

Artículo recibido el 15 de noviembre del 2013. Aceptado para publicación el 20 de abril del 2014

Una mirada sociocultural del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación

A sociocultural view of algebraic thinking from cultural theory of objectification

John Gómez Triana¹
Javier Mojica Vargas²

Resumen

Cuando se habla de pensamiento algebraico suele pensarse en la representación de los objetos matemáticos por medio de un registro semiótico compuesto principalmente por signos alfanuméricos. Entonces, podría pensarse que la manipulación de los símbolos algebraicos, por parte del estudiante, se convierte en un indicador del grado de desarrollo del pensamiento algebraico del mismo. En contraste a lo anterior, algunos investigadores en educación matemática han postulado que el lenguaje alfanumérico propio del algebra tradicional no es la única herramienta semiótica que da cuenta de la naturaleza y desarrollo del pensamiento algebraico de los individuos. En este artículo se presenta una evidencia de este hecho realizando una mirada del pensamiento algebraico que permite examinar aspectos de la forma como piensan, sienten y son los estudiantes frente a lo indeterminado y explorar cómo operan con las cantidades desconocidas para finalmente indagar sobre la herramienta semiótica que utilizan para representar una situación en la que interviene alguna cantidad desconocida. La evidencia presentada corresponde a un análisis realizado a la actividad matemática de un grupo de estudiantes al desarrollar una Tarea sobre generalización de patrones de una secuencia figural. El análisis se sustenta teóricamente con la Teoría Cultural de la Objetivación y tiene como propósito poner de manifiesto la importancia de reconocer que en los procesos de pensamiento de los estudiantes intervienen una serie de aspectos histórico culturales que influyen directamente en la forma de representar, semióticamente hablando, los objetos algebraicos. En otras palabras, el objetivo es argumentar teóricamente del por qué es importante ampliar la mirada de los signos que dan cuenta de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento algebraico desde una teoría que se inscribe en una perspectiva semiótico cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras Clave: Generalización de Patrones; Semiótica Cultural; Registros Semióticos; Signo; Actividad Matemática.

Abstract

When talking about algebraic thinking it is common to think of the representation of mathematical objects through a semiotic register composed mainly of alphanumeric characters. So one might think that the manipulation of algebraic symbols of the student becomes an indicator of the degree of development of that same algebraic thinking. In contrast to this, some researchers in mathematics education have postulated that the very language of traditional alphanumeric algebra is not the only semiotic tool that reflects the nature and development of the algebraic thinking of individuals. This article provides evidence of this fact by taking a look at the algebraic thinking that allows you to examine aspects of the way students think, feel, and face the unknown and explore how they operate with these unknown quantities to finally investigate the semiotic tool used to represent a situation involving an unknown quantity. The evidence presented is an analysis of a mathematical activity a group of students developed to generalize figural patterns in a sequence. The analysis

¹ Magister en Docencia de las Matemáticas, Licenciado E B E Matemáticas, Secretaría de educación distrital, Bogotá, Colombia, Email: johngomez@gmail.com

² Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática (Estudiante), Licenciado E B E Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Email: javiermojicav@hotmail.com

is based theoretically with the Cultural Theory of Objectification and aims to highlight the importance of recognizing that in the thought processes of students, a series of historical and cultural aspects directly influence the way of representing, semiotically speaking, algebraic objects. In other words, the objective is to argue theoretically why it is important to extend our view of the signs that reflect the nature and development of algebraic thinking from a theory that is part of a semiotic cultural perspective of teaching and learning mathematics.

Key words: Generalization of Patterns; Cultural Semiotics; Semiotic Registers; Sing, Math Activity.

INTRODUCCIÓN

Reconocer que el contexto sociocultural de los individuos tiene una influencia directa tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas ha llevado, a algunos investigadores en educación matemática, a la configuración de teorías que permitan explicar cómo se manifiesta tal influencia y la manera en que puede impactar en la construcción de los diferentes currículos de matemáticas que tradicionalmente han estado sustentados en una perspectiva cognitiva de la enseñanza y el aprendizaje. En este contexto, el presente artículo tiene como propósito mostrar cómo ciertos aspectos histórico culturales están presentes en la manifestación del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado décimo de la educación escolar colombiana. Este grupo de estudiantes fue objeto de estudio del proyecto de investigación presentado como tesis de Maestría de Gómez (2013) donde se realizó un análisis de algunos aspectos presentes en la manifestación y evolución del pensamiento algebraico de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas.

El marco de referencia conceptual tomado en el proyecto de investigación reseñado, toma como principal herramienta la *Teoría Cultural de la Objetivación* desarrollada por Radford (2006a) y se enmarca en una perspectiva sociocultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta teoría se construyen elementos conceptuales que permiten explicar cómo la historia y la cultura son parte fundamental del desarrollo del pensamiento de los individuos, en otras palabras, la teoría permite explicar la naturaleza del pensamiento reconociendo que el contexto histórico-cultural es parte constitutivo del mismo.

