

# Ecuaciones para el movimiento en tres dimensiones de mecanismos planetarios en turbinas eólicas

**Jorge Wellesley-Bourke Funcasta**

Correo electrónico: [jwellesley@mecanica.cujae.edu.cu](mailto:jwellesley@mecanica.cujae.edu.cu)

**Luis Martínez Delgado**

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, Ciudad de La Habana, Cuba

Correo electrónico: [lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu](mailto:lmartinez@mecanica.cujae.edu.cu)

## Resumen

En el trabajo se desarrolla el basamento matemático para establecer el análisis del efecto nocivo que se produce sobre los rodamientos de los mecanismos planetarios empleados en los aerogeneradores, dado esto por las condiciones variables del viento en cuanto a su velocidad y dirección.

Palabras clave: efecto giroscópico, engranajes planetarios, cargas dinámicas, energía eólica

Recibido: septiembre 2009

Aprobado: octubre 2009

## INTRODUCCIÓN

Un aerogenerador es, sin lugar a dudas, un equipo que se encuentra funcionando en condiciones muy adversas; la humedad, los cambios de temperatura y sobre todo, los efectos nocivos de la variación, en dirección y magnitud, de la velocidad del viento, hacen que estas máquinas necesiten de una atención extrema en su diseño y construcción. De hecho, la literatura técnica sobre el tema siempre recomienda cálculos precisos de su buen funcionamiento para la vida prefijada, la cual se plantea generalmente en el rango de 20-25 años [1].

Uno de los agregados del aerogenerador que necesita más atención al momento de su elección o diseño es el multiplicador de velocidad que vincula al sistema de aspas con el generador eléctrico ( figura 1).

En tal sentido, al momento de diseñar o seleccionar este agregado mecánico deben tenerse en cuenta aspectos tales como:

- Límites de vibraciones.
- Nivel de ruido.
- Tiempo de trabajo en vacío y con carga.
- Variación de momento tórsor de entrada.
- Velocidades nominales y máximas.
- Temperatura.

Todos estos aspectos se encuentran normados, siendo solo necesario puntualizar adecuadamente las condiciones de trabajo sin escatimar el sobredimensionado [2].

No obstante hay aspectos que escapan a un análisis riguroso; es el caso del efecto nocivo que sobre el mecanismo

multiplicador (y sobre el resto del equipo) puede resultar del movimiento giroscópico que se produce en un aerogenerador.

En este artículo se aborda particularmente todo el aparato matemático que conlleva el análisis de este efecto sobre los multiplicadores de engranajes planetarios tipo 2KH-A para aerogeneradores y en general sobre el aerogenerador completo.

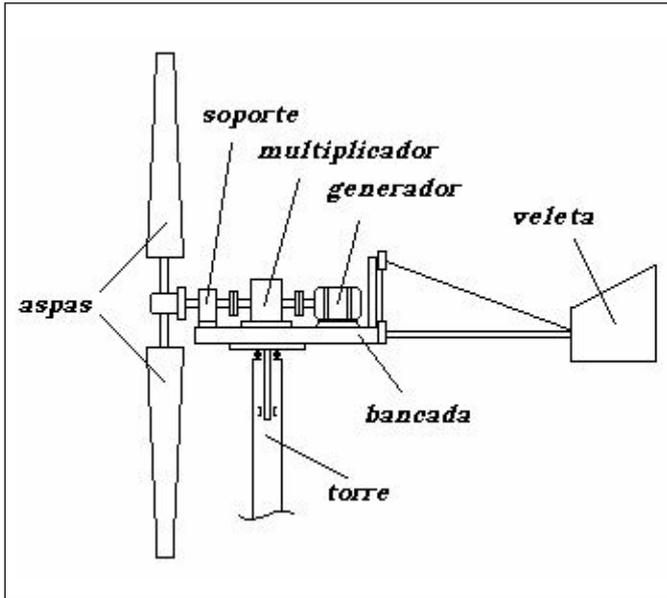


Fig. 1. Esquema elemental de un aerogenerador.

## MOVIMIENTO GIROSCÓPICO

Un giróscopo en su forma elemental, consiste en un volante, que gira a alta velocidad y su eje está montado sobre apoyos tipo cardán, lo que le permite mantenerse en posición estacionaria aún cuando su apoyo general o carcasa se mueva libremente (figura 2). Por tanto, el comportamiento giroscópico no es más que la tendencia del eje del volante (eje de spin) de mantenerse estacionario, a menos que sea forzado físicamente a girar en sentido contrario, permaneciendo su centro de masas estático.

