Tres aspectos del problema de Kepler

E. Piña Garza y J.L. del Río Correa
Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa,
55 534 Mexico, D.F., 09340 Mexico
e-mail: pge@xanum.uam.mx, jlrc@xanum.uam.mx

Recibido el 6 de septiembre de 2004; aceptado el 7 de diciembre de 2004

Éste es un trabajo de revisión donde se estudia el problema de Kepler y se plantea a partir de las propias leyes de Kepler, se construye la solución por los métodos del vector de Hamilton y del vector de Laplace-Runge-Lenz, y se concluye al expresar las coordenadas en función de la anomalía excéntrica.

Descriptores: Mecánica de dos cuerpos; problema de Kepler; vector de Hamilton; vector de Runge-Lenz; anomalía excéntrica.

This is a review paper where the Kepler's problem is studied starting from the Kepler's laws; the solution is constructed from the Hamilton's vector and the Laplace-Runge-Lenz vector methods, and is concluded when the coordinates are expressed in terms of the eccentric anomaly.

Keywords: Two-body problem; Kepler's problem; Hamilton's vector; Runge-Lenz vector; eccentric anomaly.

PACS: 95.10.Ce

1. Introducción

Este trabajo, de índole educativa, trata del problema mecánico del movimiento de dos cuerpos que interaccionan con la fuerza gravitacional de Newton. Nuestro objetivo en este trabajo es presentar algunas facetas de dicho problema desde perspectivas poco frecuentes en muchos textos de mecánica.

En la primera sección seguimos el procedimiento contrario al tradicional: en lugar de obtener las leyes de Kepler a partir de las ecuaciones de Newton [1], partimos de suponer las leyes de Kepler [2] y obtenemos información relevante al tratamiento posterior de Newton. Sin embargo, hacemos desde ahora hincapié en que usamos el cálculo diferencial e integral inventado por Newton.

En la segunda sección resolvemos el problema como se hace en cualquier curso tradicional, aunque usamos un método de solución iniciado por Hamilton [3] y seguido por el uso del vector de Laplace [4]. Nuestro enfoque no es desde luego original, si bien es directo y poco usado [5].

En la tercera sección escribimos las mismas ecuaciones en términos de la anomalía excéntrica. De nuevo caemos en temas conocidos para muchas personas, aunque no para todos los maestros y estudiantes.

2. Un acercamiento de las leyes de Kepler a la gravitación universal

En esta sección suponemos válidas las tres leyes de Kepler [2] para el movimiento de los planetas alrededor del Sol y obtendremos sus consecuencias directas.

Iniciamos con las primeras dos: los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos ocupa el Sol. La ecuación de la elipse en coordenadas polares r, θ es

$$r(1-\epsilon\cos\theta)=\frac{b^2}{a}\,, \tag{1}$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente, $\epsilon = c/a$ es la excentricidad de la elipse y c es la distancia del centro a cualquiera de los focos. La segunda nos dice que el radio vector (segmento que une el centro del Sol al centro del planeta) recorre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir el área de un sector entre dos radios vectores, uno de los cuales se toma como referencia, tiene velocidad constante de crecimiento. En coordenadas polares la derivada de dicha área respecto al tiempo es la mitad de $r^2\dot\theta$, (donde el punto sobre una letra denota la derivada respecto al tiempo), por lo cual dicha velocidad constante debe ser igual al área de la elipse πab, dividida por el tiempo T que tarda en recorrerla, tiempo que se llama el período de la órbita:

$$r^2\dot\theta=\frac{2\pi ab}{T}\,. \tag{2}$$

En lo que sigue necesitamos la derivada respecto al tiempo de la segunda ley de Kepler, [Ec. (2)], que resulta en

$$2r\dot r\dot\theta+r^2\ddot\theta=0\,,$$

la cual usaremos dividida por la distancia r,

$$2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta=0\,. \tag{3}$$

De forma semejante, se requiere derivar la primera ley de Kepler dos veces respecto al tiempo para darnos

$$\dot r(1-\epsilon\cos\theta)+r\epsilon\dot\theta\operatorname{sen}\theta=0$$

y

$$\ddot r(1-\epsilon\cos\theta)+(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)\epsilon\operatorname{sen}\theta+r\dot\theta^2\epsilon\cos\theta=0.$$

