

Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática

Yaneth Josefina Ríos García

Resumen

Este artículo es producto de una de las etapas, la preliminar, de una investigación bajo la metodología denominada Ingeniería Didáctica aplicada durante los años 2001-2005. Las teorías soporte son dos: Las Situaciones Didácticas y El Procesamiento de la Información. Este estudio se plantea como propósito caracterizar las interpretaciones que hacen los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física respecto a las fracciones. El diseño es de tipo inductivo, descriptivo, explicativo y longitudinal. La muestra estuvo conformada por 189 alumnos. La información se recolectó a través de cuestionarios, entrevistas y observaciones de clase. Entre los resultados tenemos que los alumnos utilizaron exclusivamente el lenguaje escrito formal para definir conceptos, con muchas deficiencias semánticas y sintácticas; los porcentajes de logro de los niveles de estructuración en las competencias conceptuales son muy bajos; y el obstáculo, que manifestaron con mayor frecuencia los alumnos, se debió a las experiencias previas.

Palabras clave: Interpretaciones de las fracciones, representaciones externas, niveles de estructuración, errores y obstáculos.

Concepts about Fractions held by Teachers in Training in the Area of Mathematics

Abstract

This article is a product from the preliminary stage of an investigation using a methodology called applied didactic engineering during years 2001-2005. Its supporting theories are didactic situations and information proc-

* Lic. en Educación. Prof. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. E-mail: yanrios@cantv.net

essing. The purpose of this study is to characterize the interpretations that students who enter the undergraduate education program in mathematics and physics have about fractions. Methodology is of the inductive, descriptive, explanatory and longitudinal type. The sample consisted of 189 students. Information was collected using questionnaires, interviews and class observations. Results indicated that the students used formal written language exclusively to define concepts, with many semantic and syntactic deficiencies; achievement percentages for the structuring levels in conceptual competences are very low; and the obstacle, manifested with increasing frequency by the students, was due to prior experiences.

Key word: Interpretations of fractions, external representations, structuring levels, errors and obstacles

Introducción

Uno de los conceptos matemáticos que ocupa un amplio espacio en los Subsistemas de Primaria y Secundaria es el de las fracciones; el tema se encuentra ubicado directamente en los bloques de contenidos referidos a Números y Operaciones en Primaria; en los programas de Matemática de Secundaria se encuentra explícito en el primer año y en los demás años, se encuentra implícito pues cuando se trabaja con números, las fracciones aparecen constantemente.

Las fracciones, además de tener varias interpretaciones, tiene múltiples relaciones con otros conceptos, como el de proporción y el sistema de numeración decimal, y con otros procedimientos, como la regla de tres y la división. Así pues, es un hecho casi obligante que los estudiantes de nuestro Sistema Educativo dominen tanto las competencias conceptuales como procedimentales relacionadas a las fracciones.

Lamentablemente, investigaciones realizadas por el Centro para la Enseñanza y Mejoramiento de la Ciencia CENAMEC (1982-1983) con una muestra de 23772 estudiantes de séptimo grado, y por el Sistema Nacional de Evaluación de los Aprendizajes SINEA (1998), con una muestra de estudiantes de tercer y sexto grado, mostraron porcentajes bajos de éxitos en competencias procedimentales asociadas a las operaciones entre fracciones, y en las competencias conceptuales asociadas a las diversas interpretaciones de las fracciones, relaciones de orden, equivalencia entre ellas, y fracción decimal (Ríos y Escalona, 2002; Ríos, 2005).

El estudio que se presenta a continuación corrobora que estas deficiencias siguen y se acentúan a nivel superior, como se muestra a continuación.

El problema del aprendizaje de las fracciones en el nivel superior

Los estudiantes de la asignatura Fundamentos de Matemática, perteneciente al pensum de la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, muestran bajo dominio de las competencias conceptuales y procedimentales en los conjuntos numéricos.

