La filosofía y el programa de Hilbert

Carlos Torres A.

Introducción

Este ensayo tiene como propósito presentar al lector interesado en la filosofía y fundamento de las matemáticas una síntesis del pensamiento de Hilbert al respecto. No obstante, sería erróneo considerarlo una introducción al tema. Es aconsejable que el lector tenga cierta familiaridad con los temas que aquí se tratan, especialmente en lo que atañe a la lógica matemática. Más bien, es una síntesis de lo que considero es el núcleo del pensamiento de Hilbert en torno al fundamento de las matemáticas junto con algunas de sus consecuencias.

Aquellos principios que se consideran fundamentales en la visión que Hilbert tiene de las matemáticas se presentan en forma de "tesis". Esto se hace sólo por economía. No se afirma que Hilbert las haya enunciado así. Más bien, se les ha extraído de sus escritos y de los de sus comentaristas, pero no se les encuentra como tales en sus trabajos. Ellos resumen su opinión respecto de la esencia del pensamiento matemático. Quizá sean erróneos, pero reflejan nuestro modo de entender su punto de vista. El texto subsiguiente se deberá leer teniendo en mente tales principios. Dicho texto consiste en una serie de fragmentos en los que las tesis son desarrolladas, comentadas o explicadas. El programa de Hilbert se expone como un medio concreto para fundamentar la matemática en lo que es dable en la percepción.

En virtud de que los teoremas de Gödel desempeñan un papel importante en la respuesta matemática al programa, se incluyen dos secciones dedicadas a ellos. En ellas se da un bosquejo moderno de dichos teoremas a partir del Lema Diagonal y las Condiciones de Derivación de Hilbert y Bernays. Después de examinar el efecto que tienen para el programa, nuestro trabajo llega a un abrupto final. En fin de cuentas, poco queda por decir desde una perspectiva matemática: las metas que el programa se había trazado no se pueden alcanzar, el programa apunta hacia una solución inasequible. La respuesta es matemática, no filosófica. Bien interpretada significa que la intuición pura del signo, al menos como Hilbert la entiende, no es suficiente para fundar la matemática.

SINOPSIS:

Hilbert propuso el siguiente proyecto filosófico: fundamentar la matemática en la intuición pura del signo.

Para realizarlo elaboró un programa matemático.

1. *La naturaleza de la matemática*

TESIS Nº 1. La matemática comprende dos tipos de nociones: descriptivas e ideales. Grosso modo, las nociones descriptivas corresponden a objetos y construcciones concretas de la experiencia sensible. Por el contrario, las nociones ideales son ideas de razón que trascienden toda experiencia. Su función es suplementar la razón matemática. Son, en este sentido, indispensables.

TESIS Nº 2. Las nociones descriptivas tienen su origen en cierto tipo de razonamiento intuitivo que se encuentra en la base del pensamiento matemático. Este razonamiento, que procede sin presupuestos axiomáticos, consiste en la reflexión directa acerca de objetos presentes en la intuición como experiencia inmediata previa a todo pensamiento. Constituye lo que se llama "matemática finitista". Muy pronto esta matemática se extiende mediante la adición de nociones y enunciados ideales que tratan con objetos ficticios no construibles en la percepción. Ejemplos de ello son los números transfinitos de Cantor y la noción de infinito actual.

TESIS Nº 3. La incorporación de nociones ideales a una teoría que originalmente se ocupa de objetos y construcciones concretas está sujeta a la condición de no contradicción. En esto se está de acuerdo con Kant.

TESIS Nº 4. La única manera de dar forma a una teoría matemática que comprende nociones e inferencias ideales es procediendo axiomáticamente. De hecho, es el proceder axiomático lo que de suyo es específico al pensamiento matemático.

TESIS Nº 5. La única exigencia para una teoría axiomática es la de ser no contradictoria (consistente). En tal caso sus axiomas son verdaderos y los objetos por ellos definidos existen.

1. Para Hilbert la ocurrencia de contradicciones en la teoría transfinita de Cantor no obliga a su abandono. En su opinión, las antinomias son el resultado del descuido con que se ha extendido la matemática finitista con la adición de nociones ideales.

Su divisa: *Nadie será capaz de expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.*

2. En su opinión, los enunciados ideales no se pueden justificar como verdades materiales evidentes. De la misma manera, las formas transfinitas de deducción no se justifican a partir de la intuición que de ellas se tiene.[1] Sólo la demostración de que su asunción no conduce a contradicciones cumple tal fin.

3. Hilbert sostiene que en el desarrollo de una teoría axiomática la naturaleza o caracter de los objetos considerados es irrelevante. Sólo importan las relaciones que fijan los axiomas entre dichos objetos. Es así que, en su opinión, la matemática no es una forma de acceso a una realidad suprasensible. De hecho, los objetos de que trata una teoría no existen al margen de la teoría misma.

4. En manos de Hilbert la matemática deviene en la Ciencia de lo Posible, entendiéndose por "posible" aquello que no conduce a contradicción. En su opinión, una teoría axiomática es significativa si se demuestra que ninguna contradicción es deducible de sus axiomas. He aquí el problema esencial del fundamento de las matemáticas según lo entiende en su obra tardía.

5. Para desarrollar legítimamente una teoría que comprende nociones descriptivas e ideales es indispensable demostrar *a priori* su no contradicción. Se impone con ello una tarea fundamental: buscar la garantía de no contradicción de la matemática clásica, incluyendo la teoría de los números transfinitos de Cantor. Para ello es preciso:

[1] Un caso de noción ideal es la ley del tercero excluido cuando se aplica a conjuntos infinitos. Dada una propiedad $P(x)$ y un conjunto infinito A, ¿es legítimo afirmar que $\exists x P(x) \vee \forall x \sim P(x)$ sin más? Cualquier respuesta afirmativa que se de carece de una base empírica. No obstante, la mayor parte de los matemáticos aceptan como válida esta ley para todos los conjuntos, no sólo los finitos. Esta noción se introduce con

1º) Axiomatizar la matemática clásica.
2º) Demostrar la consistencia de dicho sistema axiomático.

Entre 1908 y 1922 Zermelo y Fraenkel desarrollaron un sistema axiomático para la teoría de conjuntos que en general cumple con la primera de estas tareas. Quedó por resolverse el problema de su consistencia.

6. Hilbert ve en el problema de la consistencia la cuestión central del fundamento de las matemáticas. Para resolverlo propone un nuevo método que tiene como base el sentido literal de la palabra "consistencia": a saber, que no es posible deducir una contradicción (es decir, no hay dos teoremas uno de los cuales es la negación del otro).