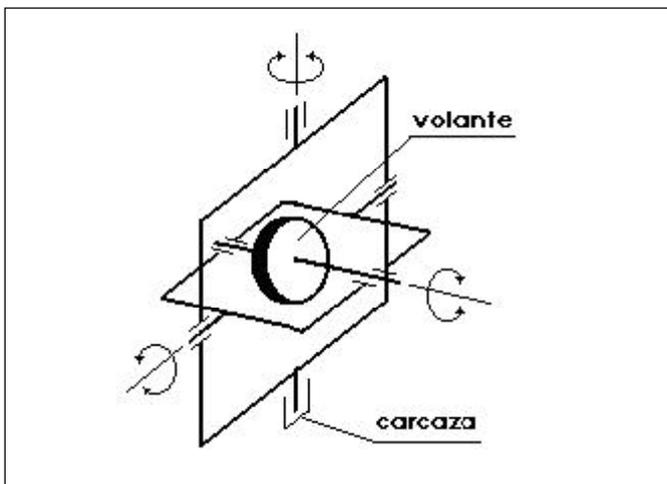


Fig. 2. Esquema de un giróscopo.

Esta propiedad de mantener la orientación, aún cuando su soporte se mueva en cualquier dirección, se denomina memoria espacial y su aplicación práctica se remonta al siglo XVIII [3].

Su basamento físico no es otro que la conservación del momento cinético, confirmando la ley de Newton que plantea que la cantidad de movimiento (lineal o angular) de un cuerpo permanece constante a menos que sea obligado a cambiar por una fuerza o momento externo.

El ejemplo clásico y más sencillo para observar este fenómeno es la rueda delantera de una bicicleta; mientras mayor es la velocidad del vehículo y, por tanto, mayor la velocidad con movimiento plano de dicha rueda, más fácil es abandonar el timón y se mantendrá orientada en su movimiento, ya que mayor será también la oposición de la rueda, que funge como volante, a variar su momento cinético, es decir su condición de equilibrio inercial.

Precisamente esa oposición al cambio que se nota en la rueda de bicicleta a variar su orientación ante la rotación que le impone el timón, es el efecto nocivo denominado efecto giroscópico, ya que tal oposición es reflejada directamente sobre los rodamientos de la rueda, recargándolos. Por tanto, todo elemento mecánico que en su movimiento se encuentre sujeto a efectos giroscópicos debe ser analizado detenidamente para evitar el deterioro prematuro de sus cojinetes y con ello la parada total del mecanismo con los consiguientes problemas técnicos y económicos que traen en general.

En el caso particular de los aerogeneradores, este efecto es mucho más peligroso dado que el movimiento es producido por el viento, el cual es inconstante e impredecible; considerándose uno de los más nocivos para el funcionamiento de los mismos [4].

En la figura 1 se mostró un esquema simple de un aerogenerador de baja potencia con sus componentes principales. Tanto el soporte, como el multiplicador, el generador y la unión entre base y bancada poseen, generalmente, cojinetes de elementos rodantes, siendo estos los más dañados debido al efecto giroscópico que se produce al vincular la rotación de las partes principales (aspas-multiplicador-generador) con la rotación adicional de estos respecto a la vertical, inducida por el viento al variar de dirección.

## FUNDAMENTO TEÓRICO DEL MOVIMIENTO GIROSCÓPICO

Para analizar este fenómeno cinético se parte de definir la posición del giróscopo por medio de un sistema de referencia fijo OXYZ con origen en el centro de masas O del giróscopo, de forma tal que los dos marcos cardánicos estén en el plano YZ y el disco en el plano XY (figura 3).

Si se desplaza el giróscopo de su posición de referencia por medio de la rotación de los ejes 2-2, 3-3 y la línea OA, entonces se pueden definir los ángulos generados  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ ,

denominados ángulos de Euler, y van a caracterizar totalmente la posición del giróscopo en cualquier instante, además sus derivadas definirán las velocidades angulares en cada eje.

Al plantear desde el inicio que el centro de masas se encuentra estático, entonces el resultado dinámico será influenciado por la inercia angular del cuerpo, por tanto, se hace necesario ubicar los ejes principales de inercia en el mismo, que por comodidad en el análisis matemático deben ser invariables en el tiempo; para ello se fija entonces en el punto O un sistema de ejes de referencia en rotación OXYZ, los cuales serán los ejes principales de inercia del cuerpo.

Este nuevo sistema de ejes será móvil y poseerá velocidad de precesión y de nutación pero no tendrá velocidad de spin, ya que el eje x será siempre perpendicular al plano yz, es decir, no se moverá con la velocidad del disco  $d/dt$  alrededor del eje 3-3.

