

# Ecuaciones de Schwinger-Dyson y fenómenos no perturbativos de la electrodinámica cuántica

A. Raya

*Facultad de Ciencias, Universidad de Colima,  
Bernal Díaz del Castillo # 340,  
Col. Villa San Sebastián,  
Colima, Colima, 28045 México,  
e-mail: raya@ucol.mx*

Recibido el 4 de noviembre de 2003; aceptado el 26 de mayo de 2004

Presentamos la derivación detallada de las ecuaciones de Schwinger-Dyson en la electrodinámica cuántica y esbozamos la utilidad de estas ecuaciones en estudios de fenómenos no perturbativos como la generación dinámica de masas para los fermiones fundamentales.

*Descriptores:* Ecuaciones de Schwinger-Dyson; electrodinámica cuántica; generación dinámica de masas.

We present the detailed derivation of the Schwinger-Dyson Equations in Quantum Electrodynamics and we comment on the usefulness of these equations in the study of nonperturbative phenomena, like the dynamical generation of fermion masses.

*Keywords:* Schwinger-Dyson equations; quantum electrodynamics; dynamical mass generation.

## 1. Introducción

El estudio de la física a nivel de los constituyentes fundamentales del Universo ha representado un reto al intelecto. La clasificación de estos objetos por sus propiedades nos facilita el entendimiento de las interacciones entre ellos. De esas propiedades, su masa permanece como una de las más intrigantes, pues, hasta ahora, no existe teoría alguna capaz de explicar su origen. La manera en la que concebimos las interacciones a nivel fundamental es a través del intercambio de partículas mediadoras en el llamado modelo estándar (ME) de partículas elementales [1–4]. Todos los procesos se describen entonces en términos de diagramas de Feynman, y para contrastarlas predicciones teóricas con las mediciones de los laboratorios se calculan las amplitudes para un evento dado, sumando las contribuciones de todas las posibles maneras en las que se puede dar el proceso. Si bien este modelo da cuenta satisfactoriamente de la dinámica de las partículas mediante las simetrías del lagrangiano correspondiente, en éste se supone que todas ellas, supone que ellas son no masivas. En contraparte, en los diferentes laboratorios de altas energías alrededor del mundo se han logrado medir, con bastante precisión en algunos casos, los valores para las masas de los constituyentes fundamentales, lo que se traduce en una ruptura de simetría. Para conciliar esta discrepancia entre la teoría y el experimento, se ha emprendido la búsqueda de un modelo teórico autoconsistente y su corroboración experimental para explicar el origen de las masas de las partículas fundamentales.

El más famoso y popular de estos modelos es el llamado mecanismo de Higgs [5], que explica la masa de las partículas a partir de su interacción con el llamado bosón de Higgs, fenómeno que involucra una ruptura espontánea de la simetría del modelo estándar. La búsqueda de esta partícula en

los aceleradores de Europa y Estados Unidos ha impulsado el desarrollo tecnológico, por las dificultades técnicas y de presupuesto para producirlo y detectarlo; y el avance teórico, que ofrezca canales más simples para su descubrimiento. A la vez, ha promocionado el incremento del número de estudiantes y científicos dedicados a esta rama de la física. pese a la indudable eficiencia con la que el modelo estándar describe la fenomenología de las partículas fundamentales, existen todavía algunos problemas.

El bosón de Higgs no ha sido descubierto experimentalmente. El ME supone que este bosón es fundamental, pero no existe en la naturaleza una partícula escalar fundamental, al menos no se ha observado. Por otro lado, cuando tratamos de extender el ME para incorporar otras fuerzas construyendo una teoría de gran unificación, nos enfrentamos al problema de jerarquías, que requiere para su solución un no natural sintonizado fino de los parámetros del Higgs. Supersimetría o SUSY [6] resuelve este problema a expensas de incrementar al doble el espectro de partículas. Los escalares fundamentales aún están ahí y SUSY continúa eludiéndonos.

En contraparte, han surgido modelos en los que no se hace necesaria la existencia de una partícula escalar para tener la ruptura de simetría, sino que ésta se da en presencia de condensados. Algunos de estos modelos son el de tecnicolor y sus versiones extendidas, los de condensados de top y los de color de top (una excelente revisión de estos modelos puede encontrarse en la Ref. 7). Las predicciones de estos modelos se obtienen por cálculos no perturbativos, que incluso en los casos más simples son difíciles de realizar y se basan en simplificaciones severamente incorrectas. Por ejemplo, en los estudios del modelo de condensado de top en el contexto de las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) –de las que hablaremos a continuación–, las correcciones de la cromodinámica cuántica (QCD de sus siglas en inglés) se calculan sólo en la

norma de Landau. En un intento de repetir el mismo ejercicio en otras normas, uno encuentra que la masa del top exhibe dependencia en la norma, una conclusión que físicamente no tiene sentido. Tratar de solucionar esta situación en teorías complicadas como QDC es un problema formidable.

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson [8] son un conjunto infinito de relaciones integrales entre las funciones de Green de una teoría cuántica de campos y proporcionan la estructura analítica que dichas funciones poseen. Su uso se extiende tanto a la física de altas energías como a la física nuclear (ver por ejemplo las Refs. 7 a 11), por lo que las soluciones a estas ecuaciones son de interés para un sector amplio de físicos en el mundo. Fenómenos no perturbativos como el confinamiento y la ruptura dinámica de la simetría quiral son abordados de manera natural en este contexto.