De esta manera, como se mencionó anteriormente, se presenta el análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando resuelven una Tarea sobre generalización de patrones explicando teóricamente, desde la Teoría Cultural de la Objetivación, algunos aspectos presentes en la manifestación y evolución del pensamiento algebraico de los

estudiantes participantes de la investigación, resaltando así la importancia que tiene reconocer los diferentes elementos semiótico-culturales que intervienen en el desarrollo del pensamiento algebraico.

ELEMENTOS TEÓRICOS

Los elementos teóricos que sustentan el presente escrito están basados en la concepción de álgebra y pensamiento algebraico desde el enfoque semiótico-cultural y toma los planteamientos de la Teoría Cultural de la Objetivación (TCO) en la que se desarrolla una concepción no mentalista de *pensamiento* como práctica social, como “una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (Radford, 2006a, p. 107). Se amplía la idea de *signo* desde la perspectiva vygotskiana. Se sostiene que los recursos semióticos son instrumentos constitutivos del pensamiento, introduciendo la idea de *Medios Semióticos de Objetivación* (artefactos, gestos, símbolos, palabras).

Los medios semióticos de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino *mediadores* de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes (Radford 2006a, 2008, 2010a). Estos medios son aquellos que mediatizan en un plano material la actividad matemática de los estudiantes: *objetos, instrumentos, signos, lenguaje*, etc. Esto es, los medios semióticos de objetivación se convierten en herramientas psicológicas, como sugiere Vygotski (2000), signos y artefactos no son simplemente elementos periféricos de la actividad, su valor no reside en la posibilidad de volver la actividad más fácil si no en convertirse en parte consubstancial de la misma.

En la TCO se considera el aprendizaje como un proceso de objetivación del saber, objetivar hace referencia a la acción de convergencia del signo y del pensamiento que lleva a hacer aparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial. Objetivar es toparse con el objeto (con eso que objeta a la conciencia) en el encuentro entre lo subjetivo y lo cultural. Esta idea viene influenciada por los planteamientos de Vygotski (2000) en los cuales se afirma que transmitir un modo de pensar al estudiante es imposible, pues todo concepto implica un desarrollo en el tiempo. Por ende, es imposible que el estudiante sea

simplemente “acarreado” por el medio. Es así como el aprendizaje consiste de un conocimiento reflexivo con una praxis cognitiva histórica y sus concomitantes formas de acción y razonamiento (Radford, 2008).

En síntesis, en la TCO se consideran dos elementos principales que la separan de otras teorías del aprendizaje. Se parte de una “concepción no mentalista de pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados” (Radford, 2006a, p. 105). Desde este punto de vista el *pensamiento* es considerado, sostiene Radford, como una “re-flexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios” (Radford, 2006a, p.108).

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, en la TCO se profundiza la idea de signo desde la perspectiva Vygotskiana, en la cual se considera que “el signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su internalización” (Radford, 2006c), es decir, los *signos* son considerados como algo que abarca términos lingüísticos orales y escritos, símbolos matemáticos, gestos, etc. (Vergel, 2014a). Los *signos* no son considerados como meros indicadores de actividad mental, por el contrario, son parte constitutiva del pensamiento.

La noción de signo –derivada del trabajo de Vygotski- en Radford incluye gestos, artefactos, ritmo, actividad kinestésica, por lo que esta noción se amplía en la teoría de la objetivación. Para Vygotski (2000): “el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan solo después se transforma en medio de influencia sobre sí mismo” (p. 146). Es en este sentido que desde la TCO se sostiene que los recursos semióticos son instrumentos constitutivos del pensamiento y se denominan *Medios Semióticos de Objetivación* (artefactos, gestos, símbolos, palabras). Por esta razón para Radford (2003, 2008, 2010b, 2010c) los medios de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino *Mediadores* de nuestros actos intencionales.

De acuerdo con Radford (2008, 2010a, 2010b), los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad en concordancia con la actividad reflexiva que ellos median. En particular, el gesto, en términos de Vergel (2014a), es un movimiento corporal que pretende dar sentido a algo, que pretende poner de presente algo, que quiere comunicar algo. Los gestos son elementos indispensables en el proceso de objetivación del saber, pues éstos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.

En las investigaciones adelantadas por Radford (2002, 2010b) en el contexto de la generalización de patrones, se ha puesto en evidencia la movilización, por parte de los estudiantes, de variados recursos semióticos (gestos, lenguaje oral, lenguaje escrito, movimiento, artefactos). Esta movilización permite evidenciar los procesos sociales por medio de los cuales los sujetos aprenden a pensar de acuerdo a modos culturales ya establecidos.