En referencia a estas deficiencias, una investigación que se realizó en el año 1999 (Ríos, 2000), a un grupo de 42 estudiantes (en esta asignatura), donde se tomó como referencia la Estrategia de Resolución de Problemas denominada "La Escalera", elaborada por La Fundación CENAMEC (1985), se trabajaron problemas donde se aplicaron las cuatro operaciones básicas de los números enteros. Se concluyó que en las producciones de los alumnos, existían deficiencias en el dominio de los procesos asociados a las competencias conceptuales, la elaboración y la organización; en este estudio, 42 estudiantes exhibieron deficiencias en la comprensión lectora pues muestran dificultades cuando identifican y relacionan datos, y hacen inferencias erradas en cuanto a las estrategias aplicadas en la resolución de problemas, asociados a las cuatro operaciones básicas.

Además, las deficiencias en el aprendizaje de las fracciones persiste en los alumnos que ingresan al nivel superior del Sistema Educativo Venezolano como lo corrobora una investigación realizada por Ríos y Escalona (2002), donde en los estudiantes del primer semestre de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física en el año 2001, se evidenció que los procedimientos utilizados en la suma y multiplicación de fracciones, cálculo de porcentajes y de fracciones equivalentes, no tienen significado alguno para ellos, pues al preguntarles porqué los aplican, en su gran mayoría responden que no saben o sencillamente se lo explicaron así.

En el mismo estudio se hizo un análisis de los errores conceptuales frecuentemente cometidos por los 72 estudiantes de la muestra. Se observó que de los estudiantes que respondieron el cuestionario, éstos cometieron errores en: la definición de fracción (59,69%), la relación porcentaje y fracción (41,28%), la proporcionalidad (100%) y las fracciones equivalentes (63,87%).

Producto de lo descrito anteriormente, surgen varias interrogantes con respecto a las interpretaciones adquiridas por los alumnos que ingresan al nivel superior con respecto a las fracciones, a saber: ¿cuáles son las representaciones externas que utilizan los alumnos para comunicar las ideas matemáticas?, ¿qué tipo de errores y obstáculos, y cuáles son los más frecuentes en los procesos de interpretación?, y ¿cuáles son los niveles de aprendizaje logrados en las competencias conceptuales asociadas al concepto de fracción?

Para darle respuesta a las preguntas anteriores, se plantea el siguiente objetivo general: "Caracterizar las interpretaciones que hacen los alumnos que ingresan a la Licenciatura en Educación Mención Matemá-

tica y Física respecto al concepto de fracción”; y los siguientes objetivos específicos:

- Determinar los niveles de estructuración progresiva que logran los alumnos respecto a las competencias conceptuales asociadas a las fracciones.
- Caracterizar las representaciones externas que utilizan los alumnos al comunicar ideas matemáticas referidas al concepto de fracción.
- Categorizar los errores y obstáculos que presentan los alumnos respecto al concepto de fracción.

Bases teóricas

Dos aspectos teóricos sustentan esta investigación, uno referido al componente cognitivo y otro, al didáctico. El primero, se refiere a la teoría de aprendizaje constructivista que sustenta esta investigación, la Teoría del Procesamiento de la Información; en esta teoría se explican los tipos de conocimientos asociados a las competencias conceptuales y procedimentales, los tipos de representaciones externas y los niveles de estructuración progresiva.

En el segundo componente, el didáctico, se tomó como soporte la Teoría de Situaciones Didáctica de la Escuela Francesa, donde se establece una caracterización de las situaciones que se deben implementar en aula, considerando para nuestro estudio dos conceptos claves: los errores y los obstáculos.

Teoría del Procesamiento de la Información

Gagné (1991) define la psicología cognitiva como el estudio científico de los procesos mentales. La mayoría de los psicólogos cognitivos apoyan como modelo de aprendizaje el **Procesamiento de la Información**. Este concibe al cerebro como un computador donde la información de entrada se transforma, originando una información de salida distinta a la original. Esta metáfora, permite el estudio de los procesos mentales, cosa que no hace el conductismo.