Pero el segundo término de esta ecuación tiene un factor nulo, igual al de la Ec. (3), por lo que encontramos también

$$\ddot r(1-\epsilon\cos\theta)+r\dot\theta^2\epsilon\cos\theta=0. \tag{4}$$

Queremos para lo que sigue tener al factor $1-\epsilon\cos\theta$ (que también aparece en la ecuación de la elipse) como factor común en el miembro izquierdo de esta ecuación. Para ello agregamos el término $-r\dot{\theta}^2$ en ambos miembros

$$(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)(1-\epsilon\cos\theta)=-r\dot{\theta}^2\,. \tag{5}$$

Despejamos el primer factor, que después escribimos en función del radio vector r; con ayuda de las Ecs. (1) y (2), de las dos primeras leyes de Kepler, se tiene

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\frac{-r\dot{\theta}^2}{1-\epsilon\cos\theta}=-\frac{4\pi^2a^3}{T^2\,r^2}\,. \tag{6}$$

La tercera ley de Kepler dice que la constante en el miembro derecho (la cual está dividida por r^2) es la misma para todos los planetas.

Consideramos ahora al vector de posición de la elipse en coordenadas polares:

$$\mathbf{r}=r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\\ 0\end{pmatrix}\,. \tag{7}$$

La velocidad del planeta, derivada respecto al tiempo de este vector, es igual a

$$\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\\ 0\end{pmatrix}+r\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

Su aceleración, derivada respecto al tiempo de la velocidad, es

$$\ddot{\mathbf{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\\ 0\end{pmatrix}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\,. \tag{9}$$

De los dos vectores en el miembro derecho el segundo es cero por estar multiplicado por el factor nulo (3) y el otro va en la dirección radial. Como la Ec. (3) es una consecuencia directa de la segunda ley de Kepler, se concluye también que esta ley implica el carácter radial de la aceleración. El vector en la dirección radial tiene un factor conocido dado en la Ec. (6) por lo que llegamos al resultado

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{4\pi^2a^3}{T^2\,r^2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\\ 0\end{pmatrix}=-\frac{4\pi^2a^3}{T^2\,r^3}\mathbf{r}, \tag{10}$$

donde de nuevo hacemos notar que de acuerdo a la tercera ley de Kepler el factor constante en el miembro derecho es el mismo para todos los planetas.

Este resultado nos permite hacer un acercamiento a la ley de gravitación universal a partir de las tres leyes de la Kepler.

3. Una solución al problema de Kepler

El problema mecánico de Kepler es el estudio del movimiento de dos partículas de masas m_1 y m_2 y posiciones $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ de acuerdo a las ecuaciones de Newton, en presencia de una fuerza conservativa derivable de un potencial gravitacional

$$V=-\frac{\kappa}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\,, \tag{11}$$

donde $\kappa=Gm_1m_2$ y G es la constante de la gravitación universal.

Conviene cambiar a las coordenadas del centro de masa $\mathbf{R}$ y posición relativa $\mathbf{r}$, mediante la transformación de coordenadas

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{R}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} \tag{12}$$

y

$$\mathbf{r}_2=\mathbf{R}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r}\,, \tag{13}$$

porque entonces el centro de masa $\mathbf{R}$ se mueve con velocidad constante y la posición relativa $\mathbf{r}$ satisface la ecuación de movimiento

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{\kappa}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}\,, \tag{14}$$

donde t es el tiempo y m es la masa reducida

$$m=\frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,. \tag{15}$$

Comparando las dos Ecs. (10) y (14) se encuentra una pequeña diferencia porque el cociente $\kappa/m=G(m_1+m_2)$ no es una constante, como lo afirma la tercera ley de Kepler, sino depende de la masa m_2 del planeta, que aparece sumada a la masa del Sol m_1. Como la masa del Sol es mucho mayor que la de cualquier planeta, dicha suma no cambia mucho de valor de planeta a planeta.