2. *La filosofía del signo*

TESIS Nº 6. La matemática dispone de un contenido que le es asegurado independientemente de la lógica y, por tanto, no puede fundarse sobre la sola lógica. Más bien, la aplicación de las operaciones lógicas requiere que algo esté dado en la representación (vorstellung) como experiencia inmediata anterior a todo pensamiento. De acuerdo con esta teoría, el objeto de nuestro examen en la matemática son los signos concretos cuya forma es clara e inmediatamente reconocible. Estos objetos son susceptibles de examinarse a fondo, en todas sus partes; sus propiedades, sus diferencias y su orden están dados intuitivamente con ellos mismos como algo que no puede reducirse a nada más ni requiere en modo alguno tal reducción.

TESIS Nº 7. La base segura para el pensamiento matemático es la intuición del signo. En ella han de sustentarse las demostraciones de consistencia.

TESIS Nº 8. En la esfera de la experiencia sensible no es posible que se produzcan contradicciones. Sólo los enunciados se contradicen.

TESIS Nº 9. La matemática finitista es por su misma naturaleza no contradictoria. Lo justifica el que sus enunciados describen en forma precisa objetos y relaciones entre objetos concretos.

7. La realidad matemática no se sitúa en un mundo ideal sino

el propósito de restablecer la validez de las reglas de la lógica Aristotélica que, como Brouwer demuestra, se perdieron con la transición al infinito.

en la esfera de lo que se percibe o es dable en la percepción. Sus objetos, los signos, tienen una existencia independiente del pensamiento y de las construcciones a través de las cuales se les conoce.

8. Los signos son, en tanto que objetos concretos, anteriores a todo pensamiento e irreductibles a cualquier otra cosa.

9. Para Hilbert el único resguardo seguro para la matemática es la intuición del signo (la cual, en palabras de Ladriere, "disfruta de una evidencia privilegiada"). En su opinión , la validez del pensamiento matemático ha de sustentarse en dos hechos: en la existencia objetiva e independiente de los signos y en su perfecta adecuación a la realidad (la de los signos concretos) que pretende estudiar.

10. El retorno a la intuición del signo exige la reducción de la matemática al dominio de la percepción sensible.

3. *El problema de la consistencia. La formalización*

11. Se colige de lo dicho que, para Hilbert, la solución final al problema del fundamento de la matemática clásica se logra con una demostración finitista de su consistencia. Para llevar a cabo esta tarea la axiomatización es insuficiente: una teoría axiomática es un objeto mal definido del pensamiento, y es parte esencial del pensamiento finitista el ser sólo aplicable a entidades definidas y dadas constructivamente. Ni la representación de la teoría en el ámbito de la percepción, ni el estudio de su estructura deductiva son posibles en este nivel. Para satisfacer estas exigencias hay un solo recurso: la formalización.[2]

12. Para formalizar por completo la matemática clásica es preciso (von Neumann, 1931):

> 1. Enumerar todos los símbolos lógicos y matemáticos de la teoría. Estos símbolos, llamados *primitivos,* deberán incluir a los símbolos "$\rightarrow$" y "$\sim$" que representan, respectivamente, a la implicación y la negación.

[2] La formalización es un paso involuntario provocado por las exigencias del problema de los fundamentos. Se le introduce para dar a los métodos deductivos de la matemática una forma tan exacta que puedan ser el objeto de una investigación matemática (la consistencia es una propiedad relativa a las demostraciones de una teoría, no a sus enunciados). Esta dificultad no constituye necesariamente un contratiempo: también es la culminación de una ardua labor en el terreno de la axiomática.

2. Caracterizar sin ambigüedad todas las combinaciones de símbolos primitivos que representan enunciados de la matemática clásica. A éstas se les llama *fórmulas*.

3. Suministrar un procedimiento que permita construir en forma sucesiva todas las fórmulas que correspondan a enunciados *verdaderos* de la matemática clásica. A este procedimiento de derivación formal se le llama *prueba* y a las fórmulas con el construidas *teoremas*.

Esto último se logra definiendo la noción de *prueba* como sigue:

3.1. Ciertas fórmulas, caracterizadas efectivamente y sin ambigüedad, son llamadas *axiomas*.

3.2. Ciertas reglas, caracterizadas efectivamente y sin ambigüedad, son llamadas *reglas de derivación*. Éstas indican como se pasa de un grupo de fórmulas llamadas *hipótesis* a otra fórmula llamada *conclusión*. Se dice que la conclusión se *infiere* de sus hipótesis.

3.3. Una *prueba* o *derivación* es una sucesión finita de fórmulas, cada una de las cuales es un axioma o se infiere de otras fórmulas que le preceden en la sucesión por la aplicación de alguna regla de inferencia. A la última fórmula de una prueba se le llama *teorema*.[3]

Estas tareas ya fueron realizadas casi por completo por los logicistas. En *Principia Mathematica* (1910-1913) Russell y Whitehead suministran una enorme evidencia experimental de que la matemática clásica puede representarse en un sistema formal[4] que utiliza un número muy pequeño de símbolos primitivos y de reglas de inferencia. Aunque creado en un contexto diferente (en él varias expresiones se introducen con la intención de comunicar), Hilbert lo adapta a sus propósitos eliminando cualquier significado atribuible a sus símbolos, declarando que las fórmulas del cálculo lógico de *Principia Mathematica* son enunciados ideales que nada significan por sí mismas.[5]

[3] Hay un estrecho vínculo entre una teoría axiomática y sus formalizaciones. En una teoría axiomática los enunciados son acerca de ciertos términos técnicos que permanecen indefinidos. Algunos de estos enunciados se consideran verdaderos y otros falsos. Los enunciados *verdaderos* son los axiomas y los teoremas. Un axioma es un enunciado que deliberadamente se considera verdadero. En cambio, un *teorema* es un enunciado que se infiere de los axiomas por medio de una *deducción lógica* (una *demostración*), mientras que un enunciado *falso* es aquel cuya negación es verdadera. Estos elementos poseen un sentido dado intuitivamente y el marco en el que se desarrollan es el del lenguaje natural. En un sistema formal se encuentran elementos análogos, pero su significado está rigurosamente determinado por las reglas del sistema. La noción de *fórmula* en el sistema es análoga a la de *enunciado* en la teoría axiomática. La de *prueba* es análoga a la de *demostración*. La de *fórmula derivable* es análoga a la de *enunciado* cierto, y la de *fórmula refutable* a la de *enunciado falso*. Finalmente, los *teoremas* del sistema formal son análogos a los de la teoría axiomática.