Según Radford (2006a, 2006b, 2008, 2010a) y D'Amore (2006) los signos juegan un rol importante en tanto son elementos que no sólo ayudan a realizar la actividad reflexiva, sino que hacen parte constitutiva de la actividad y de los procesos sociales; según Vergel (2014a), la actividad se hace con signos y se piensa con los signos. Dichos procesos sociales son considerados por Radford (2008) como *procesos de objetivación* y son caracterizados como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes comprenden la lógica cultural con la que los objetos del conocimiento se han dotado y se familiarizan con su constitución histórica de las formas de acción y pensamiento, dicho autor distingue dos de estos procesos que denomina *Iconicidad* y *Contracción Semiótica*.

La iconicidad es una manera de darse cuenta de rasgos similares en un estudio previo a favor del procedimiento que se está realizando. La iconicidad no es sólo el contraste entre dos formas conceptuales; es el proceso mediante el cual los estudiantes se basan en experiencias anteriores para orientarse en una nueva situación. La Contracción Semiótica es otro proceso genético³ de la objetivación del saber, lleva al individuo a hacer una elección

³ El término genético (en ruso *geneticheskii*) se utiliza con relación a los procesos de desarrollo y no refiriéndose a los genes, código genético o similares (Wertsch, 1988)

entre lo que se considera relevante e irrelevante. Durante este proceso se limpian los restos de la experiencia de la evolución matemática con el fin de poner de relieve los elementos centrales que la constituyen. Es así como el aprendizaje, desde esta teoría, se sustenta en los *procesos de objetivación* desarrollados por los estudiantes. En la TCO el aprendizaje es considerado un proceso de objetivación del saber en el cual los signos median la actividad reflexiva.

En el contexto del pensamiento algebraico, en Radford (2012) se considera que en la actividad matemática desarrollada en contextos algebraicos, para operar con lo desconocido o con objetos indeterminados (por ejemplo, variables, parámetros) es necesario tratar dichos objetos de forma analítica. Es decir, se tiene que considerar los objetos como si se tratara de algo conocido, como si fueran números específicos. En concordancia con lo anterior, se colige que las características principales del pensamiento algebraico se centran en la *indeterminancia*, la *analiticidad* y la *designación simbólica*. Es en este contexto en el que los avances investigativos realizados por Radford (2010b); Villanueva (2012), Vergel (2014b) y Gómez (2013) muestran que en las tareas asociadas a generalización de patrones existen estratos de generalidad caracterizados de acuerdo a los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes. Estos estratos son presentados por Radford (2010b) como una tipología de formas de pensamiento algebraico. Tal tipología se presenta a continuación:

- El *Pensamiento Algebraico Factual*. Aquí la indeterminación queda implícita en palabras y gestos y el ritmo constituye la sustancia de la semiótica en los estudiantes en un proceso llamado fórmulas en acción.
- El *Pensamiento Algebraico Contextual*. Aquí la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son reemplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc.
- El *Pensamiento Algebraico Simbólico*. Aquí las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

Los medios semióticos de objetivación movilizados en cada una de las formas de pensamiento algebraico brindan información acerca del desarrollo de mismo, permitiendo así realizar una caracterización de este. Como afirma Arzarello (2006) los medios semióticos de objetivación emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático. Lo anterior permite afirmar que los medios semióticos de objetivación se convierten en características determinantes de las formas de pensamiento.

La TCO como herramienta de análisis

La Teoría Cultural de la Objetivación constituye una herramienta conceptual de análisis de la actividad matemática de los estudiantes en los diferentes niveles del sistema educativo (educación básica, educación media, educación superior). Por esta razón el presente escrito presenta un ejemplo de análisis realizado a la actividad matemática de un grupo de tres estudiantes colombianos de primer año de educación media durante la solución de una Tarea sobre generalización de patrones de una secuencia figural. Esta Tarea hace parte de la secuencia de tareas planteada para la tesis de maestría de Gómez (2013) y la actividad matemática de los estudiantes hace parte de la recolección de información que se realizó durante el proyecto de investigación reportado en dicha tesis. El análisis⁴ se fundamenta en la perspectiva multimodal del pensamiento (Radford, Edwards & Arzarello, 2009) en la cual lo cognitivo, los recursos físicos y la percepción que los estudiantes utilizan al realizar la actividad matemática es analizada de manera conjunta. Esto es, un reconocimiento de la naturaleza multimodal de la cognición donde se acepta que en nuestros actos de conocimiento intervienen diferentes modalidades, sensorial-táctil, perceptual, kinestésico, etc.; las cuales se convierten en nuestros procesos cognitivos.