Para integrar la ecuación de movimiento se acostumbra encontrar primero la conservación de energía (interna, sin la energía del movimiento del centro de masa), la cual es resultado de tomar el producto escalar de ambos miembros de la ecuación (14) con el vector velocidad. Ambos miembros resultan iguales a una derivada total respecto al tiempo, ecuación que se integra. La constante de integración E es la energía buscada:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2-\frac{\kappa}{|\mathbf{r}|}\,. \tag{16}$$

Encontramos en segundo lugar la conservación del vector $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$. La derivada temporal de este vector tiene dos sumandos que ambos son cero, debido a la propiedad de que el producto $\times$ de dos vectores paralelos es cero, se usa en uno de ellos el paralelismo entre la aceleración y el vector $\mathbf{r}$ de la Ec. (14).

El vector $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ es entonces un vector constante, perpendicular a sus dos factores $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$. Elegimos la dirección del vector constante en la del eje de coordenadas $\mathbf{k}$ y resulta entonces que los vectores $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ se encuentran en el plano coordenado perpendicular a $\mathbf{k}$ de las coordenadas cartesianas x e y. Escogemos estas coordenadas o las coordenadas polares correspondientes de acuerdo a las ecuaciones

$$\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\,,\quad \mathbf{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\operatorname{sen}\theta\\ 0\end{pmatrix}\,. \tag{17}$$

El vector $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ toma en estas coordenadas las formas

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2 \dot{\theta} \mathbf{k} = (x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k} \,. \tag{18}$$

Este vector es constante. La magnitud es constante. En su segunda forma $r^2\dot{\theta}$ se reconoce fácilmente como el doble de la velocidad areolar (con la cual recorre el área el radio vector), de acuerdo a la segunda ley de Kepler. Este resultado de Newton engloba la segunda ley de Kepler y la propiedad de tener al movimiento de cada planeta en un plano perpendicular a este vector. Esta idea se puede demostrar porque el producto $\times$ de dos vectores es igual al doble del área del triángulo formado por los dos factores que multiplica a un vector unitario perpendicular a ambos. En este caso los dos vectores se pueden elegir como $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}dt$, y tomar en cuenta que el producto $\times$ de vectores paralelos es cero.

Si anticipamos que estamos interesados en el caso en que la solución de (14) es una órbita periódica elíptica, de acuerdo a la primera ley de Kepler, podemos escribir esta constante como en (2):

$$r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{2\pi a\, b}{T}\,, \quad \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{2\pi a\, b}{T}\mathbf{k}\,. \tag{19}$$

De la cual viene también

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi a\, b}{T}\,\frac{1}{r^2}\,. \tag{20}$$

Del cociente miembro a miembro de las Ecs. (14) y (20) se encuentra la ecuación en coordenadas polares

$$m\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{d\theta} = m\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{\dot{\theta}} = -\frac{T}{2\pi a\, b}\frac{\kappa}{r}\,\mathbf{r} = -\frac{\kappa T}{2\pi a\, b}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{21}$$

la cual podemos integrar [3] respecto a θ para obtener la ecuación de Hamilton

$$m\dot{\mathbf{r}} = \frac{\kappa T}{2\pi a\, b}\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{p}\,, \tag{22}$$

donde $\mathbf{p}$ es un vector constante de integración en el plano de la órbita (porque los otros dos vectores en la misma ecuación están en dicho plano).

Reescribimos esta ecuación despejando $\mathbf{p}$, y con otra notación para el vector función de θ:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} - \frac{\kappa T}{2\pi a\, b}\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{23}$$

Multiplicamos con el producto $\times$ a ambos miembros de este vector constante por el vector constante

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}/\kappa = \frac{2\pi ab}{\kappa T}\mathbf{k},$$

cuyo producto es el vector constante [4,6] de Laplace-Runge-Lenz

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{\kappa} \times \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{2\pi mab}{\kappa T}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{k}\,, \tag{24}$$

que también se encuentra en el plano de la órbita. Por comodidad lo elegimos en la dirección del primer eje coordenado

