

---

## Estudo numérico da propagação de ondas em praias planas utilizando os modelos Lagrangiano sem malhas e Euleriano

*Numerical study of the propagation of waves on flat beaches using Lagrangian meshless and Eulerian models*

Carlos Alberto Dutra Fraga Filho<sup>1</sup>, Fabio Pavan Piccoli<sup>2</sup>, Danilo de Almeida Barbosa<sup>3</sup>  
e Julio Tomás Aquije Chacaltana<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universidade do Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico

Laboratório de Simulação de Escoamentos com Superfície Livre, 29075-910

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – IFES – Vitória – ES

cadff1@gmail.com

<sup>2</sup> Universidade do Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico

Laboratório de Simulação de Escoamentos com Superfície Livre, 29075-910

Grupo de Pesquisas Costeiras NS Ambiental (NavierSat Meio Ambiente Ltda) – Vitória – ES

naviersat@gmail.com; fabio\_p\_p@hotmail.com

<sup>3,4</sup> Universidade do Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico

Laboratório de Simulação de Escoamentos com Superfície Livre (LABESUL) 29075-910 – Vitória – ES

danilofisico@yahoo.com.br; juliotac@gmail.com

Recebido: 27/02/14 - Revisado: 28/04/14 - Aceito: 19/11/14

---

### RESUMO

O presente estudo apresenta uma comparação entre a aplicação de um modelo Lagrangiano sem malhas e de um modelo Euleriano, com emprego de malhas, para o estudo da propagação de ondas em regiões costeiras. O modelo numérico euleriano se fundamenta nas equações não-lineares de ondas do tipo Boussinesq e o modelo numérico Lagrangiano sem malhas emprega o método Smoothed Particle Hydrodynamics. Os resultados das simulações numéricas mostraram concordância dos modelos no comportamento da superfície livre. A maior discrepância ocorreu na região de arrebentação da onda, durante a quebra, e no run-up.

**Palavras Chave:** Equações não-lineares de ondas do tipo Boussinesq. Modelo Lagrangiano sem malhas. Smoothed Particle Hydrodynamics, zona costeira. Zona de surf

### ABSTRACT

This study presents a comparison between the application of a Lagrangian meshless model and an Eulerian model that uses meshes to study the propagation of waves in coastal regions. The Eulerian numerical model is based on Boussinesq-type nonlinear wave equations and the Lagrangian meshless model employs the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method. The results of numerical simulations showed an agreement of both models for free surface behavior. The largest discrepancy occurred in the surf zone, during the breaking, and in the run-up.

**Keywords:** Boussinesq-type nonlinear wave equations. Lagrangian meshless method. Smoothed Particle Hydrodynamics. Coastal region. Surf zone

## INTRODUÇÃO

Historicamente, a visão euleriana é a mais utilizada na modelagem dos problemas físicos que envolvem fluidos e sólidos. Esta modelagem requer o uso de métodos numéricos – método das diferenças finitas (MDF), método dos volumes finitos (MVF) e método dos elementos finitos (MEF) – que empregam grades ou malhas para a solução das formulações diferenciais ou integrais (LIU; LIU, 2010).

Os métodos numéricos baseados em uma malha adequadamente pré-definida convertem as equações governantes em um conjunto de equações algébricas. Geralmente, as incógnitas das variáveis de campo são avaliadas em pontos nodais. Porém, aqueles apresentam limitações em aplicações de problemas de geometria complexas e na modelagem de processos físicos, ambos associados à resolução da escala espacial.

Em métodos lagrangianos com malhas, como o MEF, a geração das mesmas mostra-se como um significativo esforço computacional. O remalhamento, necessário em problemas com grandes deformações, é um processo difícil, demorado e caro, além da possibilidade de conduzir a imprecisões nos resultados.

O uso da malha pode levar a várias dificuldades ao tratar problemas de escoamentos de fluidos que apresentem superfície livre, interfaces móveis, geometrias complexas ou mudanças topológicas. Caso estas características existam, a geração da malha e o remalhamento são necessários, trazendo consigo todas as dificuldades apresentadas anteriormente. Uma das maiores dificuldades do uso de malhas está em garantir-se a consistência da equação algébrica a ser usada na solução do problema físico.

Recentemente, a modelagem lagrangiana sem uso de malhas (*meshless*) tem-se mostrado como uma boa opção para a solução de problemas de pequenas e grandes escalas espaciais e para o entendimento de processos físicos. No método lagrangiano de partículas, o domínio físico do problema é dividido em pequenas parcelas de matéria que interagem umas com as outras. Nesse procedimento, o volume do domínio fluido é dividido em um conjunto discreto de volumes de massas definidas (partículas ou elementos lagrangianos). Na dificuldade das parcelas materiais enxergarem o volume dos vizinhos, a massa da partícula é acompanhada por um ponto material que recebe as coordenadas que definem sua posição no espaço. Dessa forma, as propriedades físicas de cada elemento lagrangiano são mapeadas no domínio fluido, para cada instante de tempo, pelo acompanhamento da propriedade, devido ao deslocamento de cada elemento lagrangiano no interior do fluido.

O modelo lagrangiano de partículas sem malhas é uma alternativa usada nas pesquisas de métodos computacionais mais eficazes para a solução de problemas mais complexos, resultando em soluções numéricas estáveis e acuradas para as equações integrais ou equações diferenciais parciais.

A vantagem do emprego da modelagem lagrangiana de partículas sem malhas, em relação às modelagens que utilizam malhas é a simplicidade em tratar geometrias complexas e processos físicos. Também, podem ser mencionados a não necessidade da criação e atualização de malhas (remalhamento), a não produção de oscilações numéricas e o tratamento simples

das superfícies livres. A visualização gráfica dos resultados obtidos pelo método lagrangiano permite o melhor entendimento da evolução espaço-temporal do escoamento.

## PROCESSO DE QUEBRA DA ONDA

O processo de quebra da onda em regiões costeiras está principalmente relacionado à morfologia do fundo marinho e às características da onda incidente (período, altura, comprimento e ângulo de incidência). A onda, que se propaga a partir de águas profundas em direção à costa, é influenciada pelo gradiente de profundidade, que a direciona e ocasiona um gradativo aumento de sua altura. Uma vez propagando-se em águas mais rasas, sua energia cinética é reduzida, sendo balanceada pelo aumento da energia potencial, o que promove o aumento de sua altura. Esse ganho em altura atinge certo limite, até que a onda se torne instável e a crista desabe sobre a cava, resultando no processo de quebra.

Segundo Hoefel (1998), podem ser delimitadas três zonas da ação da quebra das ondas em uma praia: zona de arrebenção (*breaking zone*), zona de surfe (*surf zone*) e zona de espraiamento (*swash zone*). A zona de arrebenção é aquela porção do perfil praiado caracterizada pela ocorrência do processo de quebra, que representa o modo de dissipação energética da onda. A zona de surfe compreende aquela região em que a onda se propaga após a quebra. No caso de praias de baixa declividade, a onda sofre um decaimento exponencial de altura, até atingir a linha de praia. Em praias que predominantemente refletem a energia de ondas incidentes, ou seja, em praias muito íngremes, a zona de surfe tende a ser dominada por movimentos de frequência subharmônicas, de período igual ao dobro da onda incidente.

Na linha de costa, onde está localizada a face da praia, o movimento da onda é para frente, subindo a praia (*run-up*), e para trás, descendo aquela (*run-down*), delimitando a zona de espraiamento (*swash zone*) (PEREGRINE, 1998).

A ação da quebra das ondas e do *run-up* resulta em um movimento altamente complexo, compreendendo movimentos médios, orbitais e flutuações (turbulência) que têm, até agora, desafiado as precisões das medidas e a modelagem numérica de processos costeiros. A zona de transição da quebra das ondas é muito importante na previsão de correntes induzidas pelas mesmas e transporte de sedimentos na zona de surfe (NWO-GU, 1996).

Neste trabalho, foram utilizadas duas modelagens para o estudo da propagação da onda na região costeira. Dois códigos numéricos abertos (*SPHysics*, implementado com os fundamentos do método lagrangiano de partículas *Smoothed Particle Hydrodynamics*, e *FUNWAVE*, baseado na modelagem euleriana de ondas não-lineares do tipo Boussinesq) foram empregados nas simulações numéricas.

Na modelagem euleriana, foi adicionado um termo de difusão de *momentum* às equações do tipo Boussinesq, com a difusividade localizada na face frontal da onda que está quebrando, conforme proposto por Kennedy et al. (2000). Na modelagem lagrangiana, as equações de conservação da massa e do *momentum* foram resolvidas sem nenhuma alteração, tendo

sido, no entanto, implementado o método das grandes escalas (LES) para a modelagem da turbulência.

O presente trabalho apresenta os resultados obtidos pela aplicação de ambas as modelagens à propagação da onda em uma praia plana, com discussões ao final.

## MODELAGEM MATEMÁTICA

A evolução dos campos de velocidades, do transporte de massa e da energia ao longo do espaço e tempo é realizada pelas equações diferenciais que acompanham a matéria e que governam as leis físicas de conservação da massa, de conservação do *momentum*, da conservação da energia e da conservação da substância.

