Sapiens v.8 n.2 jul. 2007

Concepciones de los estudiantes sobre la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función cuadrática y sobre la gráfica de h: R-{0}→R definida por $h(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Wladimir Serrano Gómez
UPEL - Instituto Pedagógico de Miranda
José Manuel Siso Martínez

Resumen
En este trabajo se describen, a través de un *estudio de caso*, las *concepciones* de los estudiantes del segundo curso de cálculo en el *Instituto Pedagógico de Miranda* con respecto a la *inyectividad*, *sobreyectividad* y *biyectividad* de una función, en particular de la función cuadrática, y de la gráfica de la función *h: R-{0}→ R* definida por $h(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ Se muestra cómo conceptos de los cuales es racional suponer que son comprendidos por los estudiantes del nivel superior encuentran, en el grupo estudiado, malentendidos y errores (Serrano, 2004a). Se observaron malentendidos o errores referidos a (1) la representación gráfica de las funciones descritas, (2) en los conceptos de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función, (3) en el concepto de función, e incluso (4) en la idea de argumentar. El trabajo pretende también llamar la atención sobre la importancia de explorar y discutir las concepciones que poseen los estudiantes de los objetos matemáticos –el profesor no puede asumir a priori que ciertos conceptos básicos en que se fundan las nuevas nociones matemáticas a estudiar son ya comprendidos por los estudiantes, e invitar a la reflexión del proceso enseñanza/aprendizaje –en correspondencia con los resultados obtenidos.
Palabras clave: Concepciones de los Estudiantes; Inyectividad, Sobreyectividad, Biyectividad y Gráfica de una Función; Malentendido; Error.

Abstract

In this work they are described, through a case study, the conceptions of the students of the second course of calculus in the Instituto Pedagógico de Miranda with respect to the inyectividad, sobreyectividad and biyectividad of a function (the quadratic function) and the graph of function h: R-{0}→R defined by $h(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ **.** We showed how concepts of which he is rational to suppose that they are understood by the students of the superior level, find, in the studied group, malentendidos and errores (Serrano, 2004a). We observed malentendidos and errors related to: (a) the graphical representation of functions, (b) the inyectividad, sobreyectividad and biyectividad, (c) the function concept, and (d) in the idea to argue. The work also tries to call the attention on the importance of exploring and of discussing the conceptions that have the students on the mathematical objects –the professor cannot suppose to prior that certain basic concepts already are understood by the students, and, on the other hand, invite to the reflection on the process education-learning of the mathematical.
Key words: Conceptions of the Students; Inyectividad, Sobreyectividad, Biyectividad and Graph of a Function; Malentendido; Error.

* Recibido: octubre 2006.
Aceptado: julio 2007.

Introducción

Son poco comunes los estudios de conceptos, técnicas e ideas matemáticas en los estudiantes que se suponen básicas para el ámbito universitario; sin embargo, estos estudios pueden reportar malentendidos y errores[1], y en general, concepciones que se distancian del significado que se les atribuye en la matemática. Lo que se puede evidenciar a través de diagnósticos y de la discusión de ideas básicas al comenzar un curso. No nos referimos sólo a las que corresponden a los temas estudiados en el curso que "le precede" en el marco de la estructura curricular, sino también a las que corresponden a fundamentos de la matemática escolar, tal es el caso de la idea de función, gráfica de una función (en las que se concentra este estudio), conjunto, figuras planas y cuerpos geométricos, promedios y desviaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones, inferencia, deducción, entre otros. De hecho, Eisenberg (1991) en su trabajo Functions and associated learning difficulties, en el marco de la perspectiva de investigación denominada Pensamiento Matemático Avanzado, considera que el concepto de función en tanto una de las ideas fundamentales de las matemáticas modernas es precisamente uno de los de mayor dificultad para su enseñanza y aprendizaje. Eisenberg (1991) sostiene que constituye una "fantasía teórica" considerar que un alumno dominará este concepto por medio de su participación en una clase "bien estructurada" que sigue el patrón exposición-ejercicios; critica, además, el predominio de la caracterización analítica del concepto de función sobre su representación visual, así como el énfasis en los ejemplos, proponiendo que adicionalmente se expongan y estudien lo que denomina no-ejemplos, esto es, propone el estudio de objetos que no cumplan las condiciones definitorias de las funciones para así enriquecer la comprensión del concepto en sí. Se puede criticar también el tratamiento formalista de este concepto en el aula de matemáticas, es decir, el proceso caracterizado por la estructura definición-ejemplos-ejercicios-(aplicación) y proponer una aproximación intuitiva, bien con base en la resolución de problemas o en la estrecha relación de la matemática con la realidad, con la cotidianidad. En este último punto son importantes los aportes que se han hecho desde la Educación Matemática Crítica [ver, por ejemplo, Skovsmose (1999), Mora (2002, 2005), Serrano (2005a), Serres y Serrano (2004)].