Este modelo concibe que el conocimiento se puede almacenar de dos maneras: a través de proposiciones y producciones. La primera forma de organización recibe el nombre de conocimiento declarativo o conceptual, que constituye las características de objetos, hechos o acontecimientos, y la segunda es una forma de organización que se le denomina procedimental, el cual consiste en un conjunto organizado de pasos o actividades (Gagné, 1991).

Estos dos tipos de conocimientos, en la mayoría de los casos son inaccesibles a nuestros sentidos, pues sólo se pueden ver con los ojos de la mente. Generalmente muchas de las representaciones que se asocian

a los conceptos matemáticos son abstractas, en el mejor de los casos pueden ser representados gráficamente, de allí la complejidad del aprendizaje de estos conceptos y procedimientos.

Interpretaciones del conocimiento matemático

La interpretación que hace el alumno de un objeto matemático, es un modelo personal y particular, que le permite explicar el fenómeno que observa. Este modelo está asociado a aspectos tales como las experiencias o concepciones previas, la estructura cognitiva, los obstáculos, la memoria, entre otros. A este respecto Koyré (citado por Astolfi, 2001), establece que el paso de una interpretación al concepto matemático no debe concebirse como la eliminación de elementos subjetivos y una reducción de factores comunes identificados por el conocimiento científico, esta implica la reorganización de los procesos cognitivos, una “mutación intelectual” (Astolfi, 2001).

En lo que respecta a esta investigación, el objeto matemático que se ha escogido, es la fracción; esta puede ser dotada de varias interpretaciones, tales como reparto, cociente, división indicada, razón, porcentajes y número racional, que su desconocimiento no permite, a los estudiantes, resolver problemas donde se necesite la comprensión de estas interpretaciones.

A este respecto, Segovia y Rico (2001) y Azcarate (1995) opinan que se deben establecer conexiones entre los diferentes significados, pues los procesos de relacionar las diversas interpretaciones de un mismo concepto no son espontáneos en los estudiantes, muy por el contrario, son procesos elementales que los profesores deben ayudar que sus alumnos adquieran. Llinares y Sánchez (1997) al particular expresan que a los niños se les debe proporcionar una adecuada experiencia con las interpretaciones de las fracciones si se quieren que lleguen a comprender el concepto.

Para determinar el nivel de comprensión del concepto de las fracciones, por parte de los alumnos, se trabajó con unas categorías llamadas niveles de estructuración progresiva, que explican el proceso de formación de conceptos matemáticos en la estructura conceptual; dicha categorización fue creada por Sfard (1991, citada por Azcárate, 1995) para el área de Matemática.

- Interiorización: en donde se entra en contacto con los procesos que dan lugar a un nuevo concepto. Dichos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel más elemental.
- Condensación: es un período en donde se concentran las largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa se puede dar un nombre a un concepto que nace, se hace cada vez más factible combinar procesos, hacer comparaciones y generalizaciones y aumenta la factibilidad para alternar diversas representaciones del concepto.

- Cosificación o reitificación: la persona es capaz de concebir la noción como un objeto matemático. Es una habilidad repentina para concebir algo familiar desde una nueva perspectiva. Las primeras dos etapas son graduales y la tercera es un salto informacional.

En este estudio, los niveles de estructuración se manifestaron en las competencias conceptuales adquiridas por los alumnos; para establecer el nivel de logro de cada una de las competencias se utilizaron los siguientes criterios:

Cuadro 1
Indicadores que permiten establecer los niveles de estructuración progresiva en el área de fracciones

Niveles de Estructuración Progresiva	Competencias Conceptuales
Interiorización	<ul style="list-style-type: none"> • Cuando se redacta una definición se establecen ideas intuitivas o ejemplos particulares. • Al leer las fracciones, en cualquiera de sus interpretaciones lo hace en su forma tradicional. • La conversión entre representaciones externas se hace directamente, sin explicitar el procedimiento.
Condensación	<ul style="list-style-type: none"> • Cuando se redacta una definición el lenguaje utilizado es tanto formal como informal y se complementa con un ejemplo. • Al leer las fracciones, en cualquiera de sus interpretaciones lo hace de otra forma, además de la tradicional. • La conversión entre representaciones externas se hace explicitando algunos pasos del procedimiento.
Cosificación	<ul style="list-style-type: none"> • Cuando se redacta una definición el lenguaje utilizado es formal y se complementa con un ejemplo. • Al leer las fracciones, en cualquiera de sus interpretaciones lo hace de tres formas posibles. • La conversión entre representaciones externas se hace explicitando todos los pasos del procedimiento.