### Método Lagrangiano sem Malhas: *Smoothed Particle Hydrodynamics*

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) foi desenvolvido no final da década de 70 do século XX para a modelagem de fenômenos astrofísicos tridimensionais (GIN-GOLD; MONAGHAN, 1977; LUCY, 1977). Com o passar do tempo, sua aplicação estendeu-se às áreas da mecânica dos sólidos e dos fluidos em vasta gama de aplicações, devido à sua habilidade de incorporar a complexidade dos problemas físicos. Especialmente devido às complexas geometrias envolvidas, em problemas com superfícies livres e com interações fluido-estrutura, o método tem atraído cada vez um maior número de pesquisas. Significativas aplicações do método SPH na área dos recursos hídricos são apresentadas a seguir.

As primeiras simulações para escoamentos de fluidos compressíveis com superfícies livres foram realizadas por Monaghan (1994) para o problema de rompimento de barragem. Neste trabalho, o autor empregou as equações de conservação (massa, *momentum* e energia), num domínio discretizado por partículas, juntamente com uma equação de estado para previsão da pressão e condições de contornos repulsivas (em uma analogia às forças moleculares de Lennard-Jones) para obter resultados numéricos concordantes com experimentais.

Lo e Shao (2002) simularam ondas mecânicas solitárias próximas à costa, utilizando um método SPH para fluidos incompressíveis, juntamente com a previsão da pressão realizada pela equação de Poisson e modelagem da turbulência pelo LES (Simulação das Grandes Escalas). O tratamento dos contornos utilizou partículas-espelho fixas nas paredes associadas a partículas virtuais, em posições exteriores ao domínio. A identificação das partículas na superfície livre foi realizada a partir de suas massas específicas. Na superfície livre, esta propriedade apresenta diminuição, pois não existem outras partículas sobre as que estão formando aquela região do domínio. Para a identificação das partículas na superfície livre, em cada uma das iterações numéricas, os autores empregaram um critério relacionado à flutuação da massa específica. Caso uma partícula apresentasse uma flutuação em sua massa específica maior que 1% em relação às sofridas pelas partículas no interior do fluido, quando comparados os resultados de duas iterações sucessivas, aquela era identificada como pertencente à superfície livre e era-lhe

atribuída a condição de contorno de *Dirichlet* (pressão nula na superfície livre). O modelo empregado para a quebra, *run-up* e *run-down* das ondas solitárias foi validado mediante boa concordância apresentada entre os resultados numéricos, obtidos, e os experimentais, tomados como referência.

Cleary e Prakash (2004) mostraram o potencial de aplicação do método SPH em três dimensões. Foram realizadas simulações de uma inundação causada pela ruptura de uma barragem, da geração de uma onda de tsunami por um batedor de ondas e a conseqüente inundação da linha de costa pela mesma, do escoamento de lava de um vulcão e de um deslizamento de terra, a partir do pico de uma montanha. Os autores apontaram para as vantagens do método de partículas sem malhas e algumas possíveis aplicações.

Gomez-Gesteira e Dalrymple (2004) empregaram um método SPH tridimensional no estudo do impacto das ondas sobre uma estrutura. Os autores analisaram a propagação de uma onda longa e a força por ela exercida sobre uma estrutura sólida vertical. A geometria estudada consistiu em um tanque com uma estrutura sólida localizada em seu interior, onde um rompimento de barragem foi objeto de experimentos de laboratório e simulações numéricas. Velocidades e forças foram obtidas numericamente e mostraram boa concordância com medições em laboratório, mostrando que o método SPH pode ser utilizado com êxito para estudar problemas de ondas tridimensionais, como as relacionadas com a colisão entre ondas e estruturas. O emprego de códigos numéricos paralelos foi sugerido pelos autores como forma de se obter uma execução computacional mais rápida.

Shao e Gotoh (2004) desenvolveram um modelo SPH-LES (SPH-*Large eddy simulation*) para a investigação da interação das ondas com um quebra-mar flutuante do tipo *curtain-wall*, instalado com o objetivo de reduzir a altura da onda incidente e proteger a linha de costa. A modelagem matemática foi realizada através das equações de Navier-Stokes. Partículas móveis foram empregadas para simular o quebra-mar, que se movimentou a partir da ação das ondas, ao mesmo tempo em que partículas fixas foram utilizadas na simulação do leito, evitando a penetração do fluido no contorno inferior. Os perfis de onda e as forças hidrodinâmicas obtidos como resultados mostraram boa concordância com os relatados na literatura.

Iglesias, Rojas e Rodriguez (2004) empregaram o SPH para projetar tanques de estabilização para navios de pesca. Um tanque de estabilização é uma das formas de amortecimento do movimento de rolamento de um navio sobre ondas que pode ser representado por um sistema vibratório mecânico equivalente. O líquido no interior do tanque sofre o fenômeno do *sloshing* e a escolha de um método sem malhas para o estudo do problema se deve à grande deformação sofrida pela superfície livre. As equações de Navier-Stokes foram empregadas na modelagem do fluido. Um modelo de colisão inelástica foi implementado para os choques entre o fluido e as paredes do tanque. Os resultados das simulações foram validados com testes experimentais e mostraram-se promissores, apesar de que, segundo os autores, uma mais profunda investigação científica necessita ser realizada, no que se refere às condições de contorno aplicadas, a condição de incompressibilidade do fluido e ao emprego da

viscosidade artificial.

Shao (2006) estudou a quebra e *overtopping* da onda, para um fluido incompressível, sobre uma parede inclinada, mediante a solução das equações de massa e *momentum*. Foram empregadas a equação de Poisson e a modelagem da turbulência pelo modelo a duas equações (k-epsilon), qual seja, k representando a energia cinética turbulenta e epsilon a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta (a descrição completa do modelo pode ser encontrada no trabalho de Mohammadi e Pironneau, 1994). O rastreamento das partículas na superfície livre foi efetuado a partir da análise da flutuação das massas específicas. No que diz respeito aos contornos sólidos, foram fixadas partículas no leito e na parede inclinada, que impediram que as partículas de fluido ultrapassassem as fronteiras. Uma força de repulsão entre as partículas de contornos e de fluido - par ação e reação, segundo proposto por Monaghan (2004) – foi implementada. Os resultados numéricos alcançados nas simulações foram validados a partir de dados numéricos e experimentais e uma boa concordância foi encontrada.

Bui, Sako e Fukagawa (2007) implementaram um modelo numérico para a interação entre o solo e a água. Esta foi modelada como um fluido viscoso e compressível e o solo como um material elasto-plástico perfeito. Foram realizadas simulações de escavação do solo seco e saturado por um jato de água. Os resultados demonstraram que a grande deformação sofrida e as discontinuidades do solo podem ser tratadas pelo SPH sem dificuldades. O efeito da pressão da água nos poros e a força de infiltração podem também ser simulados através do SPH. Os resultados numéricos não foram validados com dados experimentais, porém os resultados são encorajadores. As vantagens apresentadas que justificam o uso do método no estudo foram a robustez, a simplicidade conceitual, a facilidade de incorporar novos conceitos físicos e, principalmente, o potencial para lidar com grandes deformações e falhas.

Ghazali e Kamsin (2008) realizaram uma modelagem de risco de inundação com simulação em tempo real. O problema da inundação é um dos principais sofridos pelos malasianos, daí a importância e a motivação do estudo realizado. Os autores simularam a inundação ocorrida em Kuala Lumpur (capital da Malásia), em Junho de 2007, em 3 dimensões. Uma das limitações encontradas foi o consumo de memória computacional, o que os fez restringir a uma área possível de ser simulada utilizando doze mil (12000) partículas – máximo número empregado nas simulações. Conclui-se a aplicabilidade do SPH ao problema da inundação sendo, porém, necessário o emprego de um *hardware* capaz de simular maiores áreas.

Violeau et al. (2007) estudaram o derramamento e o espalhamento do óleo e sua contenção (com o objetivo de proteger as áreas costeiras da poluição por meio da utilização de bóias flutuantes). Um modelo numérico para um fluido multifásico e turbulento foi implementado. Um dispositivo experimental foi utilizado para obtenção de dados empregados na validação do código computacional. Dois tipos de escoamentos turbulentos foram estudados, quais sejam: estacionário em canal aberto e ondas regulares em uma calha. Para ambos os métodos, o risco de vazamento foi mensurado. Os resultados numéricos do escoamento turbulento em regime estacionário apresentaram

boa concordância com os experimentais; porém, uma maior quantidade de testes deve ser efetuada para uma estimativa mais precisa de parâmetros como a velocidade crítica e o efeito da profundidade da água no vazamento do óleo. Ainda devem ser investigados o efeito da implementação de um modelo de fechamento da turbulência, como o k-epsilon, a ação das ondas e correntes, bem como ser realizada a modelagem da tensão superficial. Para o segundo tipo de escoamento turbulento, não foi possível a validação dos resultados.