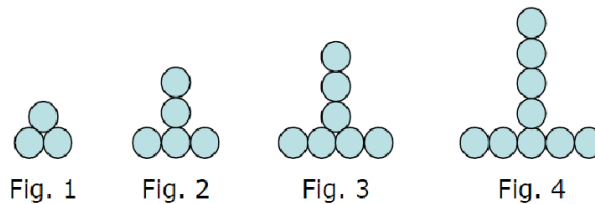
Para los análisis se utilizan los episodios más importantes de cada uno de los puntos de la Tarea exponiendo las transcripciones de los diálogos entre los estudiantes acompañados de algunas fotos que muestran movimientos corporales realizados por ellos (los estudiantes) al resolver cada punto y las hojas de trabajo utilizadas en el desarrollo de la Tarea. Finalmente

⁴ El análisis presentado fue realizado para este artículo, es decir, no hace parte del informe final de la investigación reportada en Gómez (2013)

se realiza una interpretación teórica de lo sucedido en cada episodio seleccionado mostrando los resultados encontrados a la luz de la TCO.

La Tarea

La Tarea corresponde a una secuencia figural (Figura 1) en la que se pretende que los estudiantes identifiquen el patrón de formación de la sucesión y que lo puedan utilizar en la construcción de una expresión algebraica que generalice la secuencia en cuestión. La tarea consta de 4 ítems planteados de manera que posibiliten la movilización de los diferentes recursos semióticos que se exponen en la TCO y así poder evidenciar el desarrollo de aspectos asociados al pensamiento algebraico que emergen en la resolución de tareas de este tipo.



1. Dibujar la Figura 5 y la Figura 6
2. ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura n

Figura 1: Tarea. [$a_n = 2n + 1$]

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Atendiendo al propósito del presente escrito, para el análisis del desarrollo de aspectos asociados al pensamiento algebraico, se expone ítem por ítem el análisis de la actividad matemática de los estudiantes en relación a la Tarea propuesta, es decir, se toman por separado los 4 ítems y se realiza la interpretación teórica del proceso desarrollado por el grupo. Se presentan las transcripciones de los diálogos entre los estudiantes y se acompañan con algunas fotos en las que se muestran los movimientos corporales realizados por ellos cuando explican el proceso de solución de cada uno de los puntos.

Punto 1: Dibujar la Figura 4 y la Figura 5

Para dibujar la figura 4 y 5 los estudiantes se apoyan en las figuras presentadas en la secuencia inicial, centrando su atención simultáneamente en la cantidad de círculos y en su distribución geométrica espacial, estableciendo así una relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos ubicados verticalmente, agregando un círculo más a la distribución horizontal y logrando así capturar el patrón de formación de la secuencia. En la siguiente transcripción se presenta la explicación de los estudiantes del proceso realizado para dibujar la figura 4 y la figura 5 de la secuencia.

- **L1. José:** *En la figura 1 habían 3, habían dos por debajo y uno por encima (Ver foto 1). En la Figura 2 habían 3 por debajo y dos por encima (Ver foto 2). Entonces en esto nos fijamos, abajo iba ascendiendo; abajo iba un número más del que debía ir y arriba iba el número que era [refiriéndose al número de la Figura]. Entonces en la figura 2 tres abajo y dos, nosotros nos guiamos acá, entonces acá abajo hicimos seis abajo y cinco hacia arriba (Ver foto 4) y en la figura 6, siete debajo y seis hacia arriba. (Ver foto 5)*

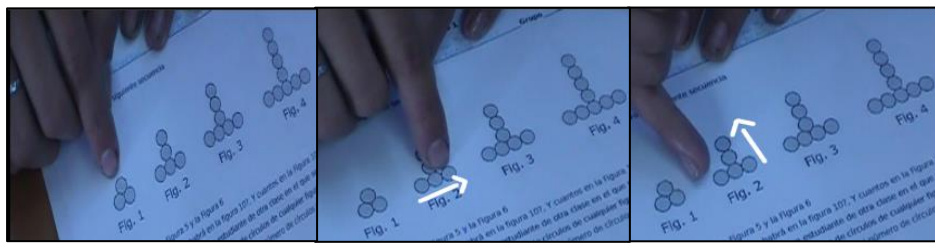


Foto 1

Foto 2

Foto 3

Figura 2. Gestos realizados por José al explicar cómo se forma la secuencia figura 1