Fuente: Ríos (2008).

Representaciones externas del conocimiento matemático

Para poder razonar y comprender cualquier concepto matemático, es necesario hacer una representación interna o una construcción mental, para poder operar sobre él. Por otro lado, para poder comunicarlas hacemos uso de notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada

noción, mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes. Este conjunto de gráficos, reglas o símbolos es lo que se denomina sistemas de representación o representaciones externas (Segovia y Rico, 2001).

Las representaciones externas o los sistemas de representación constituyen un aspecto fundamental en la enseñanza, pues ellas permiten la representación interna, con lo que se puede razonar; así pues, para lograr los procesos del pensamiento y aumentar la capacidad cognitiva es adecuado que se logre una variedad de representaciones externas del mismo concepto. Eso lo sugiere Romero (2000) por cuantos las representaciones se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros (Blázquez y Ortega, 2001).

Maza (1995) distingue cinco representaciones externas: los modelos manipulativos (objetos tridimensionales), los dibujos o diagramas (objetos bidimensionales), el lenguaje formal, lenguaje informal y los símbolos escritos (propios de la Matemática). Las representaciones simbólicas son las complejas por su carácter arbitrario, impuesto por la comunidad científica, las cuales no evidencian las propiedades del referente.

Con respecto a lo anterior, en esta investigación se plantea una hipótesis con relación al orden de complejidad en cuanto al uso de las representaciones externas; se ordena de menor complejidad a mayor de la siguiente forma: lenguaje informal, manipulativas, icónicas, lenguaje formal, simbólica. Esta secuencia, a nuestro parecer y en correspondencia a lo que aporta Maza (1995), se adecua al grado de accesibilidad al referente, es decir, la transparencia que ofrece cada representación. El mayor grado de transparencia caracteriza a las representaciones del lenguaje informal y la de menor transparencia corresponde a las representaciones simbólicas.

Teoría de las situaciones didácticas

Esta teoría nace en los años 70 en Francia por el análisis crítico que le hace el grupo de investigación, guiado por Guy Brousseau, a los métodos de enseñanza de la Matemática. Este grupo realiza un análisis de cuales son las interacciones que se presentan en el aula de clase entre los actores del proceso de enseñanza aprendizaje de los conocimientos matemáticos, desarrollando así una teoría de este proceso; esta maneja términos tales como la transposición didáctica, fenómenos didácticos, situaciones: fundamental, didáctica y a-didáctica, contrato didáctico, variable didáctica, salto informacional, obstáculos, y errores, entre otros. Para efecto de esta investigación solamente trabajaremos con los últimos dos.

El error

La utilización del análisis del error como método de observación indirecto para el análisis de los procesos mentales del individuo que aprende, se hace consistente, pues el individuo muestra regularidades en el

modo de realizar tareas, con poca variabilidad en cortos periodos de tiempo (Kilpatrick et al., 1995).

En esta investigación se tomó en consideración la siguiente categorización del error: debido a la incomprensión del símbolo, de tecnología (errada elección de la técnica), de técnica (errada ejecución de tareas), de teoría (deficiencia en el manejo de conceptos), debido a la incomprensión del ítem o pregunta, debido a la no especificidad de la respuesta (aun y cuando el proceso es correcto), y sintáctico.

Obstáculo

Bachelard fue el primero en plantear el obstáculo en las ciencias físicas. Lo define como lo que ya se sabe y, que como ya se sabe, esto genera una inercia que dificulta el proceso de construcción de un saber nuevo, lo que constituye el acto de conocer. Es una barrera que se produce al momento de intentar conocer y pueden aplicarse tanto en la epistemología como a la historia, al principio pudo haber sido eficiente pero luego se muestra inadecuado (Rumelhard, 1997).