Otras críticas, siguiendo a Cornu (1991), se dirigen al privilegio que se hace, en la educación, al uso de las propiedades de los conceptos (se refiere al de límite, observación que extendemos a los conceptos de función, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, así como a muchos otros que son propios de la matemática escolar y universitaria) y no al estudio del concepto en sí. En la práctica educativa, el concepto puede ser "estudiado" sólo a través de "enunciar la definición". Para otros procesos resulta más compleja la situación, la demostración es uno de ellos. Al respecto, Thurston (1994) señala en su ensayo On proof and progress in mathematics: "you learn from other people some idea of the proofs" [tú aprendes de otras personas alguna idea sobre la demostración] (p. 168). En la matemática escolar e incluso en la universitaria es común que el estudio se concentre en las propiedades de los objetos matemáticos y no, como expresa Cornu, en el objeto en sí. Por ejemplo, pensemos en la explicación que aportan los estudiantes ante términos como "mínimo común múltiplo", "máximo común divisor", "triángulo", "círculo", "circunferencia" (ver Serrano, 2005b, 2005c), "grupo", "espacio vectorial", "tangente", "asíntota", etc. Las concepciones de los estudiantes obedecen entonces a un complejo sistema de construcción de significados tanto en el contexto del aula de matemáticas como fuera de éste.

Concepciones de los Estudiantes

Pero, ¿qué se entiende por concepción? Balacheff (1995) nos da una idea de ello: una concepción es como un "instante" del conocimiento, para un tema en una situación determinada. Balacheff considera que las concepciones se caracterizan por un conjunto de problemas a los cuales se asocia la concepción, un conjunto de operaciones relacionadas con estos problemas, de un sistema de representación y de una estructura de control. La caracterización de Balacheff se encuentra en un plano lógico, al cual se aproxima su descripción desde las producciones escritas y en general del contenido de su comunicación. No vemos las concepciones asociadas únicamente a los problemas matemáticos ya que éstas de dan con respecto a objetos matemáticos, definiciones, algoritmos, técnicas de demostración, a los mismos ejemplos, teoremas, etc. En tal sentido, a éstas se asocian ideas (y no sólo operaciones) así como cierto tipo de representación. El "control" a que alude Balacheff lo vemos en el uso que de esta concepción se hace en una situación en particular, que de alguna manera sostiene a la misma concepción.

Se puede entender a las concepciones de los estudiantes como un conocimiento de cierto objeto matemático[2]. Este conocimiento puede ajustarse o no a las propiedades lógicas que definen al objeto matemático, en tal sentido son cambiantes y susceptibles de ser sustituidas por otras. Los alumnos se forman concepciones de nociones complejas como la de límite de una función, derivada, integral, espacio vectorial, etc., así como de conceptos básicos como el de conjunto, función y gráfica de una función. El profesor espera, con respecto a estos últimos, que los alumnos los manejen, que constituyan parte de los cimientos en el estudio de la matemática escolar; no espera encontrar (por ejemplo, a un nivel universitario) malentendidos o errores (Serrano, 2004a; 2004b) asociados a sus concepciones.

A los efectos de este estudio distinguimos entre concepciones y creencias. Las creencias representan una perspectiva de investigación que despertó en parte de la comunidad de investigadores en Educación Matemática desde la década que inicia en 1980. Éstas se asocian, en buena parte por la repercusión del trabajo doctoral de Thompson (reseñado en Thompson, 1984), a las opiniones, preferencias y actitudes de estudiantes y profesores con respecto a la matemática, a su enseñanza y aprendizaje así como las relaciones de las creencias con la práctica educativa (en esta línea se encuentran, por ejemplo, los trabajos de Schoenfeld, 1983; Cobb, 1985; Munetsi, 1995; Alatorre, 1991, entre otros). Hay autores, como Matos (1992), que toman con el mismo sentido "concepciones" y "creencias", pero las circunscriben también a los puntos antes señalados. No obstante, aquí nos interesamos por lo que los alumnos entienden de un objeto matemático, no de la matemática misma o de la educación matemática.

Gómez y Carulla (1998, p. 592) en su trabajo Concepciones de los estudiantes sobre el dominio de la función cúbica definen las concepciones como un conocimiento parcial, las cuales conforman estados en el proceso de comprender. Consiste en una concepción que "ha funcionado con la experiencia previa y que le permite al estudiante sentirse cómodo cuando resuelve tareas" (Ibíb.). Estos autores encontraron en los estudiantes[3] que "el dominio y el rango de la función cúbica es (sic) un subconjunto propio de los números reales y se puede mirar como un intervalo alrededor del punto de inflexión de la función" (ob. cit., p. 592). Gómez y Carulla hablan de concepciones válidas e inválidas, naturalmente en correspondencia con el conocimiento matemático establecido; sin embargo, se puede pensar en casos como el referido por Pimm (1999, pp. 127-128) en el que una alumna tenía su propio concepto de diagonal (inválido en comparación con lo que se entiende generalmente por tal) de un polígono y, no obstante, el uso que hacía de éste era consistente: Pimm le preguntó a una niña de 13 años cuántas diagonales tenía cada uno de los polígonos que le presentaba (ver la Figura 1). Ante esto, Pimm prosiguió: ¿podrías mostrarme un triángulo que sólo tuviera una diagonal? ¿y una figura de cuatro lados con menos de cuatro diagonales? ¿Y que pasa con una de ocho lados?