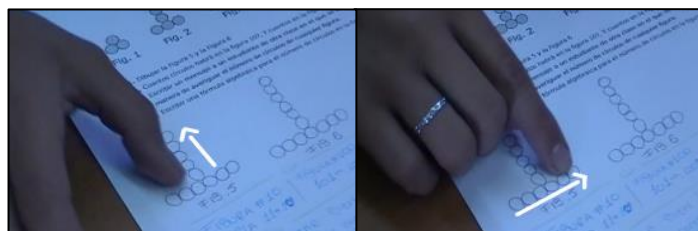


Foto 4

Foto 5

Figura 3. Gestos realizados por José al explicar el número de círculos de la figura 5 y de la figura 6

En L1 José explica la manera en que construyen las figuras 4 y 5 explicitando el patrón de formación de la secuencia, se observa cómo su actividad corporal acompaña todo el tiempo su discurso. Mientras se pronuncia las palabras “*por debajo*” y “*hacia arriba*” sus dedos siguen estos desplazamientos verticales (Ver Fotos 3 y 4). Cuando se refiere a los de abajo (distribución horizontal) moviliza sus dedos de izquierda a derecha (Ver Fotos 2 y 5). Cuando desplaza su dedo sobre la cantidad de círculos verticales pronuncia la cantidad de círculos presentes. Durante la explicación ofrecida por José se puede evidenciar la manera en que los estudiantes identificaron el patrón de generalización⁵ y de esta manera el grupo logra dibujar las figura 4 y 5 correctamente (Ver Fotos 4 y 5).

En la actividad matemática desarrollada por los estudiantes en este punto se puede observar la movilización de varios recursos semióticos tanto kinestésicos como lingüísticos. En relación a los kinestésicos se observan signos como la inscripción y el movimiento, los cuales son movilizados por José al momento de explicar la forma en la que se va construyendo la secuencia a partir de su configuración espacial (Ver L1). En relación a los recursos lingüísticos se presentan frases como “*por debajo*” y “*hacia arriba*” que son expresiones que indican como los estudiantes centraron su atención en la configuración geométrica espacial de la figura. Esto les permite identificar el patrón de formación las figuras de la secuencia. Radford (2012) señala que el vínculo entre las estructuras espaciales y numéricas es un aspecto importante en el proceso de generalización. Tal importancia radica en la transformación cultural que se produce en la manera de ver la secuencia, una transformación que puede llamarse *domesticación del ojo* (Radford, 2010d). En este momento de la solución de la tarea se hace evidente la convergencia del dedo que señala con la pronunciación de la cantidad de círculos y el desplazamiento del dedo hacia arriba y hacia abajo. Esto es lo que Radford (2003) denomina como nodo semiótico ya que corresponde a un segmento de la actividad en la que se movilizaron sincrónicamente diferentes recursos semióticos. Esta sincronización es la manifestación de la mente que quiere explicar su hallazgo. Materializa la intención de comunicar no el número de círculos que hay en cada figura sino la manera de hallarlos. En otras palabras, se evidencia como los

⁵ En Radford (2008) la identificación del patrón de generalización está precedida por la identificación y aplicación de una comunalidad.

estudiantes lograron capturar la regla que permite hallar cualquier término de la secuencia figural presentada.

Punto 2: ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?

Para responder a estas dos preguntas sobre el número de círculos de la figura 10 y 100 los estudiantes utilizan la estrategia usada para construir las figuras 4 y 5. Partiendo del patrón de construcción identificado en el punto anterior, los estudiantes logran encontrar cuántos círculos tendría la figura 10 y cuántos tendría la figura 100. En la transcripción correspondiente a este punto de La Tarea se puede observar que los estudiantes recurren a la configuración geométrica espacial de las figuras de la secuencia para deducir el número de círculos de las dos figuras que se están pidiendo.

- **L2. Sebastián:** Acá también nos guiamos por estas figuras, entonces acá 11 (Ver Foto 6) y 10 (Ver Foto 7).

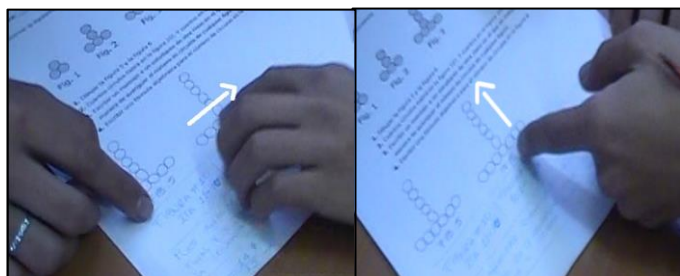


Foto 6

Foto 7

Figura 4. Gestos realizados por Sebastián al explicar el número de círculos de la figura 10