La solución a las ESD se obtiene al realizar un truncamiento inteligente de esta torre infinita de relaciones integrales y el objetivo fundamental para resolver estas ecuaciones en cualquier teoría consiste en incorporar todas las identidades de norma para que las cantidades físicas observables calculadas sean independientes del parámetro de norma. Para ello se conducen estudios analíticos, hasta donde la complejidad de las ecuaciones lo permite, utilizando conjeturas sobre la forma de las funciones de Green u otorgándoles una representación espectral. También se está intentando con bastante éxito describir la dinámica de las partículas elementales discretizando el espacio-tiempo, es decir, suponiendo una red donde suceden los eventos. Luego, los diferentes procesos se calculan con la inevitable ayuda de las computadoras, que mientras más potentes, son más útiles en este formalismo.

En este artículo estamos interesados en obtener las ESD en la electrodinámica cuántica o QED, de sus siglas en inglés, donde por la naturaleza abeliana de la teoría, no existen tantas complicaciones matemáticas (Una simplificación adicional se obtiene de definir QED en 2+1 dimensiones o QED3, lo que ha permitido al autor un estudio minucioso de estas ecuaciones y las implicaciones de su truncamiento [12–15]). Por ello, se encuentra organizado de la siguiente manera: Comenzamos en la Sec. 2 escribiendo la acción electromagnética, con la cual construimos la funcional generatriz. De las derivadas funcionales de esta generatriz, obtenemos las ESD relevantes para el fenómeno de la generación dinámica de masas en la Sec. 3. En la Sec. 4 presentamos los diferentes esquemas y truncamientos conocidos para resolver las ESD y en la 5 estudiamos el fenómeno de la generación dinámica de masas para fermiones a través de sus autointeracciones electromagnéticas en el plano. Finalmente presentamos un sumario del artículo en la Sec. 6.

## 2. La acción electromagnética

Como cualquier otra teoría, la dinámica electromagnética puede obtenerse, en dimensiones arbitrarias, del lagrangiano

y su correspondiente acción:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) . \quad (1)$$

La ecuación de movimiento para el campo  $\phi$  se obtiene tras imponer la condición de estaticidad de la acción:

$$\delta S = 0 . \quad (2)$$

De tal condición obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para este campo

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0 . \quad (3)$$

La cuantización electromagnética puede obtenerse bien sea de la formulación canónica, o mediante la integral de camino de Feynman. Preferimos este último esquema de aproximación, pues la formulación integral nos permite obtener de modo muy claro las ESD. La idea de Richard Feynman era que para conocer la amplitud de transición entre dos estados cuánticos, debemos sumar sobre todas las posibles historias en las cuales se puede dar tal transición, es decir,

$$U(t_f, x_f \leftarrow t_i, x_i) = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p e^{iS} , \quad (4)$$

donde  $\mathcal{D}x$  y  $\mathcal{D}p$  son las medidas.

La dinámica electromagnética se obtiene de la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 .$$

Esta ecuación puede obtenerse de la densidad lagrangiana libre

$$\mathcal{L}_{libre} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi . \quad (5)$$

Debemos considerar la interacción entre los fermiones y el campo electromagnético, dada por el término  $e\gamma^\mu A_\mu$ . Para asegurar que la densidad lagrangiana sea invariante bajo transformaciones globales de norma, debemos cambiar las derivadas ordinarias por derivadas covariantes al usar el principio de sustitución mínima:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu . \quad (6)$$

De este modo, la densidad lagrangiana se escribe

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi . \quad (7)$$

Aún nos falta considerar la interacción del campo electromagnético consigo mismo. Ésta se obtiene del término

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} . \quad (8)$$

Colectando los términos, la acción de QED es

$$S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \int d^d x \left[ \sum_{f=1}^N \bar{\psi}^f (i\gamma^\mu D_\mu^f - m^f) \psi^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] , \quad (9)$$

donde  $f$  representa una etiqueta de sabor y  $N$  es el número de sabores fermiónicos distintos. Aunque estamos considerando cantidades desnudas, los resultados que obtengamos son válidos también para cantidades renormalizadas cuando este proceso se realiza de forma adecuada. En cuanto a las funciones de Green, su desnudez se mostrará explícitamente para distinguirlas de las correspondientes funciones completas.

Volteemos nuestra atención a la funcional generatriz

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, A) e^{(iS[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + i \int d^d x [\sum_f (\bar{\psi}^f \eta^f + \bar{\eta}^f \psi^f) + A_\mu J^\mu])}, \quad (10)$$

donde  $\bar{\eta}^f$ ,  $\eta^f$  y  $J_\mu$  son las fuentes de los fermiones, antifermiones y fotones, respectivamente, y donde se define, como en la Ref. 9,

$$d\mu(\bar{\psi}, \psi, A) = \Pi_f \mathcal{D}\bar{\psi}^f \mathcal{D}\psi^f \Pi_\mu \mathcal{D}A_\mu. \quad (11)$$

Para completar la definición operacional de QED, notemos que la acción es invariante bajo las transformaciones locales Abelianas

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi^\lambda(x) = e^{-ie\lambda(x)}\psi, \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^\lambda(x) = e^{ie\lambda(x)}\bar{\psi} \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^\lambda(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\lambda(x) \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $\lambda(x)$  es una función escalar arbitraria y, por el momento, hemos suprimido los índices de sabor. Bajo tales circunstancias, la funcional generatriz no tiene mayor sentido, pues para cada configuración de campos  $\{\psi(x), \bar{\psi}(x), A_\mu(x)\}$ , por la invariancia de norma existen un número incontable de configuraciones relacionadas  $\{\bar{\psi}^\lambda(x), \psi^\lambda(x), A_\mu^\lambda(x)\}$ , que tienen la misma acción

$$S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = S[\bar{\psi}^\lambda, \psi^\lambda, A_\mu^\lambda]. \quad (13)$$

La integración de Grassman sobre  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  da el mismo resultado, independientemente de  $\lambda(x)$ , ya que el jacobiano correspondiente es uno. Entonces, existe una divergencia en la integración funcional sobre el campo  $A_\mu$ . La definición correcta de la medida debe asegurar que la integración sobre el campo de norma se extienda sólo a las configuraciones inequivalentes bajo transformaciones de norma.