[4] "sistema formal", "cálculo lógico" y "formalismo" no son sino distintas denominaciones de un mismo concepto. Lo mismo se puede decir de las palabras "símbolo" y "signo", aunque en ocasiones esta última puede significar "sucesión de símbolos". Por otra parte, la palabra "expresión" quiere decir "sucesión finita de símbolos primitivos".

De este modo, en lugar de la ciencia matemática expresada en lenguaje ordinario se obtiene un inventario de fórmulas, un sistema de signos que se combinan y disocian según reglas objetivas descritas con toda precisión. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y a las inferencias materiales corresponden reglas conforme a las cuales las fórmulas se encadenan.

13. Con la formalización Hilbert convierte las demostraciones matemáticas en objetos de examen intuitivo. En ello cifra sus esperanzas de resolver el problema de la consistencia. Considera que si bien es cierto que en la matemática clásica hay un uso esencial de las nociones ideales, y que toda teoría formal que la represente deberá del mismo modo representarlas a ellas, también es cierto que el carácter constructivo de las derivaciones permite abordar el problema desde una perspectiva finitista. En otras palabras: aun cuando la interpretación intuitiva de un sistema formal no sea finitista, el sistema, visto como una totalidad de derivaciones (i.e. secuencias finitas de fórmulas ordenadas conforme a las reglas) está definido constructivamente y puede ser objeto de discusión finitista. En su opinión nada impedirá obtener por esta vía la garantía de la validez del aparato matemático.

14. La formalización de la matemática clásica ha de ser *completa*, es decir, los *teoremas* de ambas teorías (la formal) y la axiomática) se deben corresponder en un sentido obvio. De lo contrario será inadecuada.

4. *La metamatemática*

15. La formalización sitúa al pensamiento matemático en presencia de un sistema de objetos, los signos, en el que los axiomas, las fórmulas y las derivaciones formales son tema de un examen intuitivo. Este examen se lleva a cabo dentro de una disciplina

[5] En un formalismo los signos ya no son representación de otra cosa, figuras que evocan en el entendimiento la cosa simbolizada. Por un cambio radical de actitud el pensamiento se ve obligado a detenerse en ellos mismos a fin de tomarlos como objetos últimos.

en cierto sentido nueva, una *metamatemática* que comprende las consideraciones intuitivas a que dan lugar los formalismos. Su propósito es establecer el carácter no contradictorio de los axiomas.

16. La descripción de los formalismos tiene lugar en la metamatemática. En ella los enunciados tienen el propósito de *comunicar*. Su rudimento es la intuición del signo.[6] El *leitmotiv* de esta disciplina es el análisis sintáctico de los sistemas formales a fin de caracterizar, en términos objetivos, la clase de sus *teoremas*. Hilbert, en particular, pretende demostrar que ciertas fórmulas no son teoremas (consistencia) y, de ser posible, determinar un procedimiento para decidir si una fórmula dada es o no un teorema en el sistema (problema de la decisión).

17. La metamatemática, como Hilbert la entiende, es en esencia sintáctica: la verdad o falsedad de sus enunciados depende únicamente de la forma de las expresiones en ellos referidas y no de su significado.

18. En la metamatemática sólo se admiten argumentos y modos de razonamiento finitistas. La razón es obvia: si lo que se pretende es justificar los elementos transfinitos de la matemática clásica, no tiene sentido que la justificación haga uso de ellos. La herramienta debe conservarse pura. En particular, no son permisibles los siguientes modos de razonamiento: *demostración de la existencia de un objeto por reducción al absurdo, inducción transfinita, uso del axioma de elección y sus equivalentes, de toda forma del infinito actual, de operaciones que involucren una infinidad de manipulaciones de fórmulas o apelar a una infinidad de propiedades estructurales del sistema formal.* Se trata, en esencia, de proscribir todo paso deductivo que no se encuentre justificado por una evidencia intuitiva.

19. Para Hilbert *comprender* el concepto de infinito es *entender*, desde un punto de vista finitista, el uso que se le da.[7] Dicho

[6] Esta intuición nos permite, entre otras cosas, reconocer los símbolos del sistema y decidir si un símbolo predeterminado es o no uno de ellos. También nos permite reconocer aquellas expresiones del lenguaje que son fórmulas y, entre éstas, las que son axiomas. Así mismo, nos faculta para reconocer cuándo una sucesión finita de fórmulas es una prueba y comprobar directamente su corrección.

[7] Hilbert se expresa así: "Operar con el infinito sólo puede validarse a través de lo finito". En su opinión, las nociones ideales (o, en jerga Kantiana, los conceptos de razón) sólo se entienden razonado en torno de ellas en un contexto bien definido que es, en este caso, la matemática finitista.

uso, en su opinión, consiste en dinamizar el desarrollo de la teoría. Su empleo se justifica al demostrar que cualquier enunciado finitista que se derive con su ayuda es verdadero. Esto ocurre según él en caso de que la matemática clásica sea consistente. Arguye que la deducción de un enunciado finitista falso φ conduciría directamente a una contradicción, al ser su negación $\sim\varphi$ verificable por métodos finitistas.[8]

20. Hilbert quiere solucionar el problema de la consistencia a través de la formalización. A ésta le asigna el papel de simple instrumento en la investigación de la estructura deductiva de las teorías matemáticas preexistentes. En este sentido es erróneo pensar que sólo quisiera referirse a los signos, que fuese un defensor del formalismo a ultranza: la formalización es sólo un medio para eliminar la maquinaria transfinita, una representación.

21. No hay una definición precisa de los conceptos de "demostración finitista" y "formalización". No obstante, la reducción finitista no necesita ser clarificada. Una vez hecho el trabajo, el examen de los métodos utilizados descubrirá si son o no satisfactorios.

5. *El programa*

22. El Programa de Hilbert se resume así:

1º) Formalizar la Matemática Clásica.
2º) Demostrar que la formalización es (semánticamente) completa.[9]
3º) Demostrar con métodos finitistas que la formalización es consistente.

[8] Lo cual presupone que los métodos de demostración finitista están todos ellos incorporados en el sistema. Tal demostración de consistencia daría la razón a Hilbert cuando afirma que los elementos transfinitos no son sino nociones ideales cuyo único propósito es agilizar el desarrollo de la teoría.

[9] Semánticamente completa: que a cada enunciado verdadero de la matemática clásica corresponda una fórmula derivable en el sistema. Esta condición suele reemplazarse por la siguiente: demostrar que el formalismo es *sintácticamente* completo, es decir, que para toda fórmula φ sin variables libres se cumple que o ella o su negación $\sim\varphi$ es derivable en el sistema. Esta definición tiene la ventaja de ser enteramente sintáctica (sólo alude al sistema formal, no a sus interpretaciones) y por ello es preferible. Dichas condiciones son equivalentes en caso de que el sistema sea *correcto*: si φ es derivable en el sistema, entonces el enunciado que le corresponde en la matemática clásica es verdadero.