En esta investigación se tomó en cuenta la siguiente categorización de obstáculo: debido a las experiencias previas y por la incomprensión de conceptos.

Operacionalización de categorías

Para poder verificar el cumplimiento de los objetivos, las categorías que los conforman se operacionalizaron de la siguiente manera:

Cuadro 2
Operacionalización de los objetivos

Categorías	Propiedades	Item Cuestionario	Item Entrevista
Lectura de las fracciones	<ul style="list-style-type: none"> Niveles de estructuración progresiva (interiorización, condensación y co-sificación) Representaciones externas: lenguaje informal, icónica, lenguaje formal, y simbólica algebraica o aritmética) Tipos de errores Tipos de obstáculos 	1	—
Interpretación del símbolo de fracción		2,3,4,5	—
Interpretación de la fracción como operador, razón, medida, parte-todo, número racional, reparto y número decimal		7,9,10,11, 12,13,15	2,3,5
Interpretación de la totalidad fraccionada		6,8	4
Interpretación del concepto de fracción		14	1

Fuente: Ríos (2008).

Metodología

Según diversos criterios, mencionados por Bisquerra (1989), el método utilizado para la realización de ésta investigación es: inductivo, descriptivo, explicativo longitudinal.

La muestra para la aplicación de la propuesta didáctica fue no probabilista, elegida de manera intencional, pues estuvo constituida por 189 alumnos que ingresaron a la Licenciatura de Educación Mención Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, en los años 2001, 2002, 2004 y 2005.

Para recolectar la información se aplicó un cuestionario inicial durante cuatro años 2001, 2002, 2004 y 2005. La información recolectada se complementó con entrevistas realizadas en el año 2001, y observaciones de clase durante los cuatro años. A continuación se muestran, el cuestionario y la entrevista.

Cuestionario diagnóstico

1.- ¿Cómo se leen las siguientes fracciones? (si conoces varias formas de leerlas, escríbelas)

a) $\frac{1}{3}$ _____ b) $\frac{1}{12}$ _____ c) $\frac{7}{10}$ _____ d) $\frac{8}{7}$ _____ e) $2\frac{1}{8}$ _____

2.- ¿Qué significado tiene para ti la expresión “ $\frac{2}{3}$ de una torta”?

3.- ¿Qué significado tiene para ti la expresión “ $\frac{5}{2}$ de una torta”?

4.- ¿Qué significado tiene para ti la expresión “ $\frac{4}{4}$ de una torta”?

5.- ¿Qué significado tiene para ti la expresión “ $1\frac{1}{2}$ de una torta”?

6.- ¿Cuántas quintas partes tiene la unidad?

7.- Se tienen dos pizzas y se quieren repartir en partes iguales, entre 5 personas ¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica. Si realizas alguna operación, escríbela

8.- ¿Cuánto le faltan a los $\frac{3}{7}$ para la unidad?

9.- ¿Cuántos bolívares representan los dos tercios de 300 bolívares?

10.- Si tenemos 15 bolívares ¿Qué fracción representan 10 bolívares de esos 15 bolívares?

11.- ¿Qué parte de la unidad representa la parte rayada?

a)  _____ b)  _____  _____

12.- Cada una de las siguientes piezas, se representan por las letras A y B

 A

a) ¿Qué parte de A cabe en B?

 B

b) ¿Qué parte de B cabe en A?

13.- Se sabe que $0,5$ y $\frac{1}{2}$ representan la mitad de la unidad. Explique cuál es la relación entre los dos números. Si realizas alguna operación, escríbela

14.- ¿Qué entiendes por fracción?

15.- ¿Qué simboliza 2^{-1} ? ¿y $(-2/3)^{-1}$? Explique sus respuestas

Entrevista diagnóstica

1. Define el término de fracción y da ejemplos de ella.
2. Explicar cómo se determina los dos tercios de 300 bolívares.
3. Explicar qué fracción representa 15 bolívares de 25 bolívares?
4. ¿Cuánto le faltan a los $\frac{3}{7}$ para la unidad?
5. Explique qué simboliza 2^{-1} y $(-2/3)^{-1}$.