Vasco, Maciel e Minussi (2011) apresentaram o método (fundamentos, condições de contorno e testes de validação para o rompimento de barragem, geração de ondas e impacto hidrodinâmico) e concluíram que o SPH é promissor e digno de uma melhor investigação, principalmente no que refere à solução de problemas não-lineares e/ou descontínuos, ou que apresentem deformabilidade excessiva do domínio. Os mesmos autores, em 2013, empregaram o SPH para a simulação de ondas solitárias, reproduzindo numericamente os perfis deste tipo de ondas observados em experimentos. Os resultados numéricos encontrados superestimaram as energias e alturas das ondas geradas, necessitando de correção a ser efetuada mediante o emprego de uma função de compatibilização.

Narayanaswamy et al. (2010) implementaram o acoplamento do método lagrangiano SPH com o método euleriano de ondas não-lineares do tipo Boussinesq foi efetuado por. Empregando os códigos abertos *SPHysics* e *FUNWAVE*, os autores simularam a propagação de uma onda solitária em um tanque de profundidade constante. A onda foi gerada na primeira região do tanque pelo *FUNWAVE* e se propagou até atingir o centro daquele, onde se iniciou o emprego do *SPHysics*. Após a reflexão na parede lateral, a onda se deslocou em sentido inverso, retornando à região de aplicação da modelagem euleriana (*FUNWAVE*). Apesar dos bons resultados encontrados para o acoplamento, não foram discutidos os resultados encontrados por cada um dos métodos individualmente para a propagação da onda n.

## Fundamentos Matemáticos

O SPH é fundamentado na identidade matemática válida para uma função escalar  $f(X)$  definida e contínua, conforme a equação (1):

$$\langle f(X) \rangle = \int f(X') \delta(X - X') dX', \quad (1)$$

onde:

$f(X)$  é a função escalar no ponto fixo, na posição;  
 $\delta(X - X')$  é a função delta de Dirac.

$$\delta(X - X') = \begin{cases} 1, & \text{se } X = X', \\ 0, & \text{se } X \neq X', \end{cases} \quad (2)$$

Ao substituir-se a função delta de Dirac pela função de suavização ou *kernel*, obtém-se a aproximação para a função na posição  $X$ , resultando na equação (3):



$$\langle f(X) \rangle = \int f(X') W(X - X', h) dX', \quad (3)$$

onde:

$W(X - X', h)$  é a função de suavização ou *kernel*,

$h$  é o raio de suporte;

$X = (x, y)$  é um ponto fixo, no sistema de coordenadas cartesianas;

$dX' = dx' dy'$  é um elemento infinitesimal de área.

A essência do método SPH consiste em discretizar o domínio  $\Omega$  em um número finito de partículas e nestas obter os valores das grandezas de interesse, a partir de interpolações ponderadas dos valores das grandezas nas partículas da vizinhança. A Figura 1 apresenta a disposição das partículas dentro do domínio de influência.

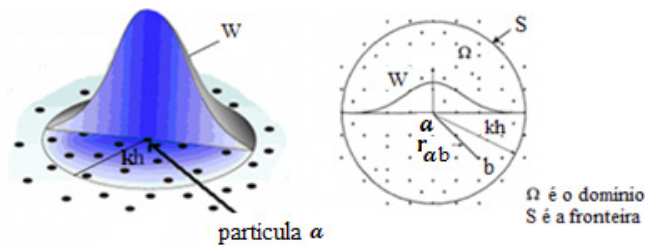


Figura 1 - (a) Representação gráfica do domínio de influência. A partícula de referência tem como vizinhas todas as demais dentro do domínio de influência (partículas b). O kernel (w) garante a maior contribuição das partículas vizinhas mais próximas para o valor da grandeza física na partícula de referência

Apenas as partículas vizinhas, aquelas que se encontram dentro do domínio de influência (a uma distância máxima definida da partícula  $a$  considerada,  $kh$ , onde  $k$  é um fator de escala dependente do *kernel* empregado), contribuirão para o comportamento desta.

A busca de partículas vizinhas pode ser realizada de maneira direta ou com o auxílio de *grids*, que conduzem a um menor número de operações matemáticas e reduzem o custo computacional (GESTEIRA et al., 2010; LIU; LIU, 2003). A Figura 2 mostra a busca direta (todos os pares de partículas  $ab$  do domínio terão as distâncias calculadas e comparadas com o valor de  $kh$ ) e o emprego de um *grid*, que diminui o número de

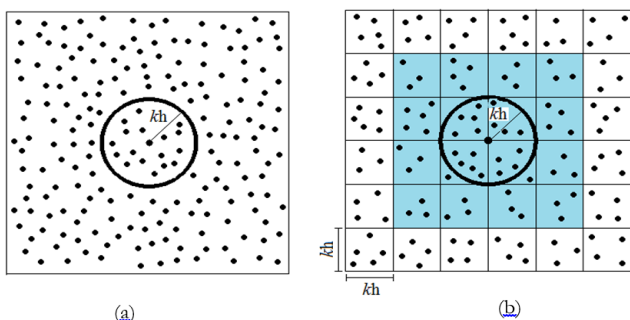


Figura 2 - Busca das partículas vizinhas. (a) De forma direta. (b) Com o emprego de um grid (a região em azul mostra as células do grid onde ocorrerá a busca)

buscas (apenas as partículas dentro da região sombreada serão objeto da procura).

No método SPH, diferentes *kernels* podem ser usados para distribuição dos pesos usados para a interpolação, os quais devem satisfazer as propriedades de suavidade, positividade, simetria, convergência, suporte compacto e normalização dentro do domínio de influência (LIU et al., 2003; KELAGER, 2006).

As propriedades de convergência, suporte compacto e normalização dentro do domínio de influência  $\Omega$ , são apresentadas nas equações (4) a (6), escritas no sistema de coordenadas polares.

- Normalização:

$$\int_{\Omega} W(r - r', h) = 1, \quad (4)$$

- Suporte Compacto:

Se  $|r - r'| > kh$ , então,

$$W(r - r', h) = 0, \quad (5)$$

- Convergência:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int W(r - r', h) dr = \delta(r - r'), \quad (6)$$

onde  $r$  é a direção radial.

O *kernel spline* cúbico, proposto por Gomez-Gesteira et al. (2010), foi utilizado neste trabalho, conforme a equação (7). Esta função de suavização apresenta um comportamento matemático desejável, bem como suas derivadas, para a representação das propriedades físicas estudadas.

$$W(r - r', h) = \frac{15}{7\pi h^2} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{Q}{h}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{Q}{h}\right)^3, & \text{se } 0 \leq Q \leq h \\ \frac{1}{4} \left(2 - \left(\frac{Q}{h}\right)^3\right), & h \leq Q \leq 2h \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (7)$$

onde:

$Q = |r - r'|$  é a distância entre um ponto fixo e um variável.

Outros *kernels* podem ser empregados no método SPH, tais como: quártico, proposto por Lucy (1977); quártico, apresentado por Gesteira et al. (2010); *spline* quártico, proposto por Morris, Fox e Zhu (1997); novo quártico, apresentado por Liu e Liu (2003), entre outros. A Figura 3 apresenta o *kernel* empregado por Lucy em seu trabalho pioneiro (1977) e sua derivada, e o *spline* cúbico (e derivada), deste trabalho.

Para que as soluções encontradas sejam representativas do domínio do problema, o número de partículas vizinhas dentro do domínio de influência, deve ser de 5, 21 e 57 em casos 1D, 2D e 3D, respectivamente, nos problemas estudados (LIU; LIU,

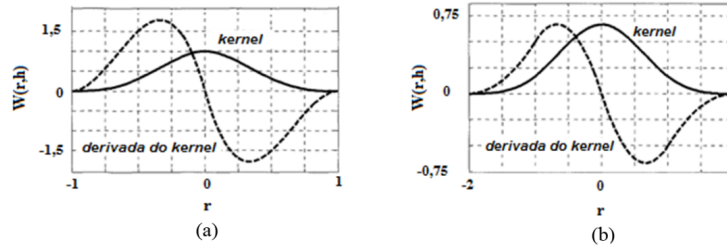


Figura 3 - Kernels e suas derivadas de primeira ordem. (a) Empregado no trabalho pioneiro de Lucy (1977) e (b) Spline cúbico, deste trabalho

2003). Testes numéricos foram realizados pelos autores deste trabalho e comprovaram que aqueles são os números mínimos de partículas no citado domínio que garantem que as propriedades do *kernel* estão sendo respeitadas, como a normalização, por exemplo.

O método SPH fornece uma aproximação de 2ª ordem para os valores das propriedades físicas num escoamento de fluido ou num sólido.