23. Hilbert reduce el problema de la consistencia a demostrar que hay una fórmula que no es derivable en el sistema.[10] Este último problema es materia de un tratamiento intuitivo: se trata de demostrar la imposibilidad de producir una derivación de cierta clase. La situación es similar a la que se presenta en la teoría elemental de los números cuando se demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional. En este caso el problema consiste en demostrar que es imposible encontrar dos enteros positivos a y b tales que $2a^2 = b^2$ (es decir, se trata también de una imposibilidad: la de producir dos símbolos numéricos con cierta propiedad. Una prueba formal, al igual que un símbolo numérico, es un objeto concreto, visible, y la condición de que la última fórmula de la prueba no sea una fórmula predeterminada es algo que se puede verificar por inspección directa. Como expresa Cavaillés: "*Un razonamiento escrito no nos puede engañar, pues en su diseño aparecerían las figuras excluidas*".

24. El programa de Hilbert es un examen matemático[11] de la lógica en su aplicación a las matemáticas con el fin de justificar sus métodos. En este sentido podemos repetir, con Cavaillés, que la posición filosófica de Hilbert es más bien la que propone una filosofía derivada de las matemáticas, una *filosofía matemática* y no la de una *filosofía de las matemáticas* que buscaría ajustar el trabajo concreto de los matemáticos a posiciones decididas fuera de este quehacer.

El programa es, a la vez, expresión matemática de un proyecto filosófico que busca fundamentar la matemática en lo que se percibe o es dable en la percepción.

25. El programa era *prima facie* razonable, pues las demostraciones de consistencia parecían depender exclusivamente del examen de configuraciones simbólicas directamente ligadas a la intuición sensible.

6. *Gödel*

26. La meta de la *teoría de la demostración*[12] era "*eliminar para siempre los problemas de fundamentación*". Como paso preliminar a la demostración de consistencia de la matemática clásica, Hilbert y sus seguidores pusieron a prueba su herramienta aplicando el método a la lógica misma y a algunos fragmentos de la Aritmética. Lo primero fue formalizar la lógica de primer orden y demostrar su consistencia con métodos finitistas. Realizada esta tarea dirigieron su atención a la teoría de los números. En este caso la formalización se realizó por etapas, considerando fragmentos sucesivos de la aritmética de Peano. En cada situación una prueba de consistencia finitista fue elaborada para el fragmento. En 1930 había razones para esperar que en poco tiempo el programa se vería coronado por el éxito. Escuchemos a Herman Weyl:

> Pero tan brillantes esperanzas fueron borradas con un descubrimiento debido a Kurt Gödel, en 1931, que ponían en duda todo el programa. Desde entonces la actitud prevaleciente ha sido de resignación. Los fundamentos últimos y el sentido de las matemáticas permanecen como problema abierto; no sabemos en qué dirección se encuentra la solución, ni siquiera sabemos si puede esperarse una respuesta objetiva final. "Hacer matemáticas" puede que sea una actividad creadora del hombre, como la música, cuyos productos en forma y sustancia están condicionados por la historia y por ello impiden una racionalización objetiva completa. ...
>
> Gödel demostró que en el formalismo de Hilbert, de hecho en cualquier sistema formal M que no sea demasiado restringido, suceden dos cosas raras: 1) se pueden encontrar proposiciones aritméticas φ de naturaleza relativamente elemental que son evidentemente ciertas pero no deducibles dentro del formalismo. 2) La fórmula ψ que expresa la consistencia del sistema M, no es deducible en M. Más precisamente, una deducción de φ o ψ dentro del formalismo M llevaría directamente a una contradicción en M, es decir a una deducción de la fórmula $\sim(1 = 1)$. Del primer hecho deducimos que los campos de las proposiciones accesibles al entendimiento y el de las accesibles a la deducción se traslapan, sin que ninguno de ellos con-

[10] Los formalismos considerados por Hilbert son inconsistentes si y sólo si todas sus fórmulas son derivables ahí. La razón es que toda tautología de la forma $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$ es un teorema y la regla A, $A \rightarrow B/B$ (*modus ponens*) es una de las reglas de inferencia. Por otra parte, si los números naturales están representados en el sistema, la fórmula puede especificarse con antelación. Hilbert elige una particularmente simple: $\sim(1 = 1)$. En consecuencia, la consistencia del sistema se sigue de la demostración de que "$\sim(1 = 1)$" no es un teorema. Esta demostración es, a la vez, justificación del método de los elementos ideales.

[11] El Programa tiene un sentido bien definido dentro de la matemática. Esto es así a pesar de la imprecisión de algunas nociones que en él intervienen, como, por ejemplo, la de "demostración finitista" o la de "formalización".

[12] En un sentido estricto, la teoría de la demostración es más general que la metamatemática, pues ésta última restringe voluntariamente sus métodos a métodos finitistas. No obstante, para Hilbert se trata de dos nombres para una misma teoría como lo será para nosotros en este trabajo.

tenga al otro. ... Aunque la idea de un mundo trascendente existente y completo en sí mismo es el principio sobre el que construimos el formalismo, este último en cualquier etapa fija tiene un carácter incompleto, ya que siempre habrá problemas, aun de simple naturaleza aritmética, que pueden formularse dentro del formalismo y verificarse por discernimiento, pero no verificarse por deducción dentro del formalismo.

El segundo teorema de Gödel es aun más inquietante, ya que nos confronta con esta alternativa: o bien el razonamiento por medio del cual se establece la consistencia del formalismo debe contener algún argumento que no posee contraparte formal dentro del sistema... o la idea de una demostración estrictamente "finitista" de consistencia debe descartarse por completo. (Herman Weyl, 1965).