- **L3. José:** *Y en la figura 100 deberían haber 101 y hacia arriba 100*

En L2 Sebastián declara que para la figura 10 se basaron en las figuras presentadas en la secuencia, sin embargo no necesitan dibujar los círculos de la figura pues utilizan el dibujo de la figura 6 para explicar cuántos habrían en la figura 10. En las fotos 6 y 7 se observan los movimientos realizados por Sebastián al explicar el número de círculos que tendría la figura 10. En la Foto 6 se evidencia la movilización de un medio semiótico de objetivación ya que el movimiento horizontal lo utiliza para indicar que en la figura 10 en la parte de abajo deben ir 11 círculos. En la Foto 7 el movimiento vertical lo realiza para indicar que

en la figura 10 hacia arriba habría 10 círculos. Es importante resaltar que en este punto los estudiantes no necesitan dibujar la figura sino que el número de círculos lo encuentran acudiendo al patrón de construcción identificado cuando dibujaron las figuras 4 y 5. Los estudiantes hacen evidente este patrón de construcción movilizándolo un medio semiótico de objetivación que se ha llamado movimiento.

En las Fotos 6 y 7 Sebastián se desprende de la representación gráfica para realizar los movimientos realizados anteriormente en el aire, pero con el mismo recurso semiótico, el movimiento horizontal acompañado de la cantidad de círculos en esa posición y el movimiento vertical. Los medios semióticos de objetivación en la solución de este punto de la tarea son los mismos usados en el primer punto, esto lleva a percibir el tránsito entre la generalización factual y la contextual. En la solución de tareas sobre generalización aparecen asociados ciertos tipos de acciones o medios semióticos de objetivación para la resolución de este tipo de tareas, que a su vez definen estratos de generalidad. En este fragmento de la tarea es posible distinguir la aparición inicial de dos procesos de objetivación, el primero de ellos corresponde a la iconicidad proceso en el cual se advierten acciones similares realizadas en un procedimiento anterior, proceso que se evidencia cuando los movimientos vertical y horizontal de las manos usados en la solución del punto anterior vuelven a aparecer en la solución de este punto. Simultáneamente es posible referir un indicio del proceso de contracción semiótica que Radford (2008) define como un mecanismo de reducción de aquellos aspectos o acciones que pueden ser obviadas y que conducen a un nivel más profundo de conciencia, es decir la reducción de recursos semióticos que movilizan los estudiantes y que conducen a una capa o estrato de inteligibilidad más profundo. Este proceso se evidencia en L3 cuando José señala la configuración geométrica espacial de la figura 100 sin utilizar el dibujo o representación gráfica de la figura en esa posición, esta acción de desprenderse del recurso semiótico escrito devela la captura mental de la estructura espacial de las figuras, esto muestra que la configuración de la secuencia ya apareció en la mente del estudiante y es posible reproducirla en otros momentos.

Para la figura 100 la estrategia utilizada es la misma que para la figura 10, de esta manera los estudiantes logran saber cuántos círculos deberían ir horizontal y verticalmente en la

figura 100 (Ver L3). Cabe anotar que cuando dan la respuesta los estudiantes no dicen el total de círculos de las figuras, lo que hacen es decir cuántos círculos deben ir horizontalmente y cuantos verticalmente. Esto se debe a que durante la actividad matemática desarrollada el foco de atención siempre ha sido la configuración geométrica espacial de las figuras. Sin embargo este hecho no puede ocultar la existencia de auténticas manifestaciones del pensamiento algebraico.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.

En este punto se les solicita a los estudiantes escribir un mensaje que especifique la forma de proceder para hallar el número de círculos de una figura cualquiera. Ésta es una de las preguntas más representativas en los trabajos de Radford (2010c) y Vergel (2014b), cuyo propósito es conminar a los estudiantes a trabajar con lo indeterminado, es decir, que los estudiantes, de alguna manera, nominen, nombren lo desconocido.

La forma de proceder de los estudiantes en este punto no fue redactar un mensaje de manera explícita sino que por medio de una explicación comunican la manera de encontrar el número de círculos que tendría cualquier figura.

- **L4. Arnold:** *Si en la figura 1 hay un círculo arriba y el doble abajo, en la figura 2 hay dos arriba y 3 abajo, en la 3 son tres círculos arriba y cuatro abajo. Depende el número de arriba se le suma uno a los círculos de abajo. Entonces si, por ejemplo, en la figura 4 hay cuatro hacia arriba ascendería uno abajo, entonces sería cinco.*
- **L5. José:** *Si queremos que hallara el número del 50 [de la figura 50] entonces serían 51 uno abajo y 50 hacia arriba. Ya con esa explicación.*
- **L6. Sebastián:** *Osea todo se tiene que solucionar dependiendo el número de la figura que está ahí*

En L4 Arnold explica la manera en la que se forma cada figura de la secuencia, se puede evidenciar como las palabras “*arriba*” y “*abajo*” son parte fundamental del discurso y constituyen lo que Radford (2010c) caracteriza como medios semióticos de objetivación lingüísticos y en este caso estarían reemplazando los movimientos que realizaban en el

punto 1 y el punto 2 de la tarea. Los medios semióticos de objetivación lingüísticos son característicos del *pensamiento algebraico contextual* ya que en este tipo de pensamiento la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son reemplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc. (Radford 2010c). Además en L4 en la frase “*Depende el número de arriba se le suma uno a los círculos de abajo*” se puede observar que los estudiantes establecen una relación funcional entre el número de círculos verticales y el número de círculos horizontales.