A equação (8) é uma expressão geral, comumente usada no método para a aproximação, obtida por interpolação, para a propriedade física, na partícula de referência.

$$A^a = \sum_{b=1}^j m^b \frac{A^b}{\rho^b} W(r^a - r^b, h), \tag{8}$$

onde o subscripto indica o vetor e o sobrescrito refere-se à partícula;

$A^a$  é a grandeza escalar que está sendo aproximada e diz respeito à partícula fixa;

$A^b$  é o valor da grandeza em cada uma das partículas  $b$ , vizinhas da partícula fixa;

$j$  é o número de partículas vizinhas da partícula fixa, dentro do domínio de influência;

$m^b$  é a massa da partícula vizinha  $b$ ;

$r$  é a direção radial no sistema de coordenadas polares;

$r^a$  é a posição da partícula fixa (coordenadas polares);

$r^b$  é a posição da partícula vizinha  $b$ ;

$\rho^b$  é a massa específica da partícula vizinha  $b$ ;

Para o divergente de uma grandeza física vetorial, a equação (9) pode ser empregada:

$$\nabla \cdot A^a = \frac{1}{\rho_a} \sum_{b=1}^j m^b (A^a - A^b) \cdot \nabla W(r^a - r^b, h), \tag{9}$$

onde:

$A^a$  e  $A^b$  são as grandezas vetoriais referentes às partículas fixa e vizinha, respectivamente;

$\rho^a$  é a massa específica da partícula de referência  $a$ ;

$\nabla$  é o operador nabla.

Para o gradiente de um escalar (forma simétrica), tem-se a forma apresentada pela equação (10):

$$\nabla A^a = \rho^a \sum_{b=1}^j m^b \left[ \frac{A^a}{(\rho^a)^2} + \frac{A^b}{(\rho^b)^2} \right] \nabla W(r^a - r^b, h), \tag{10}$$

Conforme demonstrado por Petronetto et al. (2010), a expressão para o laplaciano de uma grandeza escalar pode ser obtida a partir da expansão da série de Taylor em torno da posição da partícula de referência. A expressão do laplaciano é apresentada na equação (11):

$$\nabla^2 A^a = 2 \sum_{b=1}^j \frac{m^b}{\rho^b} (A^a - A^b) \frac{\partial W(r, h)}{\partial r} \frac{1}{|r^a - r^b|}, \tag{11}$$

onde  $|r^a - r^b|$  é a distância entre as partículas.

No método SPH, criado para a simulação de fluidos compressíveis, a pressão é uma função explícita da massa específica local do fluido. Em casos dinâmicos, o fluido compressível é aproximado a um fluido incompressível por meio de um fluido quase-compressível e a pressão é calculada através de uma equação de estado. Neste trabalho, foi empregada a conhecida equação de *Tait*, sugerida por Batchelor (2000), conforme a equação (12):

$$P^a = B \left[ \left( \frac{\rho^a}{\rho^0} \right)^\gamma - 1 \right], \tag{12}$$

onde:  $P^a$  é a pressão da partícula  $a$ ;

$\rho^0$  é a massa específica de repouso do fluido;

$\gamma = 7$ ;

$B$  é o termo relacionado às flutuações de massa específica do fluido, possuindo um valor específico para cada problema.

A modelagem do escoamento de fluidos e transporte de energia é efetuada pelas equações de conservação da massa, do *momentum* e da energia. A evolução do campo de massas específicas, de velocidades e de energia ao longo do tempo é definida pelas equações (B.1) a (B.3) da Tabela 1.

Na Tabela, encontram-se as equações de conservação e as respectivas aproximações por SPH, escritas no sistema de coordenadas cartesianas, para um fluido viscoso e compressível.

Gesteira et al. (2010) apresentam toda a formulação SPH implementada no software *SPHysics*, empregado neste trabalho.

As condições de contorno empregadas no código nu-

Tabela 1 – Equações de conservação e respectivas aproximações SPH.

Equações diferenciais de conservação (contínuo)	Aproximações SPH (domínio discretizado por partículas)	
<p>Massa:</p> $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$	$\frac{d\rho^a}{dt} = \sum_{b=1}^k m^b (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b) \cdot \nabla W(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b, \mathbf{h})$	(B.1)
<p>Momentum:</p> $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}_i + \mathbf{f}_{ext,i}$	$\frac{d\mathbf{v}^a}{dt} = -\sum_{b=1}^k m^b \left[ \frac{P^a}{(\rho^a)^2} + \frac{P^b}{(\rho^b)^2} \right] \nabla W(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b, \mathbf{h}) +$ $2\nu^a \sum_{b=1}^n \frac{m^b}{\rho^b} (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b) \frac{\partial W(r, \mathbf{h})}{\partial r} \frac{1}{ \mathbf{r}^a - \mathbf{r}^b } +$ $\mathbf{g} + \mathbf{f}_{ext}^a$	(B.2)
<p>Energia:</p> $\frac{de}{dt} = -P \nabla \cdot \mathbf{v} + \varepsilon_v + \nabla \cdot \mathbf{q} + q_H$	$\frac{de^a}{dt} = -P_a \sum_{b=1}^k m^b (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b) \cdot \nabla W(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^b, \mathbf{h}) + \varepsilon_v + \nabla \cdot \mathbf{q} + q_H$	(B.3)

onde:

$\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade;

$\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido;

$P$  é a pressão;

$\mathbf{f}_{ext}^a$  são as forças externas agindo sobre a partícula fixa;

$e$  é a energia específica;

$\varepsilon_v$  é o termo de dissipação de energia por unidade de volume;

$\mathbf{q}$  é o fluxo de calor por condução;

$q_H$  é o calor gerado por outras fontes por unidade de volume.

O termo  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  é modelado pela lei de Fourier.

mérico aberto supramencionado são repulsivas ou dinâmicas. As condições de contorno repulsivas, desenvolvidas por Monaghan (1994), baseiam-se na dinâmica molecular e dissipativa das partículas. O impedimento de penetração das partículas móveis se deve a uma força de repulsão aplicada sobre estas pelas partículas de contorno, calculadas de forma análoga às forças moleculares de Lennard-Jones. A utilização de uma linha estática de partículas virtuais (do tipo I) localizadas sobre o contorno sólido produzindo a repulsão, é de forma geral a maneira aplicada em SPH para implementar as condições de contorno; havendo, porém, situações, em que as partículas em linha podem ter movimentos, para simularem batedores de onda, por exemplo. Partículas virtuais (do tipo II) podem também ser alocadas fora do contorno, conforme mostra a Figura 4 (LIU; LIU, 2003).

Uma segunda maneira de tratamento dos contornos ocorre com a utilização das condições dinâmicas, onde as partículas nos contornos, que podem ser fixas ou móveis (simulando

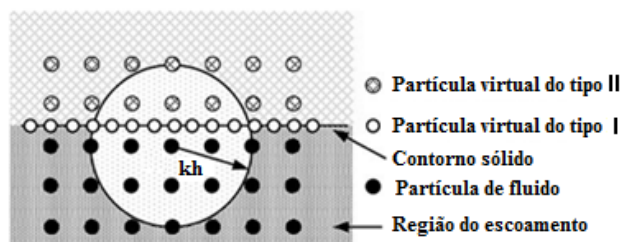


Figura 4 - Ilustração esquemática da região do contorno sólido. Disposição das partículas virtuais em linha (tipo I). Além do contorno, estão as partículas virtuais do tipo II. Adaptada de Liu e Liu (2003)

movimentos de batedores de ondas, comportas e outros), satisfazem às mesmas equações de conservação (massa, *momentum* e energia) aplicadas às partículas de fluido. Quando estas se aproximam dos contornos, a massa específica e a pressão das partículas posicionadas nos contornos aumentam. Isto resulta

em um aumento da magnitude da força de repulsão exercida sobre o fluido, resultando na sua manutenção no interior do domínio estudado (GOMEZ-GESTEIRA et al., 2012).

No caso de escoamentos de fluidos com superfícies livres, o método SPH apresenta algumas técnicas para o tratamento das mesmas sem a necessidade de remalhamento a cada iteração da simulação numérica - o que dificulta o emprego dos métodos tradicionais de malhas para este tipo de problema. Esta é uma de suas claras vantagens.

Forças aplicadas à superfície livre do fluido normalmente não são tratadas pelas leis de conservação, pois são consideradas condições de contorno. Na superfície livre, as forças estão desbalanceadas devido à ação das forças de tensão superficial. A força resultante em cada uma das partículas age na direção normal à superfície livre do fluido, apontando para o centro, tendendo a minimizar a curvatura e a área daquela, conforme mostra a Figura 5. Para a definição da superfície livre, é empregado um campo de grandeza adicional conhecido como *color field* (ou campo de cor) que permite o cálculo da força que atua sobre cada partícula pertencente àquela (KELAGER, 2006; MULLER; CHARIPAR; GROSS, 2003).

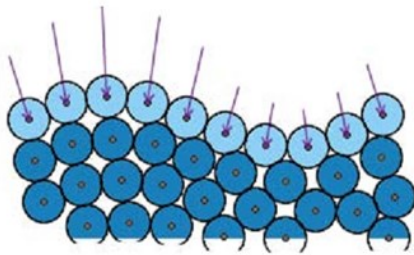


Figura 5 - A atuação das forças de tensão superficial (setas apontando para o interior do fluido) sobre as partículas da superfície livre (tom azul mais claro). Extraída de Kelager (2006)

### Simulações numéricas

O modelo numérico lagrangiano *SPHysics* foi empregado para a simulação de um batedor de ondas. Trata-se de um código computacional aberto, desenvolvido na linguagem FORTRAN, baseado no método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), para o estudo de escoamentos com superfícies livres, na forma de uma colaboração de pesquisadores da *Johns Hopkins University* (Estados Unidos), Universidade de Vigo (Espanha) e Universidade de Manchester (Reino Unido).