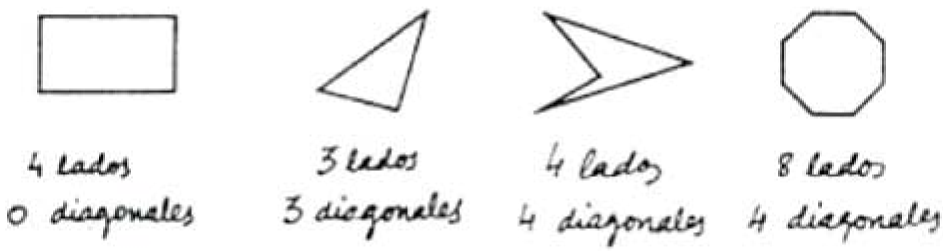

Figura 1. *Uso de la noción de diagonal por una niña de 13 años (Pimm, 1999)*

La niña reportó por escrito (a petición de Pimm) lo que sigue (ver la Figura 2). La niña asumía por diagonal "lado inclinado", y como se señaló antes, hacía un uso consistente de su noción. En la práctica se pueden encontrar otros ejemplos de situaciones como esta asociados a otros conceptos y técnicas (como al resolver ecuaciones de primer grado, en la potenciación, en el cálculo matricial, en la solución de ecuaciones logarítmicas, etc.). Basado en estas ideas, no se hablará aquí de concepciones "válidas" o "inválidas" como se hace en Gómez y Carulla (1998), considerando el hecho de que éstas obedecen en cierta forma al significado construido en un contexto en particular.

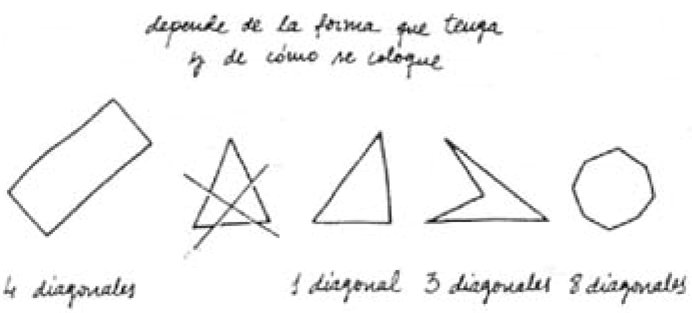

Figura 2. *Explicación de la idea de diagonal por parte de niña de 13 años (Pimm, 1999).*

Cornu (1991), aunque refiriéndose solamente a la noción de *límite*, otorga un papel muy importante a las *concepciones espontáneas* en la adquisición de ésta. Afirma que ellas no desaparecen con la actividad de aula, sino que se "mezclan" con el nuevo conocimiento; afloran junto con el conocimiento, que Cornu llama científico, en el proceso de resolución de problemas, tal es el caso de la niña "de" Pimm. En las concepciones espontáneas, de acuerdo con Cornu, se encuentran los obstáculos a que hacen referencia Brousseau, Fabre y Sierpinska [basados, naturalmente, en la idea de obstáculo de Bachelard (1938)]. Aquí preferimos no llamar a las concepciones "espontáneas"[4], sino sólo concepciones, por el hecho de que es razonable suponer que en ellas se encuentren elementos propios de la conceptuación y pensamiento matemáticos y también, conocimientos alejados del significado o validez que se le da en la ciencia matemática. Por ejemplo, en la concepción de diagonal de un polígono como "lado inclinado", se mantienen "válidos" los conceptos de polígono, triángulo, rectángulo, etc., y de lado de un polígono. Es natural suponer que ello se presenta para otras concepciones (de otros objetos). Es importante que los estudiantes manifiesten sus concepciones (o concepciones espontáneas, de acuerdo a Cornu, 1991) y no únicamente al comienzo de cada curso, sino en todo su desarrollo. Esto puede, por una parte, abrir espacios para que las concepciones evolucionen (lo que puede entenderse como que se superen los malentendidos y los errores) a través de la discusión en clase, y por otra, que los alumnos adquieran conciencia sobre sus propios malentendidos y conocimientos, que quizás es lo más relevante.

Las Concepciones, el Aula de Matemática y la Comunicación

Las concepciones de los estudiantes (y de los profesores) guardan una estrecha relación con el contexto en que se lleva a cabo el proceso enseñanza/aprendizaje de la matemática. En este contexto, fundamentalmente en el aula, es donde se estructuran las concepciones, donde evolucionan. Sin embargo, con ésta también se estructuran y evolucionan ciertos malentendidos y errores como parte de las concepciones. El aula es a la vez un espacio en el que se "da" significado a los objetos matemáticos y en el que se "altera" este significado. En palabras de Beyer (1999):

> Es particularmente en ese lugar [en el aula] en el cual es frecuente encontrar un proceso de comunicación plagado de *ruidos*, lleno de *abusos de lenguaje*, *de sobreentendidos*, *contextos poco claros*, y en fin, un sinnúmero de elementos que traen como resultado -en gran medida- un discurso caótico y poco comprensible para el alumno (p. 3).

Cita, por ejemplo, la común representación que hacen los profesores de matemática y los textos de los triángulos. En ésta, como consecuencia de su uso, los alumnos asocian propiedades que no son tales: como el hecho de que uno de sus lados siempre sea representado de manera paralela a una horizontal imaginaria (la de la pizarra, cuaderno, etc.) y también que con frecuencia el triángulo representado es isósceles [lo cual se asocia con una representación prototípica (ver Beyer, 1999)], propiedades que no son intrínsecas a la del triángulo –de hecho, es poco común que los profesores en el contexto del aula de matemáticas e incluso en los libros de texto representen triángulos con sus lados no paralelos a las horizontales imaginarias que se han descrito antes. Los profesores y los textos deben enriquecer la representación que hacen de los triángulos, por ejemplo, y de los objetos matemáticos en general, para evitar ciertos malentendidos en las concepciones de los alumnos (ver también Serrano, 2005b).