En términos de Radford (2006b), el pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente, de manera funcional, es caracterizado mediante tres elementos interrelacionados: a) el sentido de indeterminación (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros); b) la analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados) y c) la designación simbólica de sus objetos. En la producción matemática de los estudiantes “*Depende el número de arriba se le suma uno a los círculos de abajo*” se evidencia, por un lado un sentido de la indeterminancia (depende el número de arriba), y por otro, la analiticidad (se le suma 1 a los círculos de abajo).

Más aún, este grupo designa simbólicamente con la frase “*número de arriba*” para referirse a un número indeterminado sin recurrir a los signos alfanuméricos del álgebra. Esta situación constituye una evidencia de que los sujetos piensan y realizan actividad reflexiva a partir y con los signos (vygotskianos) que tienen a su disposición, es decir, los signos utilizados por los estudiantes y la forma como éstos son usados les permiten reflexionar sobre el mundo. Lo anterior se confirma en L6 donde Sebastián utiliza la frase “*el número de la figura*” para referirse a la cantidad indeterminada.

Punto 4: Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura n

En este punto los estudiantes deben escribir una fórmula algebraica que permita calcular el número de círculos de una figura n . Como es de esperarse, el grupo utiliza lo hecho en los puntos anteriores y tratan de utilizar letras para representar el proceso descrito en el punto del mensaje. A continuación se muestra la explicación de la manera en que construyeron la fórmula algebraica.

- **L7. José:** *Nosotros nos basamos que el número de la figura n es el número 14 en*

el abecedario, si me entiende, la n ocupa el número 14 en el abecedario. Pues entonces nosotros dijimos serían 14 hacia arriba y 15 hacia abajo

- **L8. Arnold:** *Porque haciendo un círculo mas*
- **L9. Profesor:** *Explíqueme otra vez lo ultimo*
- **L10. José:** *Acá dice escribir en una fórmula algebraica para cada número de círculos de la figura n. Pues nosotros acá hicimos, ubicamos el abecedario en los número reales, y pues entonces la letra n ocupo el número 14. Entonces la letra n es el número 14. Serian 15 por debajo y 14 hacia arriba. [El estudiante acompaña la explicación con dos gestos que indican “por debajo” y “hacia arriba”] pues eso sería lo que ocuparía. (Ver Figura 5)*

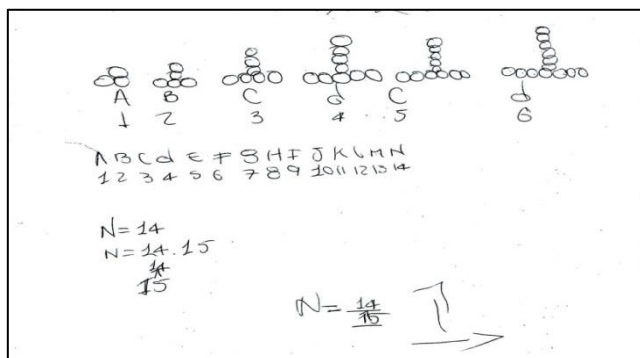


Figura 5. Fórmula algebraica propuesta por el grupo para hallar el número de círculos de la figura n

La forma de proceder de este grupo llama la atención ya que le asignan un número a la letra n teniendo en cuenta el lugar que ocupa dicha letra en el abecedario, es decir, recurren a un orden lexicográfico para encontrar una correspondencia numérica a la letra n (Ver L7). En L9 José explica la razón por la que el valor numérico de la letra n debe ser 14. Es así como determinan que en la figura n debería haber 14 círculos verticales y 15 círculos horizontales. Como los estudiantes no dan el total de círculos de la figura el profesor indaga sobre esta cantidad.