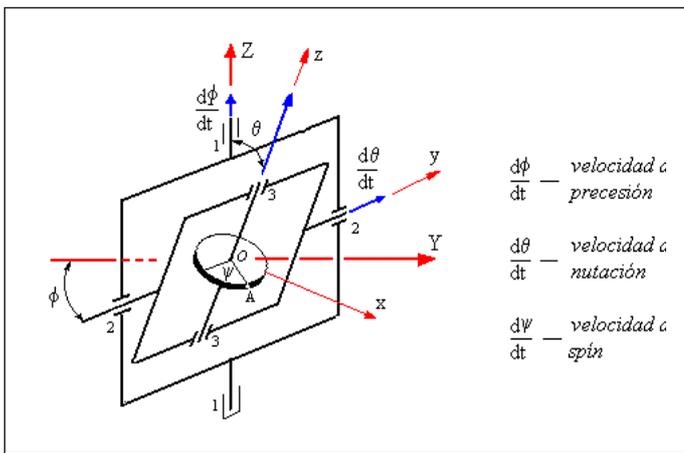


Fig. 3. Ángulos de Euler.

Dado que la velocidad angular del disco debe descomponerse sobre los tres ejes de rotación z, y Z, y conociendo que el eje Z no es ortogonal con el eje z, se llega a la expresión de cálculo del vector :

$$\vec{\omega} = -\frac{d\phi}{dt} \text{sen}\theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + \left( \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \cos\theta \right) \vec{k} \quad (1)$$

Conocido el valor del vector  $\vec{\omega}$  y establecido el sistema de ejes principales de inercia Oxyz se puede determinar el momento cinético o *momentum* angular del cuerpo.

$$\vec{H}_o = \sum I_i \cdot \vec{\omega}_i = \sum \vec{h} \quad (2)$$

Por ser el disco un cuerpo con movimiento tridimensional, el vector  $H_o$  se puede descomponer en los tres ejes, quedando tres ecuaciones denominadas también ecuaciones de Euler:

$$\vec{H}_o = h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k} \quad (3)$$

donde:

$$\begin{aligned} h_x &= I_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ h_y &= -J_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ h_z &= -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + I_z \omega_z \end{aligned} \quad (4)$$

Como las características inerciales fueron tomadas con respecto al sistema móvil Oxyz, entonces el tensor de inercia o diádico que modifica al vector velocidad angular tendrá la forma:

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Con lo cual se reduce todo al cálculo de los momentos principales de inercia.

Para el caso analizado se adopta

$$I = I_z \quad \text{Con respecto al eje de spin.}$$

$$I' = I_y = I_x \quad \text{Con respecto a los ejes transversales.} \quad (5)$$

Sustituyendo (1) y (5) en (4) se llega a la expresión general (2) en la siguiente forma:

$$\vec{H}_o = -I' \frac{d\phi}{dt} \text{sen}\theta \vec{i} + I' \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + I \left( \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \cos\theta \right) \vec{k} \quad (6)$$

Luego, es ya factible el planteamiento de la expresión que relaciona el momento resultante de todas las fuerzas actuantes sobre el cuerpo con el momento cinético, es decir:

$$\sum \vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt} \quad (7)$$

Ocurre que el vector  $H_o$  se calculó con respecto al sistema móvil Oxyz para facilitar el cálculo inercial, luego es necesario determinar la velocidad de este sistema móvil respecto al sistema fijo OXYZ: esta velocidad será:

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + \frac{d\phi}{dt} \vec{k} \quad (8)$$

Descomponiendo el segundo termino de la derecha en sus componentes sobre el sistema móvil Oxyz, se obtiene:

$$\vec{\Omega} = -\frac{d\phi}{dt} \text{sen}\theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \vec{j} + \frac{d\phi}{dt} \cos\theta \vec{k} \quad (9)$$

La expresión (7) para el caso de un cuerpo con movimiento alrededor de un punto fijo será entonces:

$$\Sigma \bar{M}_o = \frac{d\bar{H}_o}{dt} + \bar{\Omega} \cdot \bar{H}_o \quad (10)$$

Sustituyendo (6) y (9) en (10) se obtienen tres ecuaciones capaces de determinar el efecto dinámico que ocurre en un cuerpo con movimiento alrededor de un punto fijo:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I'(\ddot{\psi} \text{sen} \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \text{cos} \theta) + I\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \\ \Sigma M_y &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \text{cos} \theta) + I\dot{\phi} \text{sen} \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \\ \Sigma M_z &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \text{cos} \theta) + I\dot{\phi} \text{sen} \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

En la práctica se presentan casos particulares como es el del movimiento en dos ejes. En este caso se parte de considerar constante el ángulo  $\theta$  de la figura 3; de esta forma no existirá velocidad de nutación y solo rotarán los ejes 1-1 y 3-3, es decir, solo tendrá velocidad de precesión y de spín.