Este problema puede resolverse al introducir el determinante de Fadeev-Popov. El efecto neto de este procedimiento en QED es simplemente introducir un término que fija la norma en la acción. Una elección comúnmente usada para este término que fija la norma es

$$\begin{aligned} S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] &\rightarrow S_\xi[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] \\ &= S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] - \frac{1}{2\xi} \int d^d x (\partial_\mu A^\mu)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\xi$  es el parámetro que fija la norma. Debe notarse que la dificultad para fijar la norma cuando hay ambigüedades

de Gribov no se hace presente en teorías abelianas. Puede demostrarse que las cantidades físicas observables son independientes del parámetro de norma  $\xi$  y, de hecho, son también independientes de la forma del término que fija la norma.

### 3. Ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD)

Es bien sabido desde hace algún tiempo que de las ecuaciones de campo para una teoría cuántica de campos se puede derivar un sistema de ecuaciones integrales acopladas que relacionan las funciones de Green de la teoría entre sí. Esta torre infinita de ecuaciones se conoce como las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD) [8]. Usaremos la formulación de integrales funcionales para derivar las ESD siguiendo los trabajos en las Refs. 9 y 16.

Comenzamos de la ecuación (14) y la funcional generatriz (10). Tomemos en cuenta que los campos fermiónicos  $\{\bar{\psi}, \psi\}$  y sus fuentes  $\{\bar{\eta}, \eta\}$  son elementos del álgebra de Grassman, es decir, todos esos campos anticonmutan entre sí; y que  $A_\mu$  y su fuente  $J_\mu$  son  $c$ -números. Tomamos además las convenciones y notaciones estándar, donde

$$\not{A} = A_\mu \gamma^\mu = g^{\mu\nu} A_\mu \gamma_\nu, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \text{etc.}$$

Notemos que para un electrón la carga física debe ser  $e^{fis} = -e$ , donde, por definición  $e = |e|$  es la magnitud de la carga del electrón.

La funcional generatriz es el análogo teórico de la teoría de campos a la función de partición para un sistema mecanoestadístico y tiene el mismo propósito, a saber, que todas las cantidades físicas de la teoría pueden obtenerse de  $Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]$ . Operacionalmente, la integral descrita representa una integral sobre todos los valores posibles para cada uno de los campos en todos los puntos del espacio-tiempo. Ahora procederemos a la derivación de las ESD, que son simplemente las ecuaciones de Euler-Lagrange para una teoría cuántica de campos.

#### 3.1. ESD para el propagador del fotón

Consideremos la funcional generatriz (10). Puede mostrarse que la funcional generatriz para funciones de Green conectadas  $\mathcal{G}[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]$  está definida por

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = e^{\mathcal{G}[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]}. \quad (15)$$

Para obtener la ESD correspondiente al fotón uno simplemente parte del hecho de que la integral funcional de una derivada funcional total se anula con las condiciones de fron-

tera apropiadas. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 0 &= \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, J_\mu) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \\
 &\quad e^{\{i(S_\xi[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + \int d^d x [\bar{\psi}^f \eta^f + \bar{\eta}^f \psi^f + A_\mu J^\mu])\}} \\
 &= \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, J_\mu) \left\{ \frac{\delta S_\xi}{\delta A_\mu(x)} + J^\mu(x) \right\} \\
 &\quad e^{\{i(S_\xi[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + \int d^d x [\bar{\psi}^f \eta^f + \bar{\eta}^f \psi^f + A_\mu J^\mu])\}} \\
 &= \left\{ \frac{\delta S_\xi}{\delta A_\mu(x)} \left[ -\frac{\delta}{i\delta\eta}, \frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta J^\mu} \right] + J^\mu(x) \right\} Z. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Diferenciando la acción (14) inmediatamente obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta S_\xi}{\delta A_\mu(x)} &= \left[ \partial_\rho \partial^\rho g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \\
 &\quad + \sum_f e^f \bar{\psi}^f \gamma^\mu \psi^f, \quad (17)
 \end{aligned}$$

de donde se sigue que, tras dividir por  $Z$ , uno puede escribir la Ec. (16) como

$$\begin{aligned}
 -J^\mu(x) &= \left[ \partial_\rho \partial^\rho g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \frac{\delta \mathcal{G}}{i\delta J^\nu(x)} \\
 + \sum_f e^f &\left( \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \eta^f(x)} \gamma^\mu \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \bar{\eta}^f(x)} + \frac{\delta}{\delta \eta^f(x)} \left[ \gamma^\mu \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \bar{\eta}^f(x)} \right] \right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