27. Con asombrosa originalidad, Gödel nos muestra que la metamatemática, al igual que la matemática misma, es susceptible de ser tratada formalmente. Su mérito consiste en observar que, desde un punto de vista general, la naturaleza de los objetos considerados en la construcción de un sistema formal (símbolos, fórmulas, pruebas, etc.) es irrelevante. En consecuencia, éstos pueden reemplazarse por números naturales. El código de sustitución puede arreglarse de modo que las reglas del sistema, aquellas que rigen la formación de fórmulas y la derivación de teoremas, queden expresadas por simples operaciones aritméticas entre los números que las representan. De este modo los enunciados metamatemáticos se convierten en enunciados aritméticos y son, a su vez, susceptibles de formalización.[13]

Al procedimiento ideado por Gödel se le conoce bajo el nombre de *Aritmetización de la sintaxis*. Cuando se le aplica a una formalización de la aritmética se crea una situación peculiar: la metamatemática es ahora de la misma índole que la teoría formalizada y sus enunciados se pueden expresar en el sistema. De este modo el formalismo contendrá una representación de su metateoría.[14]

[13] La fase del formalismo que perdura hasta 1930 es una etapa un tanto ingenua aunque sumamente creativa. Si bien es cierto que en ella se forjan los conceptos y las técnicas fundamentales para el trabajo ulterior, también es cierto que es un tanto acrítica e ignorante de sus limitaciones. Dicha fase llega a su fin en 1931 con la publicación de los teoremas de Gödel, donde se conduce a la metamatemática a una segunda fase más crítica y reflexiva.

[14] Este término no es utilizado por Hilbert. De hecho el único que él usa con el prefijo "*meta*" es "metamatemática". No obstante, el sentido de la palabra "*metateoría*" es análogo al de la anterior y significa "*teoría matemática que versa sobre un sistema o lenguaje formal*".

7. *Los teoremas*

28. No podemos dejar de lado una exposición más detallada de los teoremas de Gödel. Su demostración para un sistema formal **M** tiene como base la posibilidad de *codificar* (es decir, representar a través de un código) parte de la metateoría de **M** *en* **M**, con lo cual se descubre el siguiente ciclo:

1. A través de la aritmetización, las propiedades metateóricas de **M** (formuladas primeramente en español) se expresan en forma aritmética.

2. A través de la codificación, los enunciados aritméticos que expresan propiedades de **M** quedan formalizados en **M**.

3. A través de la aritmetización, ciertas fórmulas de **M** que originalmente se interpretan como enunciados aritméticos, también se interpretan como enunciados metateóricos.

Se produce con ello la posibilidad de encontrar fórmulas que, a través de la aritmetización, se interpretan como referidas a ciertas expresiones formales que coinciden con ellas mismas. En otras palabras, se establece la posibilidad de encontrar (vía la aritmetización) fórmulas autorreferentes.

En la demostración del Lema Diagonal se indica cómo se construyen tales fórmulas y en los teoremas subsiguientes (es decir, los teoremas de Gödel) se muestra qué se puede hacer con ellas.

29. No pretendemos detallar la demostración de estos teoremas. En consecuencia, no vamos a pormenorizar la descripción del sistema **M**, ni a explicar cómo es que se lleva a cabo la codificación de su metateoría. En vez de ello supondremos que el sistema formal **M** satisface las condiciones que a continuación se enuncian.[15]

Condición primera. Hay una función *inyectiva* $g: C \rightarrow N$ con las siguientes propiedades:

1º) Para todo $c \in C$, el valor $g(c)$ es calculable a través de un procedimiento finitista.

2º) Hay un procedimiento finitista para decidir si un número natural n es la imagen de alguna componente de **M**. En caso de que haya una componente c cuya imagen es n, el procedimiento permite determinarla de un modo efectivo.

[15] Se llama *componentes* de **M** a sus símbolos primitivos, términos, fórmulas y pruebas formales. Al conjunto de componentes de **M** se le denota con la letra "*C*".

Se supone que el sistema formal **M** incluye los axiomas y las reglas de inferencia del cálculo de predicados. Quien esté familiarizado con dicho cálculo no tendrá dificultad para entender los temas que aquí tratamos.

De g se dice que es una *correspondencia* de Gödel y al número $g(c)$ asociado a cada componente de **M** se le llama *número de Gödel* de c. A través de la correspondencia de Gödel las proposiciones metamatemáticas relativas a las componentes de **M** se convierten en proposiciones aritméticas relativas a sus números de Gödel. Esta es la base para la *aritmetización* de la sintaxis de **M**.

Condición segunda. **M** está provisto de *numerales* (términos cerrados) $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ etc. que representan a los números naturales 0, 1, 2 etc.[16]

Si c es una componente de **M** con número de Gödel g, entonces $\ulcorner c \urcorner$ denota al numeral $\bar{g}$ (es decir, $\ulcorner c \urcorner = \bar{g}) \bar{c})$. En lo que sigue la expresión $\ulcorner c \urcorner$ sirve como un código (un nombre) para c en **M**. En particular, a cada fórmula de **M** le corresponde un término cerrado $\ulcorner A \urcorner$ al que nos referiremos como *el código* de A.

Condición tercera. **M** es consistente.[17]

Condición cuarta. Hay un término $sb(x, y)$ en **M** con la propiedad siguiente: si $A(x)$ es una fórmula cuya única variable libre es x y t es un término de **M**, entonces $\vdash s\,b(\ulcorner A(x) \urcorner, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner A(t) \urcorner$ (es decir, se prueba en **M** que $sb(\ulcorner A(x) \urcorner, \ulcorner t \urcorner)$ es el código de la fórmula que se obtiene al substituir en $A(x)$ las presencias libres de x por t).

Condición quinta. Hay un predicado binario $PR(x, y)$ en **M** que cumple lo siguiente:

1º) Si h es el número de Gödel de una prueba de la fórmula con número de Gödel k, entonces $\vdash PR(\bar{h}, \bar{k})$.

[16] **M** es, por lo general, una formalización de la aritmética de Peano en un lenguaje de primer orden, su lenguaje contiene una constante $\bar{0}$ que representa al número natural O y un símbolo funcional s que representa a la función sucesor. En tal caso los numerales son las expresiones "$\bar{0}$", "s$\bar{0}$", "ss$\bar{0}$" etc. que se forman anteponiendo un número finito de veces el símbolo "s" a la constante "$\bar{0}$".

[17] Algunas definiciones útiles:
M es *consistente* $\leftrightarrow$ hay una fórmula A que no es derivable en **M**.
M es *consistente* $\leftrightarrow$ ninguna contradicción $A \wedge \sim A$ es derivable en **M**
M es *completo* $\leftrightarrow$ para todo enunciado E de **M**, $\vdash E$ o $\vdash \sim E$.
La fórmula A es indecible en **M** $\leftrightarrow$ ni A ni $\sim A$ son teoremas de **M**.
M es ω-inconsistente $\leftrightarrow$ para algún predicado $P(x)$ se tiene que $\vdash \sim P(\bar{0})$. $\vdash \sim P(\bar{1})$, $\vdash \sim P(\bar{2})$ etc. (es decir, $\vdash \sim P(\bar{k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\vdash \exists x P(x)$.
M es ω-consistente $\leftrightarrow$ no es ω-inconsistente.
(Nota: La expresión "$\vdash \varphi$" se lee "φ" es un teorema de M").