Precisamente esta situación es la que se presenta en los aerogeneradores de la figura 4, ya que se produce la rotación principal de las aspas alrededor del eje xy también la rotación alrededor del eje Z producto de los cambios de dirección del viento.

En estas nuevas condiciones, para el elemento giroscópico los vectores fundamentales  $\omega$ ,  $H_o$  y  $\Omega$  tomarán las formas siguientes.

Para la velocidad del disco giroscópico respecto al sistema fijo,  $\omega$  estará solo sobre los ejes z y Z (figura 5).

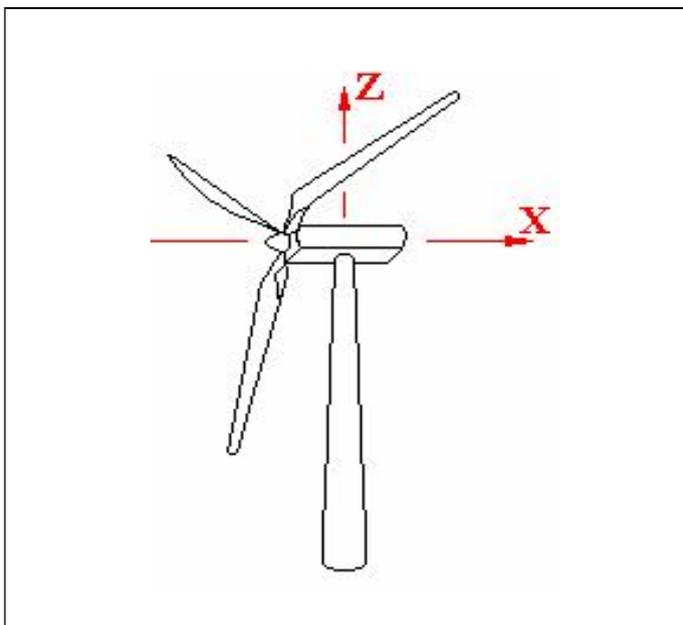


Fig. 4. Aerogenerador.

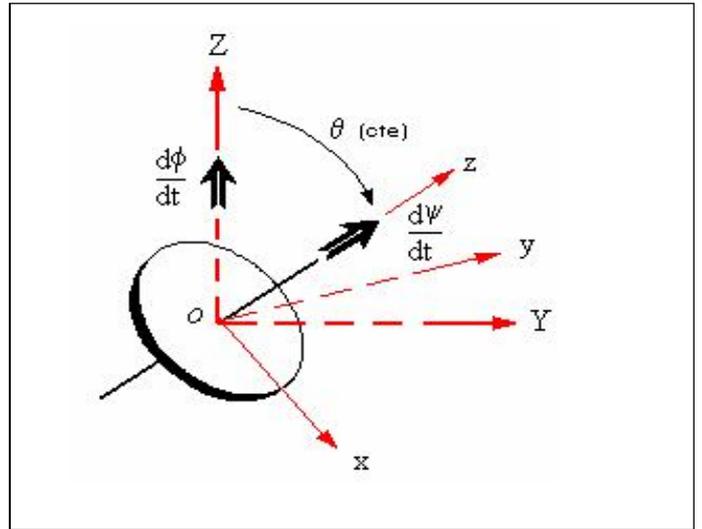


Fig. 5. Disco giroscópico.

Luego:

$$\bar{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \bar{k} + \frac{d\psi}{dt} \bar{k} \quad (12)$$

Descomponiendo el primer término de la derecha sobre los ejes móviles queda:

$$\bar{\omega} = -\frac{d\phi}{dt} \text{sen} \theta \bar{i} + \frac{d\phi}{dt} \text{cos} \theta \bar{k} + \frac{d\psi}{dt} \bar{k} \quad (13)$$

Para el vector momento cinético  $H_o$ , debido a que se refiere al sistema de ejes móviles Oxyz, se puede plantear en general:

$$\bar{H}_o = I_x \omega_x \bar{i} + I_y \omega_y \bar{j} + I_z \omega_z \bar{k} \quad (14)$$

Para el caso analizado,  $\omega_y = 0$ ; luego sustituyendo:

$$\begin{aligned} I_x &= I' \\ I_z &= I \end{aligned}$$

Sustituyendo estos arreglos además de (13) y (14), se obtiene:

$$\vec{H}_o = -I' \frac{d\phi}{dt} \text{sen} \theta \vec{i} + I \left( \frac{d\phi}{dt} \text{cos} \theta + \frac{d\psi}{dt} \right) \vec{k} \quad (15)$$

