas como por las cuestiones de principio cuya solución permitiría. Sin embargo, no parece que esta meta pueda alcanzarse en el futuro cercano; todos los esfuerzos que se han hecho en esta dirección sólo han tenido éxito en plantear la dificultad del problema de una manera más precisa. Pero esta ciencia se inauguró ayer y sus principios ya nos permiten predecir el papel que está llamada a jugar.

Notas:

* Trabajo que se publica en este volumen.

** Des Esseintes es el personaje decadente y estético de una novela de J.K. Huysmans.

[1] Desearemos hablar de propiedades que pueden o no ser verdaderas para un objeto determinado. Por ejemplo, la propiedad de un número de ser diferente de 0. De esta manera, una relación entre dos objetos es una relación de esta pareja de objetos.

[2] Todos los matemáticos que se han ocupado de estas cuestiones han usado diferentes métodos de exposición de este lenguaje simbólico y sus reglas de razonamiento (si bien son equivalentes). Aquí usamos el método que nos parece más simple.

[3] Hemos utlizado la notación presentada en el texto original en francés (N. E.).

[4] Pues, como Russell y Whitehead demostraron, **P** : **P**. **Q** es una identidad. Consecuentemente, basta aplicar la segunda regla de razonamiento para llegar a la conclusión del texto.

[5] Un cierto número de argumentos que ahora consideramos como metamatematicos ya habían sido elaborados de una manera más o menos completa antes de la invención de las metamatematicas. Estos consistían, por lo regular, en mostrar que ciertas teorías son consistentes o incompletas si otras teorías, como la aritmética,se suponen consistentes. Pero solo las metamatemáticas nos permiten plantear estos problemas claramente en todos los casos.

[6] Sea **P** una proposición verdadera en la teoría. De lo que hemos dicho en la definición de consistencia, es necesario y suficiente para que la teoría sea inconsistente que **P** sea verdadera en la teoría.

[7] Estamos aludiendo aquí, a la paradoja de Skolem según la cual toda teoría matematica puede ser llevada a cabo considerando solamente los objetos de un conjunto numerable. Pero una discusión de la importancia y sentido correcto de esta proposición nos llevaría muy lejos. Detalles suplementarios sobre esta cuestión pueden encontrarse en el trabajo de Hilbert y Ackerman (1928, p. 80), que contiene, también, una bibliografía completa y, en el capítulo 5 de nuestra tesis que aparecerá pronto. Estos dos trabajos y los artículos de Hilbert pueden ser consultados para una exposición detallada de las metamatematicas; más aún, nuestro 1929b puede ser consultado en relación al *Entscheidungsproblem*.