2º) Si h no es el número de Gödel de una prueba de la fórmula con número de Gödel k, entonces $\vdash \sim PR(h, k)$.[18]

Condición sexta. El predicado $Teo(y) \equiv \exists x PR(x, y)$ satisface las siguientes *condiciones de derivación* de Hilbert y Bernays:

D_1 Si $\vdash A$, entonces $\vdash Teo(\ulcorner A \urcorner)$.
D_2 $\vdash Teo(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow Teo(\ulcorner Teo(\ulcorner A \urcorner) \urcorner)$.
D_3 $\vdash Teo(\ulcorner A \urcorner) \wedge Teo(\ulcorner A \rightarrow B \urcorner) \rightarrow Teo(\ulcorner B \urcorner)$.

Donde A y B son enunciados de **M**.

La fórmula "Teo(y)" representa en **M** a la propiedad sintáctica "y *es un teorema de* **M**". No obstante, no siempre es el caso que $\vdash A \leftrightarrow \vdash Teo(\ulcorner A \urcorner)$. La razón es que el cuantificador existencial que figura en ella la convierte en un enunciado *ideal*, y puede suceder que el sistema, aún siendo consistente, pruebe enunciados ideales falsos (es decir, que se tenga $\vdash Teo(\ulcorner A \urcorner)$ y $\nvdash A$ para algún enunciado A).

Lema 1. Si **M** es ω-consistente y $\vdash Teo([A])$, entonces $\vdash A$.

Demostración

Supóngase que $\nvdash A$. En tal caso los enunciados

"0 no es una prueba de la fórmula con número de gödel $g(A)$".
"1 no es una prueba de la fórmula con número de gödel $g(A)$".
"2 no es una prueba de la fórmula con número de gödel $g(A)$".

(uno para cada $k \in \mathbb{N}$) son todos verdaderos. Como $PR(x, y)$ codifica pruebas de **M** en **M**, se tiene que

$\vdash \sim PR(\bar{0}, \ulcorner A \urcorner)$.
$\vdash \sim PR(\bar{1}, \ulcorner A \urcorner)$.
$\vdash \sim PR(\bar{2}, \ulcorner A \urcorner)$.
....

(una fórmula $\sim PR(\bar{k}, \ulcorner A \urcorner$ para cada $k \in \mathbb{N}$) y como el sistema es ω-consistente, entonces $\nvdash \exists PR(x, \ulcorner A \urcorner)$ (es decir, $\nvdash Teo(\ulcorner A \urcorner)$.
$\therefore$ si $\vdash Teo(\ulcorner A \urcorner)$, entonces $\vdash A$.

[18] Se dice en este caso que el predicado $PR(x, y)$ codifica pruebas de **M** en **M**.

Lema 2 (Lema diagonal). Sea $A(x)$ una fórmula cuya única variable libre es x. Existe un enunciado B con la propiedad de que $\vdash A(\ulcorner B \urcorner) \leftrightarrow B$ (es decir, hay un punto fijo B de $A(x)$).

Demostración

Sea $D(x) \equiv A(sb(x, x))$ la diagonalización de $A(x)$, $d = \ulcorner D(x) \urcorner$ y $B \equiv D(d)$.

$\vdash B \leftrightarrow D(d)$	Por definición de B
$\vdash D(d) \leftrightarrow A(sb(d, d))$	Por definición de D
$\vdash A(sb(d, d)) \leftrightarrow A(sb(\ulcorner D(x) \urcorner, d))$	Por definición de d
$\vdash A(sb(\ulcorner D(x) \urcorner, d)) \leftrightarrow A(\ulcorner B \urcorner)$ y $\vdash B \leftrightarrow A(\ulcorner B \urcorner)$ [19]	$\vdash sb(\ulcorner D(x) \urcorner, d) = \ulcorner D(d) \urcorner$ por la condición cuarta.

Primer teorema de Gödel. Si $\vdash G \leftrightarrow \sim Teo(\ulcorner G \urcorner)$,[20] entonces:

1. $\nvdash G$
2. $\nvdash \sim G$ (esto último bajo la hipótesis de ω-consistencia).

Demostración de 1

1. G	teorema por hipótesis.
2. $G \rightarrow \sim Teo(\ulcorner G \urcorner)$	teorema por definición de G.
3. $\sim Teo(\ulcorner G \urcorner)$	consecuencia inmediata de 1 y 2.
4. $Teo(\ulcorner G \urcorner)$	de 1 por D_1.
5. $\sim Teo(\ulcorner G \urcorner) \wedge Teo(\ulcorner G \urcorner)$	consecuencia lógica de 3 y 4.

y **M** sería inconsistente.

[19] En cierto sentido el enunciado B es autorreferente, pues resulta "equivalente" a una fórmula que "habla de él". Cabe señalar que dicha autorreferencia sólo se da a través de la aritmetización, interpretando al numeral $\ulcorner B \urcorner$ como un código de B.

[20] La existencia del enunciado G está garantizada por el lema diagonal. A G se le llama *enunciado de Gödel.* Es equivalente (en **M**) a una fórmula que, interpretada en la metateoría de **M**, afirma: "El enunciado G es inderivable en **M**".

Demostración de 2

1. $\sim G$	teorema por hipótesis.
2. $\sim Teo(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow G$	teorema por definición de G.
3. $\sim G \rightarrow Teo(\ulcorner G \urcorner)$	contrapositiva de 2.
4. $Teo(\ulcorner G \urcorner)$	consecuencia inmediata de 1 y 3.
5. G	de 4 por el lema 1.
6. $G \wedge \sim G$	consecuencia lógica de 1 y 4.

y **M** sería ω-inconsistente.

Sea CON la fórmula $\sim Teo(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner)$. Metamatemáticamente la fórmula CON asevera la consistencia de **M** al afirmar "*la contradicción $G \wedge \sim G$ no es un teorema de* **M**".

Lema 3. $\vdash G \leftrightarrow CON$.

Demostración de $\vdash G \rightarrow CON$

1. $G \rightarrow \sim Teo(\ulcorner G \urcorner)$	teorema por definición de G.
2. $G \vee \sim G$	teorema: ley del tercero excluido
3. $(G \vee \sim G) \rightarrow (G \wedge \sim G \rightarrow G)$	teorema: tautología $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$.
4. $G \wedge \sim G \rightarrow G$	consecuencia inmediata de 2 y 3.
5. $Teo(\ulcorner G \wedge \sim G \rightarrow G \urcorner)$	de 4 por D_1.
6. $Teo(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner \rightarrow Teo(\ulcorner G \urcorner)$	de 5 por D_3.
7. $\sim Teo(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \sim Teo(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner)$	contrapositiva de 6.
8. $G \rightarrow CON$	de 7: $G \leftrightarrow \sim Teo(\ulcorner G \urcorner)$ y $CON \leftrightarrow \sim Teo(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner)$.