- **L11. Profesor:** *Cuantos hay entonces*
- **L12. José:** *Serían 15 por debajo y 14 hacia arriba*
- **L13. Profesor:** *¿Cuantos?*

- **L14. Arnold:** *15 vertical y 14 horizontal*
- **L15. Profesor:** *¿Y en total?*
- **L16. José:** *Serían 15 más 14, 39 [Sic]*

De L11 a L15 se observa que los estudiantes dan el resultado del número de círculos de la figura 14, es decir, asignan el número 14 a la letra n y realizan el procedimiento de los puntos 1, 2 y 3 para encontrar el total de círculos de la figura. Esto significa que el sentido de la indeterminancia que habían mostrado en el punto 3 ha desaparecido cuando se les preguntó por la fórmula algebraica. Este episodio muestra que los estudiantes no identifican la letra como una forma simbólica de representar cualquier cantidad, ya que en la transcripción se evidencia que los estudiantes designan a la letra n como representante de un número específico. Partiendo de este hecho, se puede decir que los estudiantes de este grupo aún no presentan características de la tipología *pensamiento algebraico simbólico* (Radford, 2010a) ya que no aparece una fórmula algebraica que permita resumir y describir espacialmente la cantidad de círculos que posee cualquier figura de la secuencia presentada.

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES FINALES

Partiendo de los análisis presentados, a manera de conclusión, es importante subrayar que las actuaciones de los estudiantes resultan ser una clara evidencia de la marca o el legado cultural que ellos tienen y que ponen en juego en la solución de la Tarea. Esto ratifica los planteamientos teóricos en los que se afirma que durante una actividad matemática, como la reportada en este artículo, se puede evidenciar la existencia de sujetos históricos y culturales haciendo matemáticas con los signos que tienen a su disposición y a través de los cuales logran acercarse a esos modos de significación cultural aceptados como válidos.

Una mirada sociocultural al pensamiento algebraico permite concienciar acerca de la importancia de reconocer, en el curso de la actividad matemática, aspectos que dan cuenta que el desarrollo de este pensamiento no se puede reducir al manejo y dominio del lenguaje alfanumérico del álgebra que la cultura curricular ha incrustado como válido y que en varias ocasiones se convierte en la única herramienta semiótica considerada para representar los objetos algebraicos. En contraste a lo anterior, el enfoque semiótico cultural, invita a los profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática a ser más

sensibles a esos modos particulares o procesos subjetivos de toma de conciencia de los objetos matemáticos, de naturaleza cultural.

Los estudiantes que resolvieron la tarea demuestran una actividad matemática, semióticamente mediada, en la cual las experiencias anteriores orientan la actividad y en la cual el cuerpo se convierte en un sistema semiótico de representación que juega un papel protagónico en la manera en que se aborda y se resuelve La Tarea. Durante el proceso de solución desarrollado por los estudiantes se puede evidenciar formas no tradicionales de pensamiento algebraico, sin embargo, no se puede desconocer que dichas formas van evolucionando progresivamente al denominado pensamiento algebraico simbólico. En este contexto, es importante señalar que las formas de pensamiento algebraico planteados por Radford (2008) (Factual, Contextual y Simbólico) están determinadas por los procesos de contracción semiótica. El análisis de las producciones matemáticas de los estudiantes muestra que ellos pueden estar en un tipo de pensamiento algebraico factual y más tarde evidenciar un tipo de pensamiento algebraico Contextual o viceversa, lo cual sugiere que estos procesos de objetivación no son homogéneos ni lineales.

En síntesis, se muestra una evidencia de que el pensamiento algebraico se manifiesta a través de medios semióticos de objetivación diferentes al simbolismo alfanumérico del álgebra (las letras). Los medios semióticos de objetivación fueron utilizados por los estudiantes para proporcionar una solución satisfactoria a la Tarea presentada, lo que implica que la no manipulación de los símbolos algebraicos no constituye un obstáculo para desarrollar dicha Tarea. Un análisis como el presentado aquí espera generar sensibilidad acerca de la necesidad de reconocer una serie de medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación que caracterizan las formas de pensamiento algebraico que se manifiestan en una Tarea como la presentada en este artículo. Es así como se espera haber llamado la atención sobre la existencia de recursos semióticos que dan cuenta del pensamiento algebraico y que son diferentes al lenguaje alfanumérico que usualmente e histórico-culturalmente ha sido aceptado como la principal herramienta semiótica del álgebra.

REFERENCIAS

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 267-300.
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 177-196.
- Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá-Colombia.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 103-130.
- Radford, L. (2006b). *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2006c). Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 7-22.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2010c). *Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students*. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 73-80. Belo Horizonte, Brazil.
- Radford, L. (2010d). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7.

Gómez Triana, J., & Mojica Vargas, J. (2014). Una mirada sociocultural del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 81-99.

Radford, L. (2012). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental* ISSUE. 12° International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond Words. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (3), 91-95.

Vergel, R. (2014a). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios*, 1(39), 65-76. Recuperado de <http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RF>.

Vergel, R. (2014b). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. (Tesis Doctoral Laureada). Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá-Colombia.

Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figúrales*. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia.

Vygotski, L. (2000). *Obras Escogidas Volumen III*. (L. Kuper, Trad.) Madrid-España: Visor.