Esta ecuación representa una forma compacta del equivalente no perturbativo a las ecuaciones de Maxwell, lo cual esto nos es útil para obtener una expresión para la polarización del vacío del fotón. Ahora podemos tomar la transformada de Legendre introducir la funcional generatriz para las funciones de green conectadas de una partícula irreducible [1-PI],  $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}[\bar{\eta}, \eta, A_\mu] &\equiv i\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] \\
 &\quad + i \int d^d x [\bar{\psi}^f \eta^f + \bar{\eta}^f \psi^f + A_\mu J^\mu] \quad (19)
 \end{aligned}$$

De la integración grasmaniana se sigue que  $Z[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$  y consecuentemente  $\mathcal{G}[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]$  depende sólo de potencias pares de  $\bar{\eta}$  y  $\eta$ , lo que implica que al hacer  $\bar{\eta} = \eta = 0$  después de derivar  $\mathcal{G}$  (o  $Z$ ) tendremos resultados no nulos para el mismo número de derivadas con respecto a  $\bar{\eta}$  y  $\eta$ . Similarmente, en ausencia de las derivadas con respecto a los campos fermiónicos se puede ver que sólo números pares de derivadas de  $Z$  y  $\mathcal{G}$  con respecto a  $J$  sobreviven cuando hacemos  $J = 0$ , lo que inmediatamente nos conduce al teorema de Furry para QED. Tenemos de la última ecuación:

$$\begin{aligned}
 A_\mu(x) &= \frac{\delta \mathcal{G}}{i\delta J^\mu(x)}, \quad \psi^f(x) = \frac{\delta \mathcal{G}}{i\delta \bar{\eta}^f(x)}, \\
 \bar{\psi}^f(x) &= -\frac{\delta \mathcal{G}}{i\delta \eta^f(x)}, \quad J_\mu(x) = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)}, \\
 \eta^f(x) &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}^f(x)}, \quad \bar{\eta}^f(x) = \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^f(x)}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos expresiones para  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  y  $A_\mu$  en términos de  $\bar{\eta}$ ,  $\eta$  y  $J_\mu$  y viceversa; por ejemplo,

$$\bar{\psi}_\alpha^f(x) = \bar{\psi}_\alpha^f[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = i \frac{\delta \mathcal{G}[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]}{\delta \eta_\alpha^f},$$

con los índices espinoriales mostrados explícitamente. Es ahora fácil de ver que haciendo  $J = 0$  tras diferenciar  $\Gamma$  obtenemos resultados no nulos sólo cuando hay el mismo número de derivadas de  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  en analogía al caso de  $\mathcal{G}$ . Haciendo uso de las expresiones (20), observemos el siguiente término:

$$\begin{aligned}
 &i \int d^d z \frac{\delta^2 \mathcal{G}}{\delta \eta_\alpha^f(x) \delta \bar{\eta}_\gamma^h(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\gamma^h(z) \delta \bar{\psi}_\beta^g(y)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}, \psi, \bar{\psi}=0} \\
 &= \int d^d z \frac{\delta \psi_\gamma^h(z)}{\delta \eta_\alpha^f(x)} \frac{\delta \eta_\beta^g(y)}{\delta \bar{\psi}_\gamma^h(z)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}, \psi, \bar{\psi}=0} \\
 &= \frac{\delta \eta_\beta^g(y)}{\delta \eta_\alpha^f(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0} \\
 &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{fg} \delta^d(x-y). \quad (21)
 \end{aligned}$$

De aquí se sigue que, cuando las fuentes fermiónicas  $(\bar{\eta}, \eta)$  son nulas, podemos escribir la Ec. (18) como

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0} &= \\
 &\left[ \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu(x) \\
 &\quad - i \sum_f e^f Tr [\gamma_\mu S_F^f(x, x, [A_\mu])], \quad (22)
 \end{aligned}$$

donde hemos identificado el término

$$S_F^f(x, y, [A_\mu]) = i \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \eta^f(y) \delta \bar{\eta}^f(x)} = -i \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \eta(x) \delta \bar{\eta}^f(y)} \quad (23)$$

como el propagador del fermión de sabor  $f$  en un campo magnético externo  $A_\mu$ . Una consecuencia de la ecuación (21) es que el inverso de esta función de Green de dos puntos está dada por

$$S_F^f(x, y, [A_\mu])^{-1} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(x) \delta \bar{\psi}^f(y)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0}. \quad (24)$$

Claramente, la función de Green completa para el fermión  $S_F(x, y)$  se obtiene al tomar  $A_\mu = 0$  en la Ec. (24).

Para obtener la ESD correspondiente al tensor de polarización del fotón, sólo nos resta actuar con  $\delta/\delta A_\nu(y)$  sobre la Ec. (22) y hacer  $J_\mu(x) = 0$ . Veamos,

$$\begin{aligned}
 &\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta A^\nu(y)} \Big|_{A_\mu, \psi, \bar{\psi}=0} \\
 &= \left[ \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \delta^d(x-y) - i \sum_f e^f \\
 &Tr \left[ \gamma^\mu \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(x) \delta \bar{\psi}^f(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0} \right)^{-1} \right]. \quad (25)
 \end{aligned}$$

El lado derecho de esta ecuación se puede interpretar de una mejor manera observando que