Demostración de $\vdash CON \rightarrow G$

1.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner \mathrm{Teo}((\ulcorner G \urcorner)\urcorner)$	teorema por D_2.
2.	$G \rightarrow \sim \mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner)$	teorema por definición de G.
3.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \sim G$	contrapositiva de 2.
4.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner \mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner)\urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner \sim G \urcorner)$	de 3 por D_1 y D_3.
5.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner \sim G \urcorner)$	transitividad de $\rightarrow$ a 1 y 4.
6.	$\sim G \rightarrow (G \rightarrow G \wedge \sim G)$	teorema: tautología $A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$.
7.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner \sim G \rightarrow (G \rightarrow G \wedge \sim G)\urcorner)$	de 6 por D_1.
8.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner \sim G \urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner G \rightarrow G \wedge \sim G \urcorner)$	de 7 por D_3.
9.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner G \rightarrow G \wedge \sim G \urcorner) \rightarrow (\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner))$	D_3.
10.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner \sim G \urcorner) \rightarrow (\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner))$	transitividad de $\rightarrow$ a 8 y 9.
11.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow (\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow (\mathrm{Teo}(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner))$	transitividad de $\rightarrow$ a 5 y 10.
12.	$\mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner) \rightarrow \mathrm{Teo}(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner)$	consecuencia lógica de 11.
13.	$\sim \mathrm{Teo}(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner) \rightarrow \sim \mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner)$	contrapositiva de 12.
14.	$CON \rightarrow G$	$G \leftrightarrow \sim \mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner)$ y $CON \leftrightarrow \sim \mathrm{Teo}(\ulcorner G \wedge \sim G \urcorner)$.

Segundo teorema de Gödel. $\not\vdash$ CON.

El lema 3 deja ver que el enunciado de Gödel es equivalente a la fórmula CON que afirma la consistencia de **M**. La inderivabilidad de CON se sigue de la inderivabilidad de G, lo cual se demostró en el primer teorema. Cabe señalar que CON puede ser cualquier fórmula de la forma $\sim \mathrm{Teo}(\ulcorner \sim H \urcorner)$, donde H es un teorema de **M**.

30. El primer teorema de Gödel fue modificado por Barkley Rosser en 1936 de modo que la existencia de enunciados indecidibles se sigue de la sola hipótesis de consistencia. Con ello se demuestra que la más poderosa hipótesis de ω-consistencia es innecesaria.

31. El teorema de Gödel-Rosser nos hace ver que ningún sistema formal **M** para la aritmética puede ser consistente y completo a la vez. En cada uno de ellos se puede construir un enunciado G que es verdadero (en la aritmética) pero que no puede derivarse ni refutarse en **M** en caso de que **M** sea ω-consistente. La demostración es efectiva en el sentido de que en ella se indica como se construye el enunciado indecidible G.

32. La incompletud es un defecto en tanto que el sistema es incapaz de probar todas las verdades que son enmarcables en él. Esta limitación es inherente a todo sistema formal con cierta fuerza expresiva y no se puede remediar.[21]

8. *Consecuencias para el programa*

33. La primera tarea que debía cumplir el programa era la de formalizar la matemática clásica en un sistema en el que a todo enunciado matemático verdadero correspondiese una fórmula derivable. A esta propiedad correspondería la completud sintáctica del sistema. Como demuestra Gödel en el primero de sus teoremas, dicha tarea es irrealizable. La creencia de Hilbert en la existencia de un sistema de tal naturaleza fue infundada.[22]

[21] No podemos dejar de lado el siguiente comentario, no exento de tintes dramáticos, de H. Weyl *"No nos sorprende que un trozo concreto de naturaleza, considerado en su existencia fenomenológica aislada, desafíe nuestro análisis por su inexhaustibilidad y su incompletación; ..."Pero es sorprendente que algo creado por la mente misma, la sucesión de enteros, la cosa más simple y diáfana para la mente constructiva, tome un aspecto similar de misterio y deficiencia cuando se le ve desde el punto de vista axiomático"*. (H. Weyl, 1949).

[22] Así mismo, Hilbert creyó que toda verdad aritmética tenía una demostración aritmética. Esto también lo desmiente el primer teorema de Gödel si por "aritmético" se entiende "expresable en la aritmética clásica".

34. El segundo teorema de Gödel nos hace ver que la consistencia de la aritmética formal sólo se puede demostrar con métodos que no son formalizables en el sistema. Esta dificultad se erige como un obstáculo prácticamente insalvable para el programa, pues los métodos finitistas propuestos por Hilbert son, en esencia, aritméticos: tienen como principio la consideración intuitiva de combinaciones elementales de signos y son, por ello, expresables en la aritmética. Esto hace que la posibilidad de encontrar una demostración finitista de consistencia para la matemática clásica sea poco probable: no es claro cómo podría ser una demostración finitista del tipo que Hilbert reclama que no fuese formalizable en un sistema para la matemática clásica.

35. La posibilidad de una demostración finitista no queda excluida con el segundo teorema de Gödel. Así lo hace saber él mismo en su trabajo de 1931:

> Quiero señalar expresamente que el teorema... no contradice el punto de vista formalista de Hilbert. Dicho punto de vista presupone tan sólo la existencia de una demostración de consistencia en la que nada sino métodos de demostración finitistas sean utilizados, y es concebible la existencia de una demostración finitista de consistencia que no pueda expresarse en el formalismo P. (Gödel, 1931).

Si bien el teorema no es concluyente respecto a la imposibilidad de una demostración finitista de consistencia, cabe señalar que nada en concreto se ha hecho en este terreno. En todo caso, esta discusión se sucita a causa de la imprecisión de la noción de "demostración finitista" y sólo puede resolverse favorablemente exhibiendo una demostración de consistencia que sea a todas luces finitista.