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{25}$$

La ecuación de la órbita viene de tomar el producto escalar de ambos miembros de la Ec. (24) por el vector $\mathbf{r}$. El producto con el segundo sumando del miembro derecho de (24) hace aparecer (al intercambiar el producto escalar con el producto $\times$) al vector constante (18) de magnitud (19). Se encuentra

$$\epsilon x = r - \frac{4\pi^2 ma^2 b^2}{\kappa T^2}\,. \tag{26}$$

Ésta es la ecuación de una cónica cuya excentricidad es ϵ; elipse cuando este número se encuentre en el intervalo (0, 1). La constante en el segundo sumando del miembro derecho debe ser igual al llamado lado recto, igual a la distancia b^2/a. Igualando ambas expresiones se encuentra la propiedad

$$\frac{\kappa}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\,, \tag{27}$$

la cual se reconoce como la tercera ley de Kepler puesto que $\kappa/m = G(m_1 + m_2)$. Sin embargo, mientras que la primera y segunda leyes de Kepler son idénticas con el tratamiento de Newton, observamos que la tercera ley de Kepler es únicamente aproximada para Newton, con un error igual a despreciar la masa del planeta con respecto a la del Sol.

Elevando al cuadrado ambos miembros de la Ec. (24) se obtiene el cuadrado de la excentricidad c^2/a^2, pero del cuadrado del miembro derecho encontramos

$$\frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{2b^2}{a\kappa}(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\kappa}{r}) = 1 + \frac{2b^2 E}{a\kappa}$$

y utilizando la identidad $a^2 = b^2 + c^2$, se encuentra

$$E = -\frac{\kappa}{2a}\,. \tag{28}$$

El vector $\mathbf{p}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ de magnitud igual a $2\pi mac/bT$.

Observamos que los tres vectores constantes $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{p}$ y ϵ forman una base ortonormal donde se describe de manera natural el movimiento gravitacional de dos cuerpos. Este método de solución unifica los tratamientos de Hamilton y de Laplace y se encuentra con poca frecuencia en la literatura. Sin embargo para un tratamiento similar al de esta sección (véase la Ref. 5).

4. El problema de Kepler en función de la anomalía excéntrica

Escribimos en forma paramétrica la ecuación de una elipse en coordenadas cartesianas en función de la anomalía excéntrica [6]:

$$x = c + a\,\cos\psi \tag{29}$$

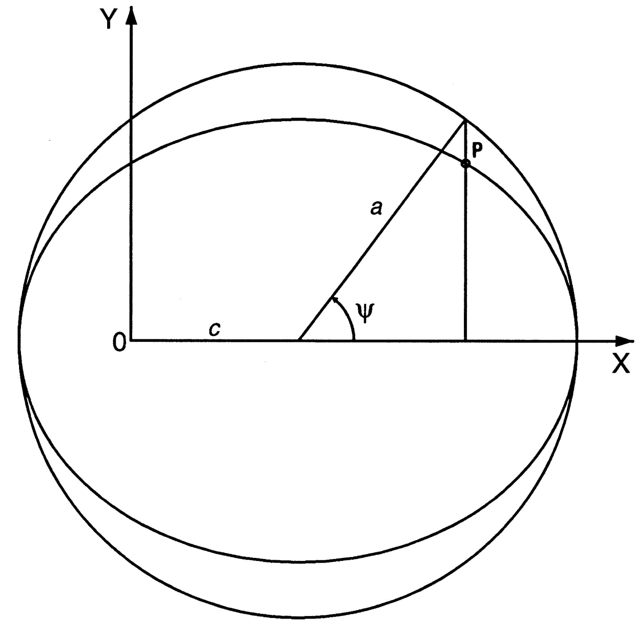

FIGURA 1. Significado geométrico de la anomalía excéntrica.

y

$$y = b \operatorname{sen} \psi, \tag{30}$$

donde ψ es la llamada anomalía excéntrica. En la Fig. 1 se ha dibujado esta anomalía como resulta de la Ec. (29). Si proyectamos la posición del planeta P sobre un círculo que tiene como diámetro al eje mayor de la elipse, entonces la anomalía excéntrica es el ángulo visto desde el centro con respecto a dicho diámetro.