Através de métodos de integração numérica foi efetuada a atualização das propriedades das partículas no tempo (posição, velocidade, energia e outras). Dentro os métodos possíveis de ser empregados na integração temporal estão Runge-Kutta de 1ª ordem (Euler), *Leap-Frog* e algoritmos mais elaborados como o preditor-corretor, Verlet, symplectic ou Beeman, conforme apresentados por Gomez-Gesteira et al. (2010). Nesta pesquisa, o symplectic foi o empregado.

A fim de evitar a interpenetração das partículas e melhorar a estabilidade numérica, uma correção para a velocidade de cada partícula foi realizada, usando o método conhecido como *XSPH* (PAIVA et al., 2009). Este método mantém um movimento

mais ordenado das partículas. É computada a velocidade média das partículas vizinhas para o cálculo da velocidade da partícula de referência, conforme mostra a equação (13):

$$v^a = v^a + \varepsilon \sum_{b=1}^j \frac{2m_b}{\rho_a + \rho_b} (v^b - v^a) W(x^a - x^b, h), \tag{13}$$

onde:

$v^\alpha$  é a velocidade da partícula  $\alpha$  no sistema de coordenadas cartesianas;

$x^\alpha$  é a posição da partícula  $\alpha$  no sistema de coordenadas cartesianas;

$\alpha = (a, b)$ ;

$\varepsilon$  é um parâmetro que varia entre 0 e 1,0, sendo comumente usado como 0,5 (GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010; VASCO; MACIEL; MINUSSI, 2011).

Para evitar instabilidades numéricas devido a oscilações no campo de velocidades, empregou-se a viscosidade artificial, conforme apresentada pela equação (14):

$$\pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-2\sigma\mu_{ab}c}{\rho_a + \rho_b}, & (v^a - v^b) \cdot (x^a - x^b) < 0, \\ 0, & (v^a - v^b) \cdot (x^a - x^b) \geq 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\mu_{ab} = \frac{h(v^a - v^b) \cdot (x^a - x^b)}{|x^a - x^b|^2 + 0,01h^2}, \tag{15}$$

onde:

$\pi_{ab}$  é a viscosidade artificial;

$c$  é a velocidade do som;

$\sigma$  é um parâmetro de superfície livre que varia de acordo com o problema estudado (GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010).

Após a adição do termo referente à viscosidade artificial à equação do *momentum*, obtém-se a equação (16), empregada para a obtenção da aceleração da partícula:

$$\frac{dv^a}{dt} = \frac{dv^a}{dt} - \sum_{b=1}^j m_b \pi_{ab} \nabla W(x^a - x^b, h), \tag{16}$$

onde  $t$  é o tempo.

Nas simulações numéricas realizadas, o raio de suporte  $h$  manteve-se constante. Contudo, para simular choques ou impactos, onde há variação súbita da massa específica localmente, é preciso variar  $h$ , de tal forma que o número de partículas vizinhas se mantenha próximo de um valor constante, isto ocorre, por exemplo, na simulação de rompimento de barragem (LIU; LIU, 2003; VASCO, MACIEL & MINUSSI, 2011).

A estabilidade das simulações do método depende da escolha adequada do passo de tempo. O critério de estabilidade numérica CFL (condição de Courant-Friedrich-Lewy) foi aplicado para a garantia da convergência dos resultados (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967).



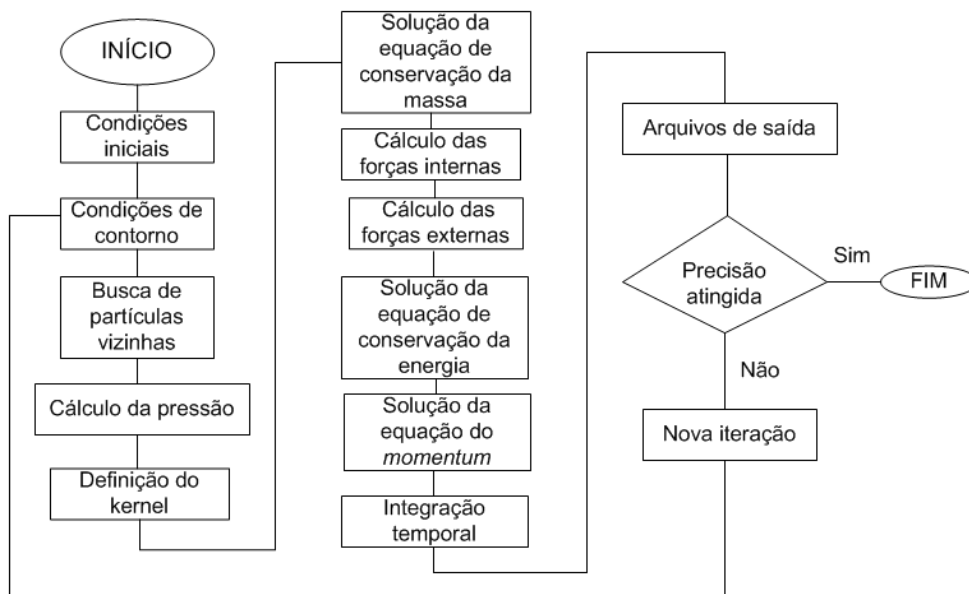


Figura 6 - Fluxograma do algoritmo computacional (SPH)

O tratamento da turbulência foi efetuado pela aplicação do método da simulação das grandes escalas de turbulência - *Large Eddy Simulation*, ou LES. Para as pequenas escalas, utilizou-se um modelo de turbulência SGS, *Sub-Grid Scale* (GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010).

A Figura 6 mostra o fluxograma do algoritmo computacional do método Lagrangiano SPH, desenvolvido na linguagem Fortran. A seguir será apresentada uma breve explicação do citado fluxograma.

As posições iniciais, velocidades, massas específicas, temperaturas, raio de suporte e demais propriedades físicas das partículas do fluido são definidas para o início da simulação. As condições de contorno são definidas (repulsivas ou dinâmicas). As partículas dos contornos têm suas propriedades definidas. A busca de partículas vizinhas de uma determinada partícula de referência pode variar com o tempo e deve ser efetuada a cada iteração numérica. Antes de calcular a aproximação para as forças internas agindo nas partículas do fluido, torna-se necessário atualizar o campo de pressões naquelas partículas, mediante o emprego de uma equação de estado. Neste trabalho, aplicou-se a equação (12), equação de Tait. O *kernel* empregado nas interpolações das propriedades das partículas deve ser definido. O cálculo da massa específica de cada partícula é realizado a partir da solução da equação (B.1), apresentada no Anexo B, conservação da massa. São numericamente obtidas aproximações para as forças internas, dois primeiros termos do lado direito da equação (B.2), forças de pressão e viscosas, respectivamente. As forças externas devem ser aplicadas às partículas de fluido. Nesta categoria se enquadram a força gravitacional, 3º termo do lado direito da equação (B.2), as forças repulsivas exercidas pelas partículas dos contornos sobre as de fluido, bem como as forças de superfície livre. O último termo do lado direito da equação (B.2) engloba essas últimas duas forças apresentadas. Em seguida, a equação da conservação da energia é solucionada. Possuindo resultados aproximados para ambos os tipos de forças

(internas e externas), a aceleração de cada uma das partículas de fluido é obtida a partir da solução da equação do *momentum*. A integração temporal, próximo passo da simulação computacional, prevê as propriedades das partículas para o instante de tempo posterior. O critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é aplicado na definição do passo de tempo que garanta a convergência dos resultados (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967). Arquivos de saída são obtidos ao final de cada iteração, a partir dos quais serão geradas as representações gráficas para as propriedades físicas do fluido. Verifica-se, por último, se a precisão desejada foi alcançada ou se o tempo será incrementado para a próxima iteração.

### Método euleriano: Modelo de ondas do tipo Boussinesq totalmente não-linear

O modelo numérico euleriano *FUNWAVE2D* é um software não comercial, produzido pelo *Center for Applied Coastal Research* (CACR), na linguagem Fortran, é capaz de simular ondas de superfície em regiões costeiras incluindo zonas de surfe externa e interna. O princípio fundamental do modelo é baseado nas equações do tipo Boussinesq para a segunda ordem de dispersão. Após a integração na vertical das equações de conservação da massa e do *momentum* em duas dimensões no plano horizontal, são obtidas as equações (17) e (18) (WEI et al.,1995).