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(x) \delta \bar{\psi}^f(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0} \right)^{-1} = - \int d^d u d^d w \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(x) \delta \bar{\psi}^f(w)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(u) \delta \bar{\psi}^f(w)} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(w) \delta \bar{\psi}^f(x)} \Big|_{\psi, \bar{\psi}=0} \right)^{-1}, \quad (26)$$

un resultado análogo a

$$0 = \frac{d}{dx} [A(x)A^{-1}(x) = I] = \frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) + A(x) \frac{dA^{-1}(x)}{dx} \Rightarrow \frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x) \frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x), \quad (27)$$

válido para matrices de dimensión finita. La ecuación (26) involucra al Vértice fermión-bosón propio de [1-PI]

$$e^f \Gamma_\mu^f(x; y, z) = \frac{\delta}{\delta A^\mu(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi^f(x) \delta \bar{\psi}^f(y)} \Big|_{A_\mu, \psi, \bar{\psi}=0}, \quad (28)$$

que no debe confundirse con la funcional generatriz  $\Gamma$ . Similarmente al caso fermiónico, se puede mostrar que la segunda derivada de  $\Gamma$  con respecto de  $A_\mu$  genera el inverso del Propagador del fotón  $(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x, y)$  (lado izquierdo de la Ec. (25)). Entonces, de las Ecs. (22), (25) y (26) obtenemos la ESD para el inverso del propagador del fotón

$$(\Delta^{-1})^{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta A^\nu(y)} \Big|_{A_\mu, \psi, \bar{\psi}=0} = \left[ \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \delta^d(x - y) + \Pi_{\mu\nu}(x, y), \quad (29)$$

donde hemos identificado el tensor de polarización del fotón,  $\Pi_{\mu\nu}$ :

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = i \sum_f (e^f)^2 \int d^d z_1 d^d z_2 Tr[\gamma_\mu S_F^f(x, z_1) \Gamma_\nu^f(y; z_1, z_2) S_F^f(z_2, x)]. \quad (30)$$

Haciendo uso de la invariancia traslacional podemos escribir el propagador del fotón en espacio de momento (Aunque los argumentos de las funciones de Green son los cuadrados de los momentos, por simplicidad de notación escribiremos que

$$G(p^2) = G(p).$$

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu} + (q_\mu q_\nu / (q^2 + i\epsilon))}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \Pi(q)} - \xi \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 + i\epsilon)^2}, \quad (31)$$

donde, de forma usual, se define el escalar de polarización  $\Pi(q)$  como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \equiv (-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu) \Pi(q).$$

Notemos que  $\Pi(q)$  es independiente del parámetro de norma  $\xi$  en QED como resultado de la conservación de corriente. Al orden más bajo en teoría de perturbaciones tenemos  $\Pi(q) = 0$ , del mismo modo que

$$\Gamma_\nu^f(y; z_1, z_2) = \gamma_\nu \delta^d(y - z_1) \delta^d(y - z_2) \quad (32)$$

y

$$(i \not{\partial} - m^f) S_F^f(x, y) = \delta^d(x - y). \quad (33)$$

Se debe notar que una vez factorizado  $e^f$ , no existe dependencia explícita en el sabor para el Vértice propio, ya que la misma suma de diagramas de Feynman contribuirá en cada caso. Hemos visto que de la segunda derivada de la funcional generatriz  $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$  se obtienen los inversos de los Propagadores del Fermión y del fotón y de la tercera el Vértice propio de la interacción fermión-bosón. Generalmente, todas las derivadas más altas de la funcional generatriz  $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$  dan las correspondientes funciones de Green propias, donde el número y el tipo de derivadas da el número y el tipo de piernas en las funciones de Green propias. La ESD para el Propagador del fotón se muestra en la Fig. 1.

La representación de la ESD en espacio de momentum se obtiene de manera inmediata al transformar de Fourier las expresiones en espacio de coordenadas o, más fácilmente, usando las reglas usuales para los diagramas de Feynman basados en la contribución perturbativa al orden más bajo de las cantidades no perturbativas. Por ejemplo, para el tensor de polarización del fotón obtenemos

$$i \Pi_{\mu\nu}(q) = (-1) \sum_f (e^f)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} Tr[(i\gamma_\mu)(iS_F^f(k))(i\Gamma_\nu^f(k, k+q))(iS_F^f(k+q))], \quad (34)$$

donde el factor  $(-1)$  surge del lazo de fermiones de manera usual.

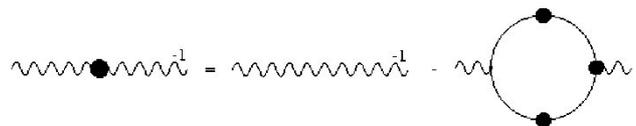


FIGURA 1. ESD para el propagador del fotón.



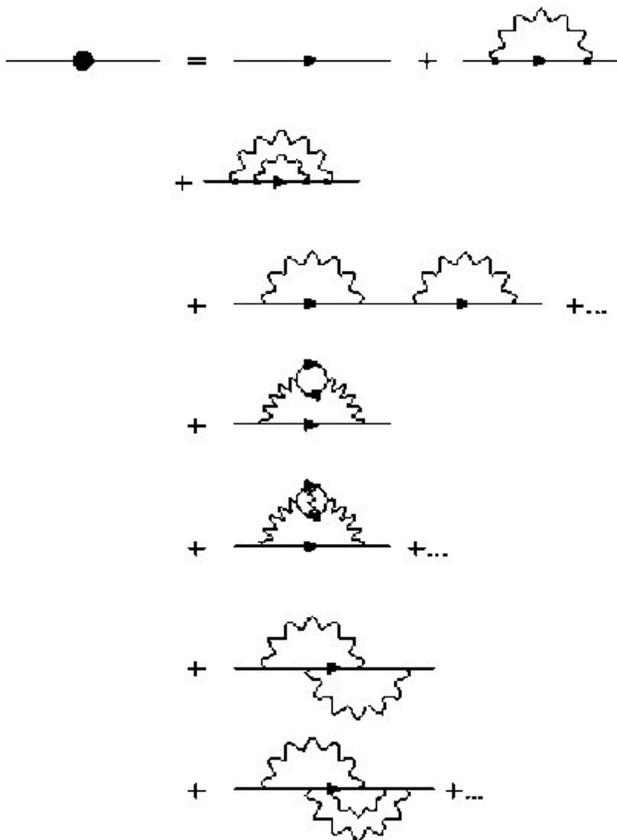


FIGURA 3. Propagador del fermi'on en teoría de perturbaciones.