De (29) y (30) viene la ecuación de la elipse al eliminar entre ellas al ángulo ψ:

$$\left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,; \tag{31}$$

el origen de coordenadas está en el foco izquierdo de la elipse.

De (29) y (30) obtenemos en función de ψ

$$x^2 + y^2 = c^2 + 2ac\cos\psi + a^2\cos^2\psi$$

$$+(a^2-c^2)\sin^2\psi = (a + c\cos\psi)^2\,, \tag{32}$$

por lo cual la distancia de un punto de la elipse al origen de coordenadas se escribe de forma simple en función de la anomalía excéntrica:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = a + c\cos\psi\,. \tag{33}$$

A continuación recordamos la segunda ley de Kepler que asegura es constante la velocidad areolar. En coordenadas polares r, θ, esta ley de Kepler se transforma a coordenadas cartesianas y se expresa enseguida en función de la anomalía excéntrica ψ:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi ab}{T} &= r^2\dot\theta = x\dot y - y\dot x = \dot\psi\left(x\frac{dy}{d\psi} - y\frac{dx}{d\psi}\right)\\ &= \dot\psi[(c + a\cos\psi)\, b\cos\psi + a\, b \operatorname{sen}^2\psi]\\ &= \dot\psi b\,(a + c\cos\psi) = \dot\psi\, b\, r\,,\end{aligned} \tag{34}$$

la cual dividida por $a\,b$ nos da

$$\frac{2\pi}{T} = \dot\psi\frac{r}{a} = \dot\psi\left(1 + \frac{c}{a}\cos\psi\right)\,. \tag{35}$$

Ésta es la segunda ley de Kepler en términos de r y ψ, la cual se integra para obtener la llamada ecuación de Kepler [4,6] que relaciona al tiempo t con la anomalía excéntrica:

$$\frac{2\pi t}{T} = \psi + \frac{c}{a}\operatorname{sen}\psi\,. \tag{36}$$

Se escribe la Ec. (35) en la forma

$$\dot\psi = \frac{2\pi\, a}{T}\frac{1}{r} = \frac{2\pi\, a}{T}\frac{1}{a + c\cos\psi}\,, \tag{37}$$

y las velocidades de las componentes cartesianas en función de ψ son

$$\dot x = -a\,\dot\psi\operatorname{sen}\psi = -\frac{2\pi a^2}{T}\frac{\operatorname{sen}\psi}{a + c\cos\psi} \tag{38}$$

y

$$\dot y = b\,\dot\psi\,\cos\psi = \frac{2\pi a\, b}{T}\frac{\cos\psi}{a + c\cos\psi}\,. \tag{39}$$

La energía potencial en función de ψ es

$$V = -\frac{\kappa}{r} = -\frac{\kappa}{a + c\cos\psi} \tag{40}$$

La constante de energía es entonces

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) - \frac{\kappa}{r} = \frac{m}{2}\frac{4\pi^2 a^2}{T^2}\\ &\times\frac{a^2\operatorname{sen}^2\psi + (a^2-c^2)\cos^2\psi}{(a + c\cos\psi)^2} - \frac{\kappa}{a + c\cos\psi}\\ &= \frac{m}{2}\frac{4\pi^2a^2}{T^2}\frac{a^2 - c^2\cos^2\psi}{(a + c\cos\psi)^2} - \frac{\kappa}{a + c\cos\psi}\\ &= \frac{m}{2}\frac{4\pi^2a^2}{T^2}\frac{a - c\cos\psi}{a + c\cos\psi} - \frac{\kappa}{a + c\cos\psi}\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Para que el miembro derecho sea constante, es decir, que no sea función de la variable ψ, se usa la tercera ley de Kepler (27):

$$\kappa = \frac{4\pi^2 m a^3}{T^2}\,, \tag{42}$$

y se encuentra nuevamente que

$$E = -\frac{4\pi^2 m a^2}{2T^2} = -\frac{\kappa}{2a}\,. \tag{43}$$

La Ec. (36) conserva una importancia práctica considerable para aquellos interesados en conocer la posición del planeta en función del tiempo. Esto requiere la inversión de la Ec. (36) que se hace numéricamente por distintos métodos. Por ejemplo, en la Ref. 5 se usa el método iterativo de Newton, el cual converge rápidamente aun para valores apreciables de la excentricidad.