Para analizar la información, con respecto a los niveles de estructuración, se utilizó el siguiente baremo: si el nivel fue logrado por menos del 40% de la muestra, se asumió un porcentaje bajo de logro para ese nivel de estructuración; si el nivel fue logrado por un porcentaje comprendido entre el 40% y 75% de la muestra, se asumió un porcentaje moderado de logro para ese nivel; y si el nivel fue logrado por un más del 75% de la muestra, se asumió un porcentaje alto de logro para ese nivel; con respecto a las representaciones externas y los errores y obstáculos se determinaron los porcentajes según la tipología, y se caracterizaron las mismas.

Análisis de la información

Para cada una de las cinco competencias conceptuales se realizó el estudio de las representaciones externas utilizadas por los estudiantes, los niveles de estructuración logrados por los alumnos, y los tipos de errores y obstáculos presentes en las respuestas. A continuación se describen los resultados:

Categoría: Lectura de las fracciones

Los cinco ítems del cuestionario, fueron respondidos por más del 96% de la muestra, lo que implica un nivel de complejidad bajo para los estudiantes. Pequeños porcentajes de la muestra (máximo, el 23%) lograron niveles de interiorización haciendo referencia a la operación de división o a los elementos de la fracción, como por ejemplo: uno entre tres y uno sobre tres. Se observó que en todos los casos más del 68% de la muestra, en la representación formal escrita referida al nombre de las fracciones, logró el nivel de condensación; se observaron nombres tales como: un tercio, un doceavo, siete décimos o siete décimas, ocho séptimos y dos y un octavo. Solo un alumno logró, para algunas fracciones el nivel de cosificación, cuando al nombrar las fracciones hizo referencia al conteo de alguna parte de la unidad o al reparto de la unidad, como por ejemplo: siete veces la décima parte de la unidad, la tercera parte de la unidad y un doceavo de la unidad.

Los alumnos al nombrar las fracciones cometieron errores sintácticos, el 34,75% de la muestra que respondió; estos errores se deben a las experiencias previas adquiridas en niveles educativos anterior, pues así lo manifestaron los alumnos en las entrevistas. Los errores fueron los siguientes:

- Utilizaron cantidades de orden, tales como un duodécimo, un décimo segundo.
- Utilizaron cantidades cardinales, tal como la docena.
- Hicieron combinaciones entre las diversas formas de nombrar la misma fracción, tales como: uno doceavo, uno sobre doceavo, siete diezavos y ocho sieteavo.
- Incongruencias tales como: ochos céntimos y ocho centésimas, las cuales no corresponden a las fracciones dadas.
- Para el caso del número mixto, hicieron alusión a la operación de multiplicación, dos por un octavo. En este caso se observa que la regla establecida para expresiones algebraicas donde se sobre entiende que entre un número y una variable hay una multiplicación, es transferida a expresiones numéricas. Esta regla en este caso se convierte en un obstáculo debido al uso inadecuado de la analogía.
- Para el caso del número mixto, hay casos donde no se mencionan las unidades, solo se especifica la fracción propia.

Categoría: Interpretación del símbolo de fracción

En esta categoría se pretendió que el alumno asignara a las fracciones propias, impropias, unitarias y número mixto, algún significado. El grado de interpretación varió, pues los porcentajes de alumnos que respondieron estos ítems fueron diferentes: la fracción que resulta de mayor complejidad fue la fracción impropia (41% no responde), le siguió el número mixto (31%), luego la fracción propia con un 15%, y la fracción unitaria (8%). La interpretación que predominó, en los cuatro casos, fue la de parte todo y pocos alumnos trabajaron con las interpretaciones de reparto y cociente. En los cuatro ítems que conforman esta categoría, las representaciones externas más utilizadas fueron la escrita y la gráfica, la primera prevaleció sobre la segunda.