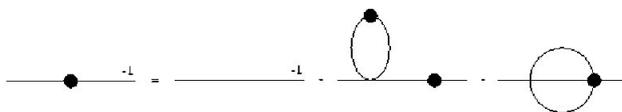


FIGURA 4. Propagador del escalar en la teoría  $\phi^4$ .



FIGURA 5. ESD para el vértice.

**3.3. ESD para el vértice fermión-bosón**

La ecuación correspondiente al vértice de tres puntos se puede obtener de forma similar. Por completez, la presentamos en espacio de momento, donde se escribe de forma más concisa :

$$i\Gamma_\mu^f(p', p) = i\gamma_\mu + \sum_g \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} K^{gf}(p+l, p'+l, l) (iS_F^g(p'+l))(i\Gamma_\mu^g(p'+l, p+l))(iS_F^g(p+l)) . \quad (41)$$

$K$  es el kernel de dispersión fermión-antifermi'ón. La representación diagramática de esta ecuación se muestra en la Fig. 5.

Claramente,  $\Gamma_\mu$  se acopla a las funciones de dos puntos del fermi'ón  $S_F$ , a la amplitud de dispersión fermi'ón-antifermi'ón  $M$ , una función de cuatro puntos que satisface ella misma una ecuación integral, lo que nuevamente ilustra la regla general.

Para resolver las ESD para el propagador del fermi'ón, la aproximación más sencilla para el vértice que se ha utilizado es la llamada aproximación arcoiris o de escalera, que consiste en aproximar  $M$  al iterar la contribución perturbativa al orden más bajo para el kernel  $K$  conjuntamente con la sustitución de los propagadores fermi'ónicos con sus contrapartes desnudas,  $S_F^{0f}(p) = 1/[\not{p}-m^f]$ . Esta y otras aproximaciones las discutiremos a continuación aboliendo el uso de etiquetas de sabor.

**4. Resolviendo las ESD**

**4.1. Aproximación apagada**

En QED3 no masivo en la aproximación apagada [18–20], que corresponde a despreciar contribuciones de lazos de fermiones a la polarización del vacío, es decir, a tomar

$$\Pi(q) = 0 \quad (42)$$

en el propagador del fotón, se llega a divergencias infrarrojas con la teoría de perturbaciones ordinaria. Un remedio comúnmente usado para este problema es suavizar el comportamiento infrarrojo del propagador del fotón incluyendo contribuciones de lazos de fermiones en la polarización del vacío. al orden más bajo para un fermi'ón de masa  $m$  esta contribución al escalar de polarización es

$$\Pi(k) = \frac{\alpha}{k^2} \left[ 2m + \frac{k^2 - m^2}{k} \arcsen \left( \frac{k}{\sqrt{k^2 + 4m^2}} \right) \right] . \quad (43)$$

En una teoría con  $N$  fermiones no masivos el escalar de polarización es entonces

$$\Pi(k) = \frac{\tilde{\alpha}}{k} , \quad (44)$$

donde

$$\tilde{\alpha} = \frac{Ne^2}{8} ,$$

de forma que el propagador del fotón se comporta como  $1/q$  para  $q^2 \rightarrow 0$ , es decir, la divergencia infrarroja se ha suavizado significativamente sin alterar las propiedades ultravioleta.

La aproximación apagada en la ESD para el Propagador del Fermi'ón corresponde a la Fig. 6. A nivel de un lazo en la teoría de perturbaciones no hay distinción entre la aproximación apagada y la no apagada.



FIGURA 6. ESD para el propagador del fermi'ón en la aproximación apagada.



propagador completo del fotón y  $S_F^0(p)$  es el propagador desnudo del fermión. Para conocer entonces el propagador completo del fermión, es necesario hacer algunas suposiciones sobre el Propagador del Fotón y al vértice mismo, como describimos en la sección anterior. El escenario más sencillo para estudiar el fenómeno de la generación dinámica de masas es utilizar la aproximación arcoiris, es decir, sustituir

$$\begin{aligned} \Gamma^\nu(k, p) &= \gamma^\nu, \\ \Delta_{\mu\nu}(k - p) &= \Delta_{\mu\nu}^0(k - p). \end{aligned} \tag{52}$$

Entonces, en la Ec. (51), sustituimos los propagadores desnudos del fermión y del fotón, definidos como

$$S_F^0(p) = 1/\not{p}, \quad \Delta_{\mu\nu}^0(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^4}, \tag{53}$$

donde  $\xi$  es el parámetro de norma covariante usual, y escribimos al propagador completo del fermión  $s_f(p)$ , en su forma más general, de la siguiente manera :

$$S_F(p) = \frac{F(p)}{\not{p} - \mathcal{M}(p)}. \tag{54}$$

$F(p)$  es llamada la Renormalización de la Función de Onda,  $\mathcal{M}(p)$  la función de masa.