36. Gödel trata de ofrecer otras salidas a Hilbert, al menos en lo que respecta a las pruebas de consistencia. En un trabajo que titula *Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitista,* señala la necesidad de ampliar el punto de vista finitista de Hilbert:

> P. Bernays ha indicado en repetidas ocasiones que, en vista del hecho de la indemostrabilidad de la consistencia de un sistema formal con medios de demostración más reducidos que los del sistema mismo, es necesario —para demostrar la consistencia de la matemática clásica e incluso la de la teoría de los números— traspasar el marco de la matemática finitista de Hilbert. Puesto que la matemática finitista se define como la matemática de la evidencia intuitiva, esto significa... que para demostrar la consistencia de la teoría de los números necesitamos ciertos conceptos *abstractos.* Aquí hay que entender por conceptos abstractos (o no-intuitivos) aquellos que son esencialmente de segundo (o mayor) orden, es decir, que no contienen propiedades y relaciones de *objetos concretos* (por ejemplo, de combinaciones de signos), sino que se refieren a *construcciones del pensamiento* (por ejemplo, demostraciones, enunciados significativos, etc.) y donde en las demostraciones se utilizan intuiciones sobre estas últimas que no se desprenden de las propiedades combinatorias (espacio-temporales) de las combinaciones de signos que las representan, sino solamente de su significado. (Gödel, 1958).

Basándose en tal ampliación, Gödel ofrece una demostración de la consistencia de la aritmética intuicionista y, por tanto, de la aritmética clásica (la cual demostró en 1932 que es equivalente a aquella). ¿Qué valor puede otorgarse a tales demostraciones de consistencia Evidentemente, uno inferior al que se le daría a una demostración finitista. En particular, la demostración de Gödel no es finitista en la medida en que trata con objetos no concretos (las llamadas *funciones calculables de tipo finito*). El que sus métodos se consideren satisfactorios es una cuestión subjetiva. Tal es el precio que se debe pagar por toda demostración de consistencia: el de un nivel sustancialmente menor de evidencia. Como señala H. Weyl, "La frontera de lo que es intuitivamente aceptable se ha hecho otra vez muy vaga" (H. Weyl, 1949).

37. En lo concerniente a la consistencia de la matemática clásica, no hay ninguna esperanza de que con los métodos conocidos se pueda demostrar. Pese a todo, Hilbert albergó hasta su muerte la ilusión de alcanzarla. Juzgó que si bien era necesario recurrir a conceptos externos al sistema, éstos serían finitistas, intuitivamente concretos y aceptables. Su actitud nos muestra el desmedido optimismo que siempre le acompañó, su confianza ilimitada en el poder del entendimiento humano.

Epílogo

En relación al programa de Hilbert, Kreisel escribe:

> En tanto que comprensión filosófica global, el programa original de Hilbert ha fracasado y, como es usual con los grandes esquemas, no deja entrever qué podría ocupar su lugar. Ante la pregunta "de qué

trata la matemática?", Hilbert podría haber dicho: de los hechos aritméticos y combinatorios de las matemáticas finitistas. Aun cuando esto de suyo puede sucitar problemas, tal "reducción" habría sido satisfactoria. La respuesta de Hilbert es simplemente falsa, aun para el débil sentido de "equivalencia de contenido" que se expresa en enunciados de deducibilidad e indeducibilidad formal. Además, no tenemos idea de en qué clase de investigación podríamos encontrar una respuesta satisfactoria a dicha pregunta. (G. Kreisel, 1958).

La respuesta de Hilbert es falsa en virtud de que el razonamiento matemático no es reducible al razonamiento finitista. Como Gödel demuestra, no es posible inscribir el cuadro de las matemáticas existentes en el marco de un formalismo adecuado, ni dar cuenta de algunas propiedades de los sistemas formales cuando los métodos de demostración se restringen a los finitistas. Esto plantea el problema de precisar si el programa de Hilbert es parcialmente realizable, i.e. de determinar si alguna *porción* de la matemática transfinita puede justificarse a través de una demostración finitista de consistencia. También señala la necesidad de recurrir a otros métodos que los finitistas para atacar el problema del fundamento.[23] Ante la imposibilidad de una reducción finitista surge la pregunta: ¿a qué teorías constructivas se puede reducir la matemática clásica? La búsqueda de un *programa reduccionista* de tal índole es materia de investigación en la actualidad (W. Siege, 1988). Empero, a diferencia de Hilbert, no se ve en ello un camino para *"eliminar para siempre los problemas de fundamentación"*. Se trata, más bien, de una investigación en torno a los fundamentos en la que se explora a la relación entre la matemática constructiva y la no constructiva.

En lo que atañe a la filosofía hemos de observar que el recurso a la intuición pura del signo fue insuficiente. La tentativa de Hilbert, a saber *fundamentar la matemática en lo que se percibe o es dable en la percepción,* fue una quimera. Quedó como problema abierto el saber si hay un principio epistemológico sobre el que la matemática se pueda fundamentar.

[23] G. Kreisel sugiere que en lugar de comprender el uso de los símbolos transfinitos con una sola clase de razonamiento elemental, habrá una jerarquía de métodos progresivamente menos elementales aunque constructivos, i.e. una jerarquía de programas de Hilbert.

BIBLIOGRAFÍA

Barwise, J. (editor)
[1977] *Handbook of Mathematical Logic,* Springer.

Benacerraf, P. y Putnam, H. (editores)
[1964] *Philosophy of Mathematics selected readings,* Prentice-hall.

Bernays, P. y Hilbert, D.
[1934] *Grundlagen der Mathematik,* vol. 1, Springer.
[1939] *Grundlagen der Mathematik,* vol. II, Springer.

Boolos, G. y Jeffrey, R.
[1974] *Computability and Logic,* Cambridge University press.

Cavaillès, J.
[1937] *Méthode Axiomatique et Formalisme,* Herman, París.

Gödel, K.
[1931] *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines I,* traducido por J. Mosterin en [1981].
[1958] *Sobre una ampliación todavía no utilizada del punto de vista finitario,* traducido por J. Mosterin en [1981].

Hilbert, D.
[1904] *On the foundations of logic and arithmetic,* traducido al inglés por J. van Heijenoort en [1967].
[1922] *Neubegründung der Mathematik,* en Hilbert [1935], vol. 3.
[1925] *On the infinite,* traducido al inglés por J. van Heijenoort en [1967].
[1935] *Gesammelte Abhandlugen,* Springer.

Körner, S.
[1960] *Introducción a la Filosofía de la Matemática,* Siglo XXI, editores, S. A.

Kreisel, G.
[1958] *Hilbert's programme,* en Benacerraf y Putnam [1964].

Ladrière, J.
[1969] *Limitaciones internas de los Formalistas,* Editorial Tecnos.

Mosterin, J. (editor y traductor)
[1981] *Kurt Gödel: Obras Completas,* Alianza Universidad.