Conservação da massa:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (d + \eta) \mathbf{u}_\alpha + (d + \eta) \left( \frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (d^2 - d\eta + (\eta)^2) \right) \nabla \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + (d + \eta) \left( z_\alpha + \frac{1}{2} (d - \eta) \right) \nabla \cdot \nabla (\nabla \cdot (d \mathbf{u}_\alpha)) = 0, \quad (17)$$

Conservação do *momentum*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + g \nabla \eta + \\ z_\alpha \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \right) + \nabla \left( \nabla \cdot \left( d \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \right) \right) \right\} + \\ \nabla \left\{ \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [\nabla \cdot (d \mathbf{u}_\alpha) + \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha]^2 \right\} + \\ \nabla \left\{ (z_\alpha - \eta) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot (d \mathbf{u}_\alpha)) + \right. \\ \left. - \eta \left[ \frac{1}{2} \eta \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \left( d \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

A profundidade de referência  $z_\alpha$  para o cálculo das velocidades  $\mathbf{u}_\alpha$  é dada pela equação (19):

$$z_\alpha \approx -0,531d, \quad (19)$$

onde:

$\eta$  é a elevação da superfície;

$d$  é a profundidade referente ao nível da água em repouso;

$t$  é o tempo.

Segundo Wei et al. (1995) a escolha do esquema numérico para as Equações (17) e (18) é determinada por dois fatores principais. Primeiro, é que em qualquer sistema de equação de Boussinesq, a diferença finita de segunda ordem de precisão para os termos com as derivadas de primeira ordem deixam a ordem dos termos do erro de truncamento matematicamente na mesma forma dos termos dispersivos que aparecem no modelo. Dessa forma, as diferenças finitas dos termos dispersivos são somente para segunda ordem de precisão, levando a erros de  $O(\Delta x^2)$  relativo aos atuais termos dispersivos. Finalizando, o sistema de equações é escrito em uma forma mais conveniente para a aplicação de um procedimento de passo de tempo de mais alta ordem, que é o esquema “previsor-corretor” de Adams-Bashforth-Moulton para quarta ordem (esquema ABM) usado por Wei et al. (1995).

O segundo fator é o tratamento não implícito dos termos dispersivos na equação do *momentum*. Dessa forma, as equações (17) e (18) podem ser reescritas na forma unidimensional como nas equações (20) e (21):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = E(\eta, u_\alpha), \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u_\alpha) = F\left(\eta, u_\alpha, \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right), \quad (21)$$

onde  $U$  é definido como na equação (22):

$$U = u_\alpha + \left[ b_1 d \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 (d u_\alpha)}{\partial x^2} \right], \quad (22)$$

que é tratado como uma simples variável no esquema ABM. As quantidades  $E$  e  $F$  são definidas pelas equações (23) e (24)

$$\begin{aligned} E = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{aligned} &(d + \eta) u_\alpha + \\ &+ a_1 d^3 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \\ &+ a_2 d^2 \frac{\partial^2 (d u_\alpha)}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a_1 d^2 \eta + \frac{1}{6} \eta (d^2 - \eta^2) \right] \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \right\} - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a_2 d \eta - \frac{1}{2} \eta (d + \eta) \right] \frac{\partial^2 (d u_\alpha)}{\partial x^2} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) u_\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \right\} - \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (z_\alpha - \eta) u_\alpha \frac{\partial^2 (d u_\alpha)}{\partial x^2} \right\} - \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial (d u_\alpha)}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial (d u_\alpha)}{\partial t} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

As constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são definidas pelas equações (25a), (25b), (25c) e (25d):

$$a_1 = \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{6} \quad (25a)$$

$$a_2 = \beta + \frac{1}{2} \quad (25b)$$

$$b_1 = \frac{\beta^2}{2} \quad (25c)$$

$$b_2 = \beta \quad (25d)$$

onde  $\beta$  foi definido no trabalho de Nwogu (1993) como  $\beta = z_\alpha / d = -0,531$ .

Uma vez que o lado direito das equações (20) e (21) é calculado nos passos de tempo  $n-2$ ,  $n-1$  e  $n$ , é possível estimar as quantidades de  $\eta$  e  $U$  no próximo passo de tempo  $n+1$  aplicando o esquema explícito de Adams-Bashforth com 3ª ordem no estágio previsor conforme indicado pelas equações (26) e (27):

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{12} [23E_i^n - 16E_i^{n-1} + 5E_i^{n-2}], \quad (26)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{12} [23F_i^n - 16F_i^{n-1} + 5F_i^{n-2}], \quad (27)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo, o subscrito  $i$  indica o ponto de cálculo da grade euleriana e o sobrescrito  $n$  indica o número do passo de tempo da integração.

No modelo, as velocidades são calculadas na face da célula euleriana e os valores escalares são calculados no centro da célula.

Os valores de  $\eta_i^{n+1}$  são simples de serem obtidos. Já a avaliação das velocidades horizontais no novo nível de tempo  $u_i^{n+1}$ , entretanto, requer simultaneamente a solução de um sistema de matrizes tridiagonais. Após o cálculo dos valores previstos de  $\eta_i^{n+1}$  e  $u_i^{n+1}$ , é possível determinar as quantidades do lado direito das Equações (17) e (18) no passo predictor ficando com  $E_i^{n+1}$  e  $F_i^{n+1}$ . Em seguida, aplica-se o método implícito corretor Adams-Moulton de quarta ordem, como indicado pelas equações (28) e (29):

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{24} [9E_i^{n+1} + 19E_i^n - 5E_i^{n-1} + E_i^{n-2}], \quad (28)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{24} [9F_i^{n+1} + 19F_i^n - 5F_i^{n-1} + F_i^{n-2}], \quad (29)$$

No método predictor-corrector, a discretização espacial para as derivadas de primeira ordem utilizou o método de diferenças centradas de cinco pontos com quarta ordem de precisão e para as derivadas de segunda ordem usou-se o método de diferenças centradas de segunda ordem de precisão com três pontos.

Para as derivadas de primeira ordem de  $f$ , que pode assumir as quantidades  $\eta$ ,  $u_\alpha$  ou  $hu_\alpha$ , é proposta a equação (30):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{12\Delta x} (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}), \quad (30)$$

para  $3 \leq i \leq m-2$ .

As diferenciações de primeira ordem nos pontos  $i = 1$ ,  $i = 2$ ,  $i = m-1$  e  $i = m$  são, respectivamente, definidas pelas equações (31a), (31b), (31c) e (31d):

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i=1} = \frac{1}{12\Delta x} (-25f_1 + 48f_2 - 36f_3 + 16f_4 - 3f_5) \quad (31a)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i=2} = \frac{1}{12\Delta x} (-3f_1 - 10f_2 + 18f_3 - 6f_4 + f_5) \quad (31b)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i=m-1} = \frac{1}{12\Delta x} (3f_m + 10f_{m-1} - 18f_{m-2} + 6f_{m-3} - f_{m-4}) \quad (31c)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i=m} = \frac{1}{12\Delta x} (25f_m - 48f_{m-1} + 36f_{m-2} - 16f_{m-3} + 3f_{m-4}) \quad (31d)$$

Para as derivadas de segunda ordem dos termos  $f = u_\alpha$  ou  $f = hu_\alpha$ , tem-se a equação (32):

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}), \quad (32)$$

para  $2 \leq i \leq m-1$ .

A diferenciação de segunda ordem nos pontos  $i = 1$  e  $i = m$  são, respectivamente, definidos na seguinte forma da equação (33a) e (33b):

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i=1} = \frac{1}{\Delta x^2} (2f_1 - 5f_2 + 4f_3 - f_4), \quad (33a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i=m} = \frac{1}{\Delta x^2} (2f_m - 5f_{m-1} + 4f_{m-2} - f_{m-3}). \quad (33b)$$

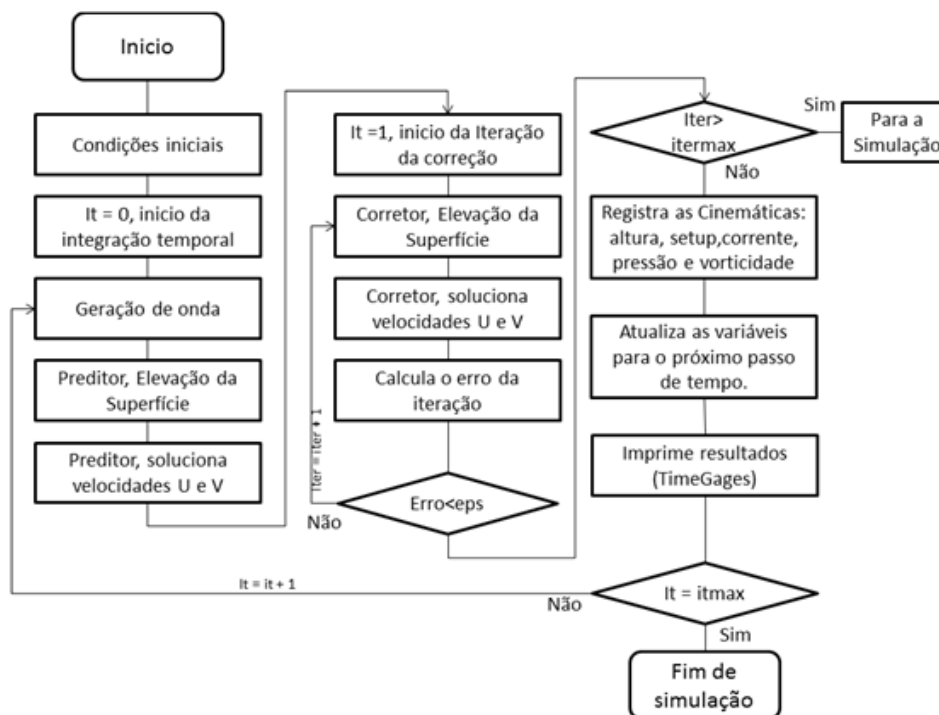


Figura 7 - Fluxograma do software FUNWAVE2D

Uma descrição detalhada do modelo consta no Manual do *FUNWAVE2D 2.0* (KIRBY et al., 2005a ou b). A figura 7 apresenta esquematicamente o fluxograma do algoritmo computacional e, a seguir, uma breve explicação.