5. Comentarios finales

Después de una introducción muy breve al problema de Kepler, en la Sec. 2 analizamos las consecuencias que se deducen del cálculo diferencial inventado por Newton cuando se aplica al análisis de las tres leyes de Kepler que satisfacen de forma aproximada los planetas del Sistema Solar; encontrando que la segunda ley de Kepler implica no sólo la conservación de la velocidad areolar, sino también que la aceleración es paralela a la dirección radial. Cuando se incorpora la primera ley de Kepler se encuentra que la magnitud de la aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el Sol y el planeta. En tanto que de la tercera ley de Kepler se infiere que la constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas del Sistema Solar.

Otro aspecto del problema se estudia en la Sec. 3, correspondiente al análisis newtoniano, en donde el punto de partida es la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal., que nos lleva a que la aceleración del movimiento relativo sólo tiene componente radial y es inversamente proporcional a r^2; si bien la constante de proporcionalidad es diferente para todos los planetas, por lo que la tercera ley de Kepler es válida en la medida que se puede aproximar la suma de la masa del Sol y del planeta por la masa del Sol.

Una consecuencia directa de las ecuaciones de movimiento a la Newton es la conservación del vector $\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, lo cual engloba la segunda ley de Kepler, además de predecir que la órbita está contenida en un plano perpendicular a este vector. Se sigue un método poco habitual, en donde se muestra que al incorporar la conservación de $\mathbf{A}$ dentro de las ecuaciones de movimiento, se encuentra otro vector $\mathbf{p}$, conocido como el vector de Hamilton, el cual se conserva. Este vector es perpendicular al vector $\mathbf{A}$, por lo cual yace sobre el plano de la órbita. Con ambos vectores se construye el vector $\boldsymbol{\epsilon}$ de Laplace-Runge-Lenz, el cual es proporcional al producto $\mathbf{A} \times \mathbf{p}$, obteniendo así una base de vectores ortogonales asociada al problema. La primera ley de Kepler se obtiene al formar el producto escalar entre el vector $\mathbf{r}$ de posición relativa y el vector $\boldsymbol{\epsilon}$. La magnitud de $\boldsymbol{\epsilon}$ está relacionada con la energía y tal relación permite expresar a la energía, en términos del eje mayor de la elipse.

En la última sección se encuentra un híbrido donde se combinan los puntos de vista kepleriano y newtoniano. Las coordenadas en que se estudia ahora al sistema son la distancia r Sol-planeta y la anomalía excéntrica ψ. Se expresan las dos primeras leyes de Kepler en estas coordenadas y se hace ver que la ecuación de Kepler que relaciona ψ y el tiempo t es una forma integral de la segunda ley de Kepler. Hasta aquí el enfoque es puramente kepleriano. El punto de vista newtoniano aparece con la ley de conservación de la energía, la cual es una primera integral de las ecuaciones de movimiento de Newton.

La hibridización tiene lugar al introducir en la ley de conservación de energía las dos primeras leyes de Kepler, con lo cual se obtiene a la energía como una función de ψ, la cual para poder ser constante exige que se cumpla la tercera ley de Kepler.

El problema de Kepler acepta otras facetas y análisis que no se han incluido en este trabajo, pero las que presentamos aquí no agotan todas las que se conocen que son de mucho interés.

1. J.V. José y E.J. Saletan, *Classical Dynamics, A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
2. B. Stephenson, *Kepler's Physical Astronomy* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
3. J. Milnor, *American Mathematical Monthly* **80** (1983) 353.
4. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, Reading, 1980).
5. D. Moreno, *Gravitación* (Facultad de Ciencias de la UNAM, 2002).
6. D. Boccaletti y G. Pucacco, *Theory of Orbits* Vol. I (Springer, Berlin, 1996).