Finalmente, para la velocidad angular  $\Omega$  del sistema móvil referido al sistema fijo solo se tiene:

$$\bar{\Omega} = \frac{d\phi}{dt} \bar{k} \quad (16)$$

El cual referido al sistema móvil:

$$\bar{\Omega} = -\frac{d\phi}{dt} \text{sen} \theta \bar{i} + \frac{d\phi}{dt} \text{cos} \theta \bar{k} \quad (17)$$

Luego, sustituyendo (15) y (17) en (10); con el objetivo de obtener las reacciones externas se plantea:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{M}_o = & -I \ddot{\phi} \text{sen} \theta \bar{i} + I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \bar{k} + \\ & + [I \dot{\phi} \text{sen} \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \bar{j} - I \dot{\phi}^2 \text{cos} \theta \text{sen} \theta \bar{j}] \end{aligned} \quad (18)$$

Esta expresión diferencial permite analizar cualquier sistema dinámico que posee dos direcciones de rotación independientes y su centro de masas inmóvil.

En el caso particular de un aerogenerador convencional de eje horizontal (figura 4), las dos direcciones de rotación, o sea, las velocidades de precesión y de spín serán perpendiculares entre sí lo cual implica que  $\theta = 90^\circ$ ; aplicado esto a la expresión (18):

$$\Sigma \bar{M}_o = -I \frac{d^2 \phi}{dt^2} \bar{i} + I \frac{d\phi}{dt} \frac{d\psi}{dt} \bar{j} + I \frac{d^2 \psi}{dt^2} \bar{k} \quad (19)$$

Como se observa, esta expresión plantea el surgimiento de pares externos en los tres ejes, producto de las velocidades de precesión y de spín y sus aceleraciones respectivas; y el efecto que producen en un aerogenerador no es otro que la tendencia a separar la bancada de la torre y por supuesto una sobrecarga sustancial de todos los cojinetes del equipo, la cual se transmite a toda la estructura. Este efecto también se transmite al multiplicador instalado en el aerogenerador, en este caso un multiplicador planetario tipo 2KH-A, sobre el cual se producirán sobrecargas, las cuales recargarán los rodamientos, acortando su vida útil.

En este sentido es necesario analizar en qué medida estas cargas dinámicas limitan la vida útil del multiplicador,

para calcular adecuadamente sus rodamientos para el período de cambio de los mismos que sea establecido.

## CONCLUSIONES

Teniendo en consideración los aspectos planteados, se observa que el efecto del viento es capaz de generar cargas dinámicas de consideración sobre los elementos de un aerogenerador, en función del valor que alcancen sus velocidades y aceleraciones. Por tanto, es vital tener en cuenta este factor en el momento de elegir o diseñar los elementos que componen los aerogeneradores; en el caso particular del multiplicador de velocidad, su vida útil podría limitarse en exceso, haciendo incosteable la inversión.

Como el efecto giroscópico se produce no solo por la acción de las velocidades y aceleraciones sino también por las características inerciales de los elementos en movimiento, se hace necesario entonces realizar el análisis de inercia de los mismos.

## REFERENCIAS

1. **Enblin, C.:** "Desarrollo de aplicaciones de la energía eólica". Conferencia, Ciudad Habana, marzo, 1994.
2. **AGMA/AWEA 921-A97: Recommended Practices for Design and Specification of Gearboxes for Wind Turbine Generator Systems**, October 1996.
3. **Cochin, I.** *Analysis and Design of the Gyroscope for Inertial Guidance*, John Wiley & Sons, 1963.
4. **Le Gourieres, L.:** *Energía eólica, teoría, concepción y cálculo práctico de las instalaciones*, Ciudad de La Habana, 1983.

## AUTORES

### Jorge Wellesley-Bourke Funcasta

Ingeniero Mecánico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, Ciudad de La Habana, Cuba

### Luis Martínez Delgado

Ingeniero Mecánico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Auxiliar, Facultad de Ingeniería Mecánica, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, Ciudad de La Habana, Cuba

## Equations for the three dimensional movement in planetary gears for wind turbines

### Abstract

This paper presents the mathematical base, useful to establish the analysis that deals with the noxious effect produced on the planetary mechanisms in the gearboxes for wind turbine generator systems, given by the variable conditions of the velocity and direction of the wind.

Key words: gyroscopic effect, planetary gears, dynamic loads, wind turbine, wind energy