O passo inicial para se realizarem os cálculos dos componentes da onda no domínio físico no referencial euleriano consiste em informar as condições iniciais da simulação, que consistem nas dimensões do domínio, características das ondas (amplitude e período), elevação do nível do leito e nível de referência da água. No instante inicial, a água é considerada em repouso, as velocidades e a elevação são nulas. Após ser iniciado o sistema, é calculado o comprimento de onda a partir do método de Newton-Raphson. Com as definições iniciais da onda calculadas, as informações para o gerador de ondas são atribuídas ao algoritmo. Os coeficientes do gerador de ondas são calculados e incorporados nas equações de conservação da massa e do *momentum*. Um tempo de amortecimento de no mínimo  $2T_s$  (onde  $T_s$  é o período da onda) é utilizado para permitir uma geração de ondas mais suave e, assim, evitar instabilidades numéricas. Assim como para o gerador de ondas, os parâmetros de quebra são calculados a partir das características da onda e dos coeficientes de quebra.

Em seguida, o processo de cálculo computacional é iniciado através da integração temporal das equações de conservação. Após o início da integração temporal, as forças da geração da onda, as forças devido à dissipação de energia da onda (fricção com o fundo e quebra) e os parâmetros da camada de absorção são incorporados na equação do *momentum* e da conservação da massa. Se necessário, o filtro numérico é aplicado em um determinado intervalo de cálculo para suavizar os ruídos gerados pelos cálculos numéricos. Dessa forma, a integração no tempo é iniciada com o passo de tempo ( $\Delta t$ ) calculado em função do parâmetro de estabilidade numérica de Courant-Friedrichs-Lewy, definido como  $\Delta t < 0,5 \Delta x / \sqrt{gd}$ , onde  $\Delta x$  é o espaçamento da grade no referencial euleriano. Os parâmetros da onda são calculados no passo predictor, método de Adams-Bashforth, e recalculados dentro de um erro absoluto de iteração de, aproximadamente,  $10^{-5}$  no passo corretor (método de Adams-Moulton). Assim, os valores das componentes da velocidade e elevação da superfície são atualizados para o próximo passo de tempo, finalizando o ciclo de cálculo do modelo de ondas.

## ESTUDO DE CASO

Objetivando comparar os resultados obtidos com o emprego do método lagrangiano de partículas SPH com o método euleriano é apresentado o estudo da geração e propagação de ondas em uma praia plana.

Foi simulado um domínio de praia com 2,75m de extensão na região inclinada, ângulo de inclinação de  $4,2364^\circ$ , amplitude e período da onda de 0,01 m e 1,4s, respectivamente, e nível da água de 0,18m. Para a geração de ondas foi empregado um batedor de ondas.

Na simulação euleriana, foi utilizado um domínio com malha com dimensões de 156 pontos na direção horizontal e 21

pontos na direção vertical. O espaçamento entre os pontos na horizontal foi de 0,05m totalizando uma distância horizontal de 7,75m. Na vertical, os espaçamentos variaram com a profundidade total, a qual é dada por  $H = d + \eta$ , definindo uma malha do tipo sigma. Como o método de geração de onda emprega uma função fonte-geradora, o modelo necessita de uma região de profundidade constante e afastado de obstáculos. Devido a isso, a fonte geradora foi alocada no ponto 41 da malha, na coordenada horizontal -2,00m. Para fins gráficos, o zero horizontal do domínio euleriano corresponde ao zero do domínio lagrangiano. A dimensão do domínio euleriano variava de -4,00m a 3,75m. O período de simulação euleriana foi de 30,00s, com um incremento de tempo de 0,001s durante a simulação.

Na simulação lagrangiana foram empregadas 4221 partículas com um espaçamento de 0,01m entre elas. A dimensão do domínio lagrangiano variou de 0 a 3,75m. O raio de suporte ( $h$ ) foi definido como 0,013m ( $\approx 1,30$  vezes o espaçamento inicial entre as partículas). Quatrocentos e dezoito (418) partículas virtuais definiram o contorno, sendo 387 fixas no leito e 31 móveis (simulando o movimento do batedor do tipo *flap*, localizado na posição 0,13m do domínio). Foi empregado o *kernel spline* cúbico. O período de simulação foi de 30,00s e o passo de tempo foi de  $4,5 \cdot 10^{-5}$  s, com número de Courant-Friedrichs-Lewy no valor de 0,20. Em ambas as simulações, a integração utilizou o método predictor-corretor e a amplitude da onda gerada foi de 0,02m.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A elevação da onda foi obtida para diferentes tempos de simulação. A Figura 8 apresenta os resultados obtidos, utilizando os dois modelos numéricos anteriormente descritos, nos tempos 28,0, 28,7 e 29,4s.

As simulações dos modelos lagrangiano e euleriano mostraram de forma adequada e compatível o comportamento da onda propagando-se em uma praia plana. Houve uma excelente concordância entre os resultados dos dois modelos nas regiões da praia com leito sem inclinação.

No modelo euleriano, a quebra da onda é tratada por uma formulação de viscosidade turbulenta artificial, que pode promover uma descrição mais realística do início e do final da quebra em termos quantitativos (em termos da energia dissipada), ver Chen et al. (2000), Chen et al. (2003) e Kennedy et al. (2000). Porém, o formato da quebra da onda não apresenta uma descrição qualitativamente bem definida. O modelo lagrangiano, que empregou a modelagem das grandes escalas (LES) para o tratamento da turbulência, apresenta a vantagem de representar o colapso da onda em águas rasas de forma bem representativa visualmente, onde o formato da onda em sua quebra é visível nas simulações através do movimento das partículas de água. A figura 9 mostra o resultado no instante 28,00 s para os dois modelos empregados. Observa-se que ambos estão em concordância na região fora da zona de arrebenção e apresentam certa discrepância no talude próximo da costa.



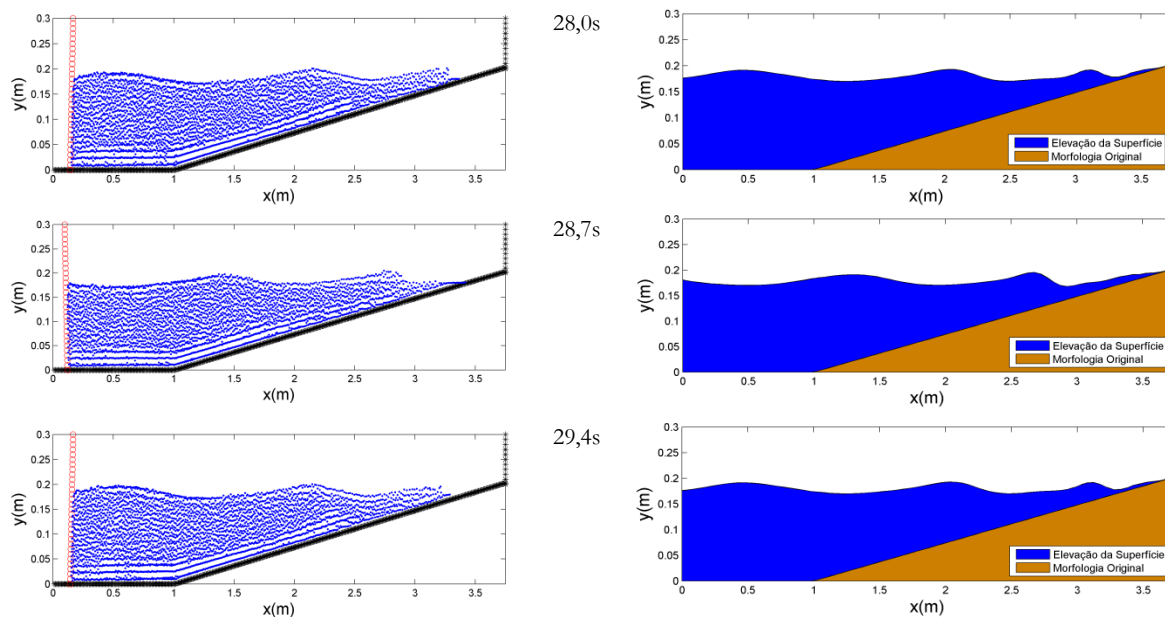


Figura 8 - Resultados das simulações de ondas em praia plana. À esquerda, os resultados do modelo SPHysics e, à direita, os resultados do modelo FUNWAVE2D