Vemos entonces en la comunicación un elemento importante para la estructuración de las concepciones, su evolución y también para hacer conscientes a los estudiantes de los malentendidos y errores presentes en sus concepciones.

Así, las concepciones de los objetos matemáticos y la comunicación de ideas matemáticas en el aula representan, de acuerdo con el criterio del autor, tanto como las *creencias* sobre la matemática y su enseñanza, temas de relevancia para la Educación Matemática. Es en la comunicación que pueden encontrarse factores y respuestas a los problemas que más adelante se refieren. La comunicación no es un proceso neutro en el marco de la práctica educativa. Además, la construcción de significados para los objetos matemáticos que se encuentren en correspondencia con el significado que para ellos se tiene en la ciencia matemática no es algo que se asocie con una estructura comunicativa restringida, tal es el caso de la estructura exposición-ejercicios que se ha comentado antes.

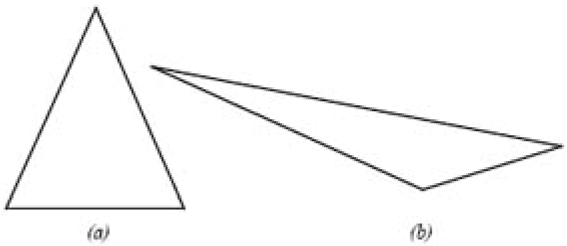

Figura 3. *(a) Representación prototípica del triángulo. b) Este tipo de representaciones es poco común en los textos y en la práctica educativa.*

Método

El método aplicado en esta investigación es el *estudio de caso* referido a un grupo en su totalidad (Anguera, 1992) y centrado en las concepciones de los estudiantes sobre la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad así como de la gráfica de una función en particular. Este estudio se llevó a cabo en el segundo curso de cálculo del *Instituto Pedagógico de Miranda* durante la etapa inicial del semestre 2002-I (Marzo-Julio de 2002). El curso se ocupa básicamente de desarrollar las ideas del *cálculo diferencial* de funciones de variable real. Esta investigación encontró su motivo en el desarrollo de una *actividad inicial*, de tipo diagnóstico, con todos los estudiantes del curso. Esto evidenció una serie de malentendidos y errores relacionados con conceptos básicos como los de *función*, *tipos de funciones* y su uso en la solución de ejercicios y problemas. Si bien estos temas no se contemplan en el contenido del curso, su relevancia y carácter elemental constituyeron las bases para gestionar la solución en el aula de los problemas citados. Los problemas observados se dieron a conocer a los estudiantes desde la actividad inicial. Se acordó junto a ellos un *plan de trabajo* que se orientara hacia la solución de éstos, la cual consistió en la discusión por parte del grupo de las actividades propuestas en la referida actividad, así como de otras que surgieron posteriormente. Se contó en algunas de las sesiones de discusión con la observación de un profesor que reportó sus apreciaciones sobre la dinámica interactiva y sobre el uso de los conceptos matemáticos.

Sobre los Estudiantes y el Momento

La *experiencia* se desarrolló en un grupo de 12 estudiantes del segundo curso de cálculo ofrecido a los estudiantes de las especialidades Matemática y Física del *Instituto Pedagógico de Miranda* "José Manuel Siso Martínez" en la sede de *La Urbina* en 2002. Este curso se denomina **Cálculo Diferencial** y **Matemática Aplicada II** (según se curse el profesorado en Matemáticas o en Física, respectivamente), aunque se ofreció en un único grupo. El requisito para el curso descrito es *Introducción al Cálculo* (para Matemática) y *Matemática Aplicada I* (para Física). Ocho de los estudiantes correspondían a la Especialidad Matemática y cuatro a la de Física. Todos los estudiantes se encontraban en el segundo semestre aún cuando se tenían estudiantes con ingreso al Instituto de hasta 4 años. Uno de los alumnos tenía aprobado varios cursos en la carrera de Matemática de la *Universidad Central de Venezuela*. El cuadro siguiente presenta esta descripción.

Cuadro 1: *Descripción de los estudiantes por especialidad y cohorte.*

Est.	Especialidad	Cohorte
1	M	96-II
2	M	99-I
3	M	98-II
4	M	99-II
5	M	95-II
6	M	98-II
7	M	99-II
8	M	00-II
9	F	96-II
10	F	97-II
11	F	99-II
12	F	97-II

Nota. Est.: Estudiante; M: Matemática; F: Física; Cohorte: Período de ingreso al Instituto.

Sobre la Actividad Asignada
Ésta consistió en la solución individual de los problemas siguientes:

(1) La función *g: R+→R* definida por *g(x)* = *x2*, ¿es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Justifique su respuesta.