La Ec. (51) es una ecuación matricial. Consiste de dos ecuaciones independientes, las cuales pueden desacoplarse al tomar su traza después de haberla multiplicado por 1 y  $\not{p}$  respectivamente. Haciendo uso de las Ecs. (53) y (54), escribimos esas ecuaciones como

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p)} &= 1 + \frac{\alpha}{2\pi^2 p^2} \int d^3k \frac{F(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \frac{1}{q^4} \\ &\times [-2(k \cdot p)^2 + (2 - \xi)(k^2 + p^2)k \cdot p - 2(1 - \xi)k^2 p^2], \\ \frac{\mathcal{M}(p)}{F(p)} &= \frac{\alpha(2 + \xi)}{2\pi^2} \int d^3k \frac{F(k) \mathcal{M}(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \frac{1}{q^2}, \end{aligned} \tag{55}$$

donde  $\alpha = e^2/(4\pi)$  de la manera usual. Realizando ahora la integración angular después de la rotación de Wick hacia el espacio Euclideo, las ecuaciones anteriores adquieren la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(p)} &= 1 - \frac{\alpha\xi}{\pi p^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 F(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \\ &\times \left[ 1 - \frac{k^2 + p^2}{2kp} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \right], \end{aligned} \tag{56}$$

$$\frac{\mathcal{M}(p)}{F(p)} = \frac{\alpha(\xi + 2)}{\pi p} \int_0^\infty dk \frac{k F(k) \mathcal{M}(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right| \tag{57}$$

Si elegimos la norma de Landau ( $\xi = 0$ ) para resolver este sistema de ecuaciones, vemos que  $F(p) = 1$ , por lo que sólo tenemos que resolver la ecuación

$$\mathcal{M}(p) = \frac{2\alpha}{\pi p} \int_0^\infty dk \frac{k \mathcal{M}(k)}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \ln \left| \frac{k+p}{k-p} \right|. \tag{58}$$

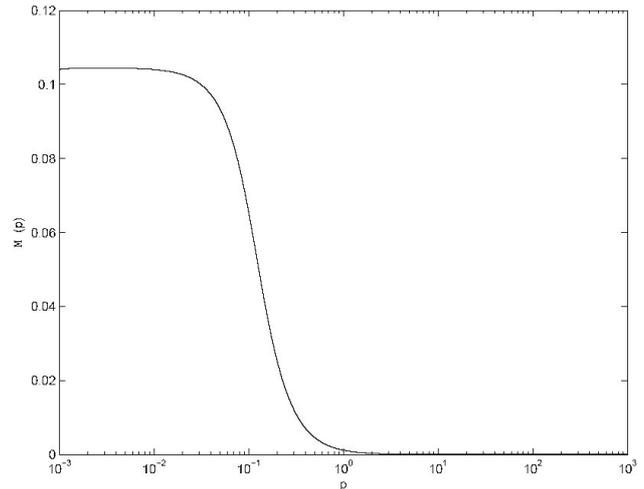


FIGURA 9. Función de masa en la aproximación arcoiris en la norma de Landau.

Una solución trivial a la Ec. (58) es  $\mathcal{M}(p) = 0$ , que corresponde a la solución perturbativa usual. El fenómeno de la generación dinámica de masas se observa de la solución no trivial obtenida al resolver las ecuación anterior (o el sistema de Ecs. (56) y (57) en una norma covariante arbitraria [14]). La integración numérica de la Ec. (58) se muestra en la Fig. 9.

Tal solución para  $\mathcal{M}(p)$  está relacionada con la masa  $m$  y el condensado quiral  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . Suponiendo una continuación analítica simple del espacio de Minkowski al euclideo, despreciando la rotación del contorno de integración, definimos la masa (euclidea) con la expresión  $m = \mathcal{M}(p = m)$ . Por otro lado, en la referencia [18], Burden y Roberts demostraron que la definición estándar del condensado fermiónico (Ec. (3.9) en la Ref. 18) en términos de una integral sobre la función de masa está en excelente concordancia numérica con la predicción de la expansión de producto de operadores [34], que permite escribir

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 4p^2 \frac{\mathcal{M}(p)}{(2 + \xi)}, \tag{59}$$

(en unidades de  $e^4$ ) en el límite cuando  $p^2 \rightarrow \infty$ .

Vemos de la Fig. 9, que aún cuando comenzamos con un Fermión no masivo (53), la resumación de todas las autointeracciones de dicho fermión dan origen a su masa (euclidea), y que esta masa  $m$  se puede inferir del comportamiento infrarrojo de la función de masa  $\mathcal{M}(p)$ . En este dominio,  $\mathcal{M}(p)$  se comporta como una constante. Esta masa se origina en presencia del condensado quiral  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , que es precisamente el parámetro de orden para la transición entre la fase quiralmente simétrica y la asimétrica de QED, y que se puede inferir del comportamiento asintótico de la función de masa. La relación (59) advierte que en la región  $p \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{M}(p)$  se comporta como  $1/p^2$ .

En resumen, aún en el escenario más sencillo de un modelo simple pero con relevancia física directa como QED3, la Aproximación arcoiris ilustra claramente la naturaleza del fenómeno no perturbativo de la generación dinámica de masas, el cual se obtiene en presencia de un condensado quiral;

de las cantidades físicas relevantes, la masa euclidea y el condensado mismo; y de las dificultades matemáticas que se tienen que sortear en teorías más complicadas.