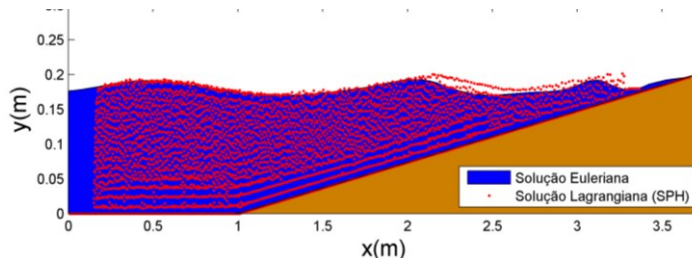


Figura 9 - Comparação gráfica dos resultados numéricos encontrados pelos modelos SPHysics e FUNWAVE2D no tempo 28,00s

## CONCLUSÕES

Os resultados numéricos encontrados por ambos os modelos mostraram concordância no que se refere ao comportamento da elevação da superfície livre ao longo de todo o domínio de praia. A diferença entre os resultados se restringe à zona de arrebentação, onde o modelo euleriano usa uma aproximação para considerar a quebra da onda, ao passo que o modelo lagrangiano trata também este fenômeno segundo as equações de conservação e transporte de energia, com o emprego da modelagem LES para a turbulência. Apesar dos resultados encontrados pelo modelo lagrangiano serem os mais coerentes com a física do problema em todo o domínio estudado, estes devem ser confrontados com dados medidos ou provenientes de soluções analíticas para melhor avaliação da solução numérica obtida.

## REFERÊNCIAS

BATCHELOR, G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

BUI, H. H.; SAKO, K.; FUKAGAWA, R. Numerical simulation of soil-water interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. Journal Terramechanics, v. 44, n. 5, p. 339-346, Nov. 2007.

CHEN, Q.; KIRBY, J. T.; DALRYMPLE, R. A.; KENNEDY, A. B.; CHAWLA, A. Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. II: 2D. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, v. 126, n. 1, Jan. 2000.

CHEN, Q.; KIRBY, J. T.; DALRYMPLE, R. A.; WEI, F.;

- THOMTON, E. B. Boussinesq Modeling of Longshore Currents. *Journal of Geophysical Research*, v. 108, n. C11, 3362, p. 1-18, Nov. 2003.
- CLEARY, P. W.; PRAKASH, M. Discrete-element modelling and smoothed particle hydrodynamics: potential in the environmental sciences. *Philosophical Transactions. Serie A, mathematical, physical and engineering sciences*, v. 362, n. 1822, p. 2003-2030, Sept. 2004.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal*, v. 11, p. 215-234, Mar. 1967.
- GHAZALI, J. N.; KAMSIN, A. A real time simulation and modeling of flood hazard. In: 12th WSEAS INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, 12., 2008, Heraklion, Greece. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2008.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, p. 375-338, Nov. 1977.
- GOMEZ-GESTEIRA, M.; DALRYMPLE, R. A. Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, v. 130, n. 2, p. 63-69, Mar./Apr. 2004.
- GOMEZ-GESTEIRA, M.; ROGERS, B. D.; CRESPO, A. J. C.; DALRYMPLE, R. A.; NARAYANASWAMY, M.; DOMINGUEZ, J. M. SPHysics – development of a free surface fluid solver – Part 1: Theory and formulations. *Computers & Geosciences*, v. 48, p. 289-299, Nov. 2012.
- GOMEZ-GESTEIRA, M. G.; ROGERS, B. D.; DALRYMPLE, R. A.; CRESPO, A. J. C.; NARAYANASWAMY, M. User Guide for SPHysics Code v2.0. [S.l.: s.n.], 2010.
- HOEFEL, F. G. Formodinâmica de praias arenosas oceânicas: uma revisão bibliográfica. Itajaí: Universidade do Vale do Itajaí, 1998.
- IGLESIAS, A. S.; ROJAS, L. P.; RODRIGUEZ, R. Z. Simulation of anti-roll tanks and sloshing type problems with smoothed particle hydrodynamics. *Ocean Engineering*, v. 31, n. 8-9, p. 1169-1192, June 2004.
- KELAGER, M. Lagrangian fluid dynamics using smoothed particle hydrodynamics. Copenhagen, Denmark: Department of Computer Science, University of Copenhagen, 2006.
- KENNEDY, A. B.; CHEN, Q.; KIRBY, J. T.; DALRYMPLE, R. A. Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. I: 1D. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, v. 126, n. 1, p. 39-47, Jan. 2000.
- KIRBY, J. T.; LONG, W.; SHI, F. FUNWAVE 2.0: Fully Nonlinear Boussinesq Wave Model on Curvilinear Coordinates. Part I. Model Formulations. Newark, Delaware: University of Delaware, Center for Applied Coastal Research, Dept. of Civil & Environmental Engineering, 2005a.
- KIRBY, J. T.; LONG, W.; SHI, F. FUNWAVE 2.0: Fully Nonlinear Boussinesq Wave Model on Curvilinear Coordinates. Part II. User's Manual. University of Delaware, Center for Applied Coastal Research, Dept. of Civil & Environmental Engineering, Newark, Delaware, 2005b.
- LIU, M. B.; LIU, G. R. Smoothed particle hydrodynamic. A Meshfree Particle Method. Singapore: World Scientific, 2003.
- LIU, M. B.; LIU, G. R. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 17, n. 1, p. 25-76, Mar. 2010.
- LIU, M. B.; LIU, G. R.; LAM, K. Y. Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 155, n. 2, p. 263-284, June 2003.
- LO, Y. M. E.; SHAO, S. Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method. *Applied Ocean Research*, v. 24, n. 5, p. 275-286, Oct. 2002.
- LUCY, L. B. Numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, v. 82, p. 1013-1024, Dec. 1977.
- MOHAMMAD, B.; PIRONNEAU, O. Analysis of the k-epsilon Turbulence Model. Masson, Paris: RAM: Research in Applied Mathematics, 1994.
- MONAGHAN, J. J. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, v. 110, n. 2, p. 399-406, Feb. 1994.
- MORRIS, J. P.; FOX, P. J.; ZHU, Y. Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH. *Journal of Computational Physics*, v. 136, n. 1, p. 214-226, Sept. 1997.
- MULLER, M.; CHARIPAR, D.; GROSS, M. Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications. In: EUROGRAPHICS/SIGGRAPH SYMPOSIUM ON COMPUTER ANIMATION, 2003, San Diego. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2003.
- NARAYANASWAMY, M.; CRESPO, A. J. C.; GOMEZ-GESTEIRA, M.; DALRYMPLE, R. A. SPHysics-FUNWAVE hybrid model for coastal wave propagation. *Journal of Hydraulic Research*, v. 48, p. 85-93, 2010. Supplement 1.
- NWOGU, O. Alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, v. 119, n. 6, p. 618-638, Nov./Dec. 1993.

NWOGU, O. G. Numerical Prediction of Breaking Waves and Currents with a Boussinesq Model. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, ICCE '96, 25., 1996, Orlando. Proceedings... [S.l.: s.n.], 1996. v. 4, p. 4807-4820.

PAIVA, A.; PETRONETTO, F.; LEWINER, T.; TAVARES, G. Particle-based viscoplastic fluid/solid simulation. *Computer Aided Design*, v. 41, n. 4, p. 306-314, 2009.

PEREGRINE, D. H. Surf Zone Currents. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, v. 10, n. 1-4, p. 295-309, Jan. 1998.

PETRONETTO, F.; PAIVA, A.; LAGE, M.; TAVARES, G.; LOPES, H.; LEWINER, T. Meshless Helmholtz-Hodge Decomposition. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, v. 16, n. 2, p. 338-349, Mar./Apr. 2010.

SHAO, S. Incompressible SPH simulation of wave breaking and overtopping with turbulence modelling. *International Journal for Numerical Methods Fluids*, v. 50, n. 5, p. 597-621, Feb. 2006.

SHAO, S. D.; GOTOH, H. Simulating coupled motion of progressive wave and floating curtain wall by SPH-LES model. *Coastal Engineering Journal*, v. 46, n. 2, p. 171-202, June 2004.

VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Geração de Ondas Solitárias com o Método SPH. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 20., 2013, Bento Gonçalves, RS. Anais... [S.l.]: ABRH, 2013.

VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Uma Introdução às Técnicas Lagrangeanas: Uma Aplicação do Método SPH a Problemas de Engenharia. *RBRH: revista brasileira de recursos hídricos*, v. 16, n. 1, p. 67-82, 2011.

VIOLEAU, D.; BUVAT, C.; ABED-MERAÏM, K.; DE NANTEUIL, E. Numerical modelling of boom and oil spill with SPH. *Coastal Engineering*, v. 54, p. 895-913, 2007.

WEI, G.; KIRBY, J. T.; GRILLI, S. T.; SUBRAMANYA, R. A Fully nonlinear Boussinesq Model Equations for Surface Waves. I. Highly Nonlinear, Unsteady Waves. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 294, p. 71-92, July 1995.