(2) Represente gráficamente la función descrita a continuación:

$h: R-\{0\}\to R$ definida por $h(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$

La intención del autor con la actividad (1) era concluir que la descripción del dominio junto con la regla son elementos que definen a la función, y no solamente la regla (esto es: *g(x)* = *x2*). Con la actividad (2) se pretendía observar los métodos de graficación que utilizaban los estudiantes. Como se verá más adelante, los estudiantes mostraron muchos otros malentendidos y errores en las concepciones de estos (y de otros) conceptos. La primera de las actividades es *elemental* en el sentido de que debe constituir un conocimiento básico para los estudiantes de bachillerato y naturalmente para el nivel superior, la segunda, en cambio, no lo es, pues requiere de técnicas "más avanzadas" de graficación; la inclusión de estas actividades en la prueba obedeció a la exploración de las ideas manejadas por los estudiantes. El tiempo utilizado por los estudiantes fue aproximadamente de una hora (fundamentalmente dedicado a la segunda actividad asignada). El profesor supervisó la actividad y aportaba sugerencias ante las preguntas de los alumnos. Solicitó además el reporte escrito de su trabajo.

Observaciones Generales
El Cuadro 2 resume la *ponderación* de las actividades 1 y 2 desarrolladas por los alumnos.

Cuadro 2: *Número de respuestas correctas e incorrectas por actividad.*

		Act. 1		Act. 2	
Est.	Cohorte	C*	I	C	I
1	96-II		1		1
2	99-I		1		1
3	98-II	1			1
4	99-II		1	-	-
5	95-II		1	-	-
6	98-II	1			1
7	99-II	1			1
8	00-II	1			1
9	96-II	-	-		1
10	97-II	1		-	-
11	99-II	1			1
12	97-II	1		-	-
TOTALES		7	4	0	8

Notas. **Act. 1**: Actividad 1. **Act. 2**: Actividad 2. **C***: Respuesta correcta (aunque no presentaron argumentos para ella). C: Respuesta correcta. **I**: Respuesta incorrecta. -: No contestó.

Entre los problemas detectados se encuentran los siguientes: se observaron *malentendidos* o *errores* referidos a la representación gráfica de las funciones descritas, así como en los conceptos de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función, e incluso en el concepto de función (descritos en la sección que sigue). También se observaron malentendidos con respecto a la idea de *argumentar*. Estos problemas motivaron la presente investigación orientada tanto a describirlos como a buscar su solución.

En Cuanto al Concepto de Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad

Las siguientes son las respuestas aportadas por los estudiantes en cuanto al concepto de **inyectividad** de la función dada (se copian textualmente).

(a) Es inyectiva porque todos los valores del dominio tienen llegada.

(b) Ya que todo el conjunto de partida tiene una imagen en el conjunto de llegada.

(c) Porque x tiene un solo elemento en y.

(d) Cada elemento del conjunto de partida le corresponde una y sólo una imagen en el conjunto de llegada.

(e) Para cada valor de x existe un único valor de y ó g(x).

(f) Cada valor que tome el dominio tendrá una y única imagen en el rango.

(g) Cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen en el conjunto de llegada.

Se deduce de las respuestas algunas imprecisiones en el *concepto mismo de inyectividad de una función* e incluso en el *concepto de función*. También se presentan imprecisiones en cuanto al significado de objetos matemáticos como *imagen de un elemento a través de una función dada* y *unicidad de un elemento*. Por ejemplo, se expresa "tienen llegada" o "tiene un solo elemento en y" refiriéndose a la imagen de un elemento de $R+$ por la función dada. Algunos estudiantes utilizan indistintamente los términos "tiene una imagen" por *tiene una sola imagen* o bien por *tiene una y única imagen*. En la respuesta (a) se confunde la idea de inyectividad de una función con la idea de función.

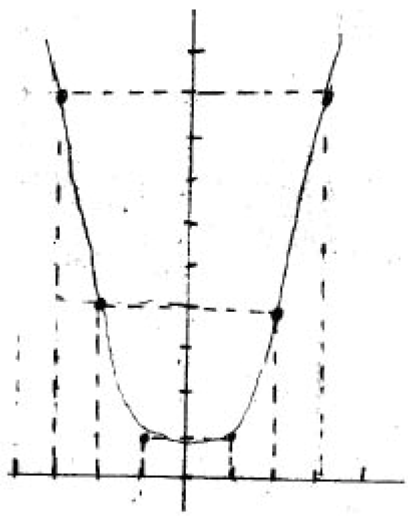

Figura 4. *Gráfico construido por uno de los estudiantes para $R^+ \to R$, definida por $g(x)=x^2$*

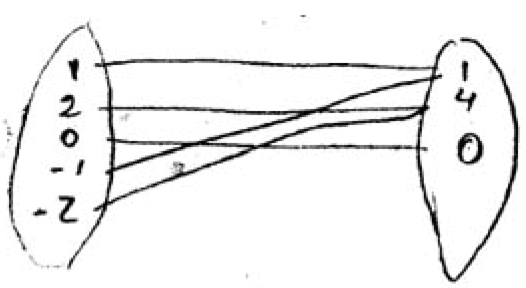

Figura 5. *Gráfico utilizado por un estudiante como argumento para sostener que g es inyectiva*

Otro hecho que resalta es que ninguno de los estudiantes procedió a verificar que la función *g* es inyectiva (ver columna C* en el Cuadro 2), algunos procedieron a efectuar pocos cálculos de imágenes de números naturales y partiendo de estos enunciaron que *g* es inyectiva. Un alumno representó gráficamente la curva asociada a la función *g* en el plano, no obstante, no consideró que $g: R+\to R$ y asumió que $g: R\to R$ (ver la Figura 4); además, el gráfico presenta errores para los puntos *(x, x2)* donde $-1\leq x\leq 1$. Si bien efectuar algunos cálculos de imágenes para elementos de *R+* aporta ideas generales sobre el comportamiento de la función dada, se observa que no se intentaron métodos para probar el tipo de función en que puede clasificarse *g*. Observación que también se aplica a las siguientes respuestas sobre sobreyectividad y biyectividad de *g*.