## 6. Sumario

Hemos visto la derivación de las ecuaciones de Schwinger-Dyson, que son las ecuaciones de Euler-Lagrange para una teoría de campos. Esta derivación se realiza al tomar derivadas funcionales de la funcional generatriz, la cual se construye a partir de la acción electromagnética. Este conjunto infinito de relaciones integrales entre las funciones de Green de QED es de suma utilidad para comprender fenómenos no perturbativos como la generación dinámica de masas para los fermiones. En los estudios de dichos fenómenos, es necesario un truncamiento de esta torre de ecuaciones, el cual se puede hacer haciendo una conjetura sustentable sobre una o más de las funciones de Green relevantes al estudio. Para estudiar la ruptura dinámica de la simetría quiral, necesitamos conocer la forma analítica del Propagador del Fermión, lo que implica resolver su ESD correspondiente. Para ello, se hace una conjetura sobre el propagador del fotón y sobre el vértice de la interacción electromagnética. Las apro-

ximaciones comúnmente utilizadas consisten en sustituir el propagador completo del fotón por su contraparte desnuda, y modelar así la forma que el vértice debe tener. Existen varios esquemas en los que se pueden resolver estas ecuaciones, por ejemplo, resolver directamente la ESD correspondiente al propagador del fermión considerando una forma para las otras funciones de Green relacionadas, o bien, utilizando una representación espectral para dichas funciones.

La naturaleza no perturbativa de las ESD nos conduce a estudiar este tipo de fenómenos en escenarios plausibles, lo que en muchas teorías representa una complejidad matemática formidable. Sin embargo, aún en los escenarios más sencillos, como es QED3 en la aproximación arcoiris, se puede obtener valiosa información sobre la naturaleza de las partículas fundamentales, especialmente sobre el origen de sus masas.

## Agradecimientos

Agradezco a Adnan Bashir y Luis Gustavo Cabral Rosetti por sus valiosos comentarios sobre el manuscrito. También a Paolo Amore por las pertinentes discusiones y observaciones. Agradezco al fondo Alvarez-Buylla de la Universidad de Colima el patrocinio del proyecto No. 292/04.

1. S.L. Glashow, *Tesis Doctoral* (Harvard University, 1958); *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
2. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.
3. A. Salam, *Elementary particle physics (Nobel Symp. No. 8)*. (Ed. N. Svartholm). Almqvis and Wisell, Stockholm (1968).
4. S.L. Glashow, J. Iliopoulos y L. Maiani, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1285.
5. P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 132; *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156; T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **10** (1963) 531.
6. J. Wess y B. Zumino, *Nucl. Phys. B* **70** (1974) 39; *Phys. Lett B* **49** (1974) 52; *Nucl. Phys. B* **78** (1974) 1.
7. C.T. Hill y E. Simmons, *Phys. Rept.* **381** (2003) 235.
8. J.S. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **37** (1951) 452; F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736.
9. C.D. Roberts y A.G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33** (1994) 477.
10. C.D. Roberts y S.M. Schmidt, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45** (2000) 51.
11. C.D. Roberts y P. Maris, *Int. J. Mod. Phys. E* **12** (2003) 297.
12. A. Raya, *Tesis Doctoral* (Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2003) hep-th/0408136.
13. A. Bashir y A. Raya, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 105001.
14. A. Bashir, A. Huet y A. Raya, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 025029.
15. A. Bashir y A. Raya, *Phys. Rev. D* **66**, (2002) 105005.
16. C.D. Roberts, *Notes on Quantum Field Theory*. Curso impartido en la Universidad de Rostok, Alemania, facilitadas al autor en Estados Unidos en (2002).
17. R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Estados Unidos (1999).
18. C.J. Burden y C.D. Roberts, *Phys. Rev. D* **44** (1991) 540.
19. Y. Hoshino y T. Matsuyama, *Phys. Lett. B* **222** (1989) 493.
20. Z. Dong, H.J. Munczek y C.D. Roberts, *Phys. Lett. B* **333** (1994) 536.
21. J.S. Ball y T.-W. Chiu, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2542).
22. P. Maris. *Tesis Doctoral* (Holanda, 1992).
23. M.R. Pennington y S.P. Webb, *Brookhaven Nat. Lab. preprint, BNL-40886*, (1988).
24. D. Atkinson, P. Johnson y M.R. Pennington, *Brookhaven Nat. Lab. preprint BNL-41615*, (1988).
25. A. Salam, *Phys. Rev.* **130** (1963) 1287.
26. A. Salam y R. Delbourgo, *Phys. Rev.* **135** (1964) 1398.
27. J. Strathdee, *Phys. Rev.* **135** (1964) 1428.
28. R. Delbourgo y P. West, *J. Phys. A* **10**, (1977) 1049.
29. R. Delbourgo y P. West, *Phys. Lett. B* **72** (1977) 96.
30. R. Delbourgo, *Nuovo Cimento A* **49** (1979) 484.
31. Y. Hoshino, “*The Gauge Technique in QED<sub>(2+1)</sub>*” hep-th/0107219; “*A Gauge Covariant Approximation to QED*” hep-th/0202020.
32. R. Delbourgo y B.W. Keck, *J. Phys. G* **6** (1980) 275.
33. R. Delbourgo, *Austral. J. Phys.* **52** (1999) 681.
34. H.D. Politzer, *Nucl. Phys.* **117** (1976) 397.