Un alumno se apoyó en el gráfico presentado en la Figura 5 para expresar que la función *g* es inyectiva. Tanto en el gráfico anterior como en este se observa cierto uso de técnicas de representación gráfica de funciones pero no la interpretación de los gráficos para ilustrar conceptos matemáticos asociados a las funciones.

Hubo dos respuestas que clasificaron la función dada como sobreyectiva:

(a) Es sobreyectiva porque el conjunto de llegada está sobrecargado.

(b) Porque y tiene una imagen en x.

Se observan aquí imprecisiones sobre el concepto de función sobreyectiva y en el uso de términos matemáticos. Se emplean términos como "sobrecargado" para referirse a que cada elemento de *R* es imagen de un elemento de *R+*.

Cuatro alumnos etiquetaron como biyectiva la función descrita:

(a) Es biyectiva porque cada punto de partida tiene un punto de llegada.

(b) Ya que toda imagen tendrá una preimagen diferente.

(c) Ya que si se hace en forma de conjunto se puede observar que cada elemento de partida va a tener su elemento de llegada.

(d) Porque es inyectiva y sobreyectiva.

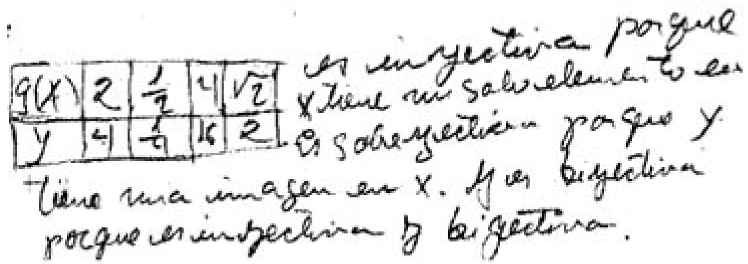

Figura 6. *Gráfico utilizado por un estudiante como argumento para sostener que g es inyectiva*

También aquí se presentan malentendidos y errores sobre el concepto y su uso, en el sentido de que cuatro de los alumnos enunciaron que *g* es biyectiva sin intentar comprobar si *g* era inyectiva y sobreyectiva. Destacan a su vez el empleo de términos como "elemento de partida", "hace en forma de conjunto", "elemento de llegada", "punto de partida" y "punto de llegada". Naturalmente, los malentendidos detectados en el uso de los conceptos inyectividad y sobreyectividad de funciones conllevan otros en conceptos asociados a ellos, tal es el caso de la biyectividad. El ejemplo que sigue, ilustrado en la Figura 6, describe esta idea. Destaca así la importancia de los malentendidos en el *uso* de conceptos matemáticos *asociados* (en el sentido de que están definidos a partir de otros, como por ejemplo la biyectividad de funciones, etc.).

En Cuanto a los Métodos de Graficación de la Función h

En la sección anterior se describió el método de graficación de la curva correspondiente a la función *g*, este método también fue utilizado por todos los alumnos para representar gráficamente la función *h*. En todos los casos se construyó una tabla de valores para representar puntos en el plano. Además, el número de puntos calculados osciló entre 3 y 7. Sólo un estudiante consideró valores de x que no eran enteros [probó con $x=2, \frac{1}{2}$, $4, \sqrt{2}$; para la actividad (1)], lo que evidencia poca familiaridad con los números reales no enteros. De seguidas se exponen algunos de los gráficos construidos (ver la Figura 7).

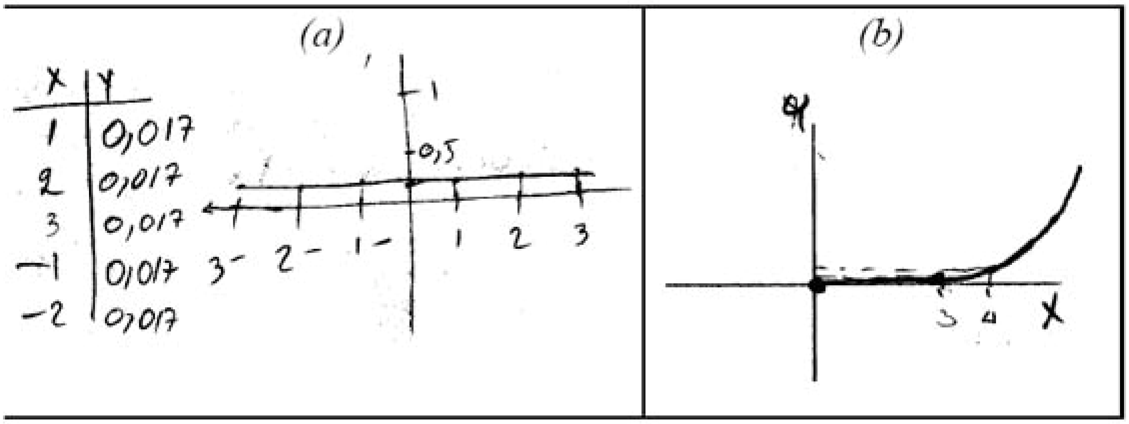

Figura 7. *Dos de los gráficos construidos para h.*

Uno de los estudiantes hizo corresponder la curva (a) con la representación gráfica de la función *h*; sin embargo, no indicó los cálculos, pero se aprecia el malentendido $\frac{sena}{b} = sen\frac{a}{b}$, valor que aproxima a *0,017*. Y apuntó lo siguiente:

$$h(0) = \frac{sen0}{0} \Rightarrow \frac{0}{0},$$

$$h(4) = \frac{sen4}{4} \Rightarrow sen\frac{1}{4}$$

y

$$h(3) = \frac{sen3}{3} \Rightarrow sen\frac{\frac{3}{2}}{3}.$$

También en una tabla los pares ordenados *(0,0)*, *(4,1/4)* y *(3,1/3)*.

Observándose los malentendidos: *(i)* $\frac{sen a}{b} = sen \frac{a}{b}$ *, (ii) asumir que la función está definida en x=0, aún obteniendo la indefinición* $\frac{0}{0}$*; y (iii) representar solamente la curva para algunos* $x \geq 0$*.*

Sobre los Resultados del Plan de Trabajo

Ante estas concepciones se acordó con los estudiantes un *plan de trabajo* (durante las sesiones iniciales del curso y al cual se le dio continuidad para tratar otros conceptos) con la intención para solventar los problemas observados a través de la discusión. En su desarrollo se observó lo siguiente: (a) *Sobre la interacción en el aula*: inicialmente sólo 3 alumnos intervenían regularmente (casi siempre después de las preguntas que realizaba el profesor); eventualmente para plantear dudas sobre los problemas y pocas veces sobre comentarios de técnicas de demostración, propiedades y conceptos. La exposición de soluciones o avances en la solución de los problemas por parte de los estudiantes se dio inicialmente de forma escasa, preferían comentar los problemas apoyándose en sus apuntes. Además, no todos los alumnos intentaban resolver los problemas (en el sentido de dedicar atención a estos). Hecho que puede identificarse con una percepción de la actividad matemática en el contexto del aula como aplicación de técnicas, e incluso, con la idea (o costumbre) de asociar la sesión de clase centrada en la exposición por parte del profesor (recordemos aquí la estructura *exposición-ejercicios*).; (b) *¿Cómo utilizan los alumnos lo trabajado en clase para su aprendizaje?* De acuerdo con los comentarios al abordar los problemas, los estudiantes se interesaron por las técnicas y los métodos, no así por los conceptos y su uso en la solución de problemas. Idea que puede asociarse con la visión algorítmica de la matemática escolar y universitaria que ha sido común tanto en los ámbitos nacional como internacional; (c) *Algunos de los avances relacionados con la interacción en el aula* alcanzados con el grupo (tal es el caso de la participación de todos los alumnos en la discusión y en la actividad matemática) se debieron a la conformación de subgrupos de trabajo y la proposición de problemas e interpretaciones a exponer y discutir ante todo el grupo. En este punto la discusión buscaba la participación del grupo, el análisis e interpretación de los conceptos vinculados a los problemas y la distinción de las concepciones que implícita o explícitamente tenían de estos conceptos matemáticos y de las técnicas asociadas a ellos. Se dio especial atención a las discusiones de los malentendidos y errores que surgían durante la actividad matemática individual y colectiva de los estudiantes.

Conclusiones

Una de las conclusiones que se derivan del estudio, considerando el tipo de concepciones que poseen los estudiantes, es que el profesor no puede sobrentender como "comprendidos" por los estudiantes los conceptos básicos en que deben fundarse las nuevas nociones a estudiar en determinado curso. De hecho, para el autor constituyó una gran sorpresa observar malentendidos y errores en las concepciones de los estudiantes (del primer año universitario) con respecto a la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función cuadrática y del gráfico de la función *h* (descrita antes). Más aún, se observaron otros malentendidos en conceptos de los cuales no se pensó en recolectar información (el autor al comienzo de la experiencia los sobreentendía "comprendidos") tal es el caso del mismo concepto de función, la poca familiaridad con probar valores reales no enteros del argumento, uso de "argumentos" como $\frac{sen a}{b} = sen \frac{a}{b}$, uso de términos como "elemento de partida", "hace[r] en forma de conjunto", "elemento de llegada", "punto de partida" y "punto de llegada", y la poca familiaridad que evidenciaron para construir representaciones gráficas de funciones trigonométricas.

Recomendaciones

El tipo de concepciones reportadas por los estudiantes del primer año universitario (considerados en este estudio) representa una invitación para que los profesores abran espacios de diálogo y discusión para que los estudiantes manifiesten sus concepciones, no sólo de los objetos matemáticos que tengan que ver con el curso sino también de otras entendidas o sobrentendidas como básicas (de las que parecía lógico suponer que no existían malentendidos o errores). Los resultados obtenidos deben implicar a su vez la necesaria reflexión del proceso enseñanza/aprendizaje por parte de los profesores y de la comunidad de Educación Matemática en general. También, los investigadores (incluidos los profesores) pueden detener su mirada en el estudio de las concepciones de los alumnos sobre objetos matemáticos que se "sobreentienden" como "comprendidas". E incluso, estudiar las mismas concepciones de los profesores (no sólo de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, por ejemplo) sino de los mismos objetos matemáticos que referimos antes. Al respecto, Gómez y Carulla (1998) encontraron en uno de los profesores del grupo que observaron, gráficas con errores similares a los que mostraron sus estudiantes. Idea que se extiende a muchos otros conceptos matemáticos, como por ejemplo los objetos geométricos, nociones como la distancia, área y volumen, sistema de coordenadas, espacio vectorial, polinomios, etc. Por otra parte, estudios similares pueden realizarse en otros niveles y modalidades de la educación, por ejemplo, en la Educación Básica, Media, Diversificada y Profesional. Las concepciones junto con las creencias representan pilares importantes para la reflexión teórico-práctica de la Educación Matemática.

Notas

[1]. Algunos autores asocian malentendido con error, si bien existen muchas relaciones, en realidad son fenómenos distintos. Los malentendidos se entienden como interpretaciones alejadas del significado dado a algo (objeto matemático, definición, representación gráfica, etc.) por convención en un grupo (escolar, etc.) o en una comunidad (de matemáticos, etc.); en cambio, el error no obedece a interpretar con un "significado alejado" algo, sino a una equivocación o a un olvido (ver Serrano, 2004a).
[2]. Haremos uso del término "objeto" pero en realidad queremos abarcar con él a los citados antes: definiciones, algoritmos, técnicas de demostración, gráfica de una función, etc.
[3]. De *nivel* universitario.
[4]. Cornu lo hace así para distinguir el conocimiento que representan las concepciones del conocimiento científico.

Referencias

1. Alatorre, S. (1991). Los contextos, las creencias y las intuiciones: acerca de Cobb, Trersky y Kahneman. *Educación Matemática*, 3(1), 40-57.

2. Anguera, M. (1992). *Metodología de la observación en las ciencias humanas.* Madrid: Cátedra.

3. Bachelard, G. (1938). *La Formation de1 Espirit Scientifique.* Paris: Presses Universitaires de France.

4. Balacheff (1995). Conception, connoissance et concept. En: D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.

5. Beyer, W. (1999). El significado en matemática: un problema didáctico. *Enseñanza*

de la matemática, 8(1), 3-13.

6. Cobb, P. (1985). Two children's anticipation, beliefs, and motivations. *Cognitive Science*, 7, 329-363.

7. Cornu, B. (1991). Limits. En: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Holland: Kluwer Academic Publishers.

8. Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Holland: Kluwer Academic Publishers.

9. Gómez, P. y Carulla, C. (1998). Concepciones de los estudiantes sobre el dominio de la función cúbica. En: C. Cruz, Y. Serres, W. Beyer, J. Mosquera y O. Millán, *Memorias. III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 591-596). Caracas: Asociación Venezolana de Educación Matemática.

10. Matos, J. (1992). Atitudes e concepçoes dos alunos: definiçoes e problemas de investigaçao. *Educaçao Matemática*, Coleçao temas de investigaçao, Instituto de Inovaçao Educacional da Seçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educaçao.

11. Mora, C. D. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana.* Caracas: Ediciones de la Biblioteca de la Universidad Central de Venezuela.

12. Mora, C. D. (Coord.), Becerra, R., Rossetti, C., Serrano, W., Beyer, W., Millán, L., Vernaez, G., Serres, Y. Reverand, E. y Rojas, A. (2005). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

13. Munetsi, C. (1995). Traditional beliefs in the mathematics classroom. *Mathematics Teacher*, 151, 19-21.

14. Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Morata.

15. Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions, and metacognition. As driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 7, 329-363.

16. Serrano, W. (2004a). Algunos malentendidos y errores en educación matemática. Ponencia presentada en el II Simposio Venezolano de Investigación en Educación Matemática y 6ta Sesión del Seminario Nacional Permanente de Enseñanza de la Matemática, Universidad Nacional Abierta, Caracas.

17. Serrano, W. (2004b). *Elementos de álgebra: unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al Álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez"*, Trabajo de grado de Maestría no publicado, Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Caracas.

18. Serrano, W. (2005a). La alfabetización matemática. En: D. Mora (Coord.), R. Becerra, C. Rossetti, W. Serrano, W. Beyer, L. Millán, G. Vernaez, Y. Serres, E. Reverand y A. Rojas, *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina* (pp. 243-276). Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

19. Serrano, W. (2005b). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 75, 131-164.

20. Serrano, W. (2005c). *Juegos de lenguaje en educación matemática.* Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda, República Bolivariana de Venezuela.

21. Serres, Y. y Serrano, W. (2004). Una propuesta de educación matemática crítica para Venezuela. Ponencia presentada en el V Congreso Venezolano de Educación Matemática y VII Jornada Centro-Occidental de Educación Matemática, Barquisimeto, Venezuela.

22. Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* Bogotá: Una empresa docente. [Traducción al español por Paola Valero del original en inglés *Towards a philosophy of critical mathematics education*, 1994, Kluwer Academic Publishers B.V.]

23. Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

24. Thurston, W. (1994). On Proof and progress in mathematics. *American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.