Los mayores niveles de estructuración progresiva se lograron con las fracciones propias, le siguió la fracción unitaria, luego el número mixto y por último la fracción impropia. El nivel de dificultad de este último ítem aumenta con respecto al anterior, pues el porcentaje de alumnos que no responden fue de 41,66%, en comparación a la anterior que fue de 14,58%. Esto se atribuye al hecho que, darle significado a la fracción impropia se dificulte cuando solamente se ha trabajado con la interpretación parte todo, pues a los alumnos se les dificultó entender porque se debe tomar otras unidades para poder representarlo gráficamente; de hecho esto lo hicieron de manera mecánica pues al preguntarle en las entrevistas por qué se procede de esa forma, ellos explican que así se los enseñaron. Algunos alumnos para poder darle significado, trabajan con la fracción inversa a la dada.

También se observó como más de la mitad de la muestra no asoció directamente la fracción unitaria con la totalidad, sino que: de los 22

alumnos, 45,83%, que logran el nivel de condensación, 18 escribieron que la unidad se divide en cuatro y se toman las cuatro, un alumno escribió $4:4=1$ y graficó la unidad dividida en cuatro, subrayó las cuatro partes, y 3 estudiantes expresaron que es la torta completa dividida en cuatro; y de los 7 alumnos, 16,58%, que lograron el nivel de interiorización, 5 estudiantes graficaron la torta dividida en cuatro partes iguales y subrayaron las cuatro, un alumno expresó cuatro cuartos, y otro escribió $4:4=1$.

En el caso del número mixto $1 \frac{1}{2}$, el 50% de la muestra lo asoció a la totalidad y su mitad, pero el 12% hizo la conversión a la fracción impropia equivalente. A continuación se muestran los niveles de estructuración logrados:

Cuadro 3
Niveles de estructuración logrados en la categoría interpretación del símbolo de fracción

Ítem	Interiorización		Condensación		Cosificación	
Propia	7	14,58%	27	56,25%	0	0%
Impropia	3	6,25%	1	2,09%	4	8,33%
Unitaria	7	14,58%	22	45,83%	5	10,41%
Número mixto	6	12,5%	6	12,5%	11	22,91%

Fuente: Ríos (2008).

Los errores presentes en esta categoría fueron debido a la complejidad del símbolo y la incomprensión de la pregunta. Por otro lado, en estos resultados se manifestó el dominio de una sola de las interpretaciones de las fracciones, como parte todo, pues la fracción entendida en estos términos solo es el resultado de una repartición equitativa y no el proceso de repartición en sí mismo, es decir, la fracción es interpretada solo como una porción de la unidad, pues al ser desligado de la concepción de reparto, no se concibe como un proceso de repartición equitativa, donde a cada uno le corresponde lo que indica la fracción. Por tal razón, se observan respuestas incompletas donde los alumnos indicaron lo que se reparte y entre cuantos se reparte, pero no indicaron lo que corresponde a cada uno o lo inverso, es decir, identifican el dos tercios como dos de tres pedazos iguales, pero no mencionaron que es el resultado de la repartición equitativa.

Categoría: Interpretación de la fracción como parte – todo, reparto, razón, número decimal, operador, número racional y medida

Por la naturaleza de las preguntas, las representaciones externas de las respuestas dadas por los alumnos para las interpretaciones como medida y parte todo, fueron exclusivamente simbólicas; en la interpretación reparto la gráfica y la simbólica se utilizaron por igual; en la interpretación como operador, la aritmética y la simbólica prevalecieron; en la interpretación como número decimal prevaleció la escrita; en la interpre-

tación como razón la representación simbólica estuvo por encima de las demás representaciones externas; en el caso de los números racionales, se usaron en igual medida las representaciones simbólica y escrita.

Se observó que más del 78% de la muestra desconoció la interpretación como número racional; la interpretación como medida de la fracción propia fue la más conocida, por más del 92% de la muestra, y le sigue la interpretación como parte todo para la fracción propia con un 87%, y las otras interpretaciones son desconocidas entre el 20% y 41% de la muestra. Se concluye que para los alumnos, la interpretación que tuvo mayor grado de complejidad fue la de número racional.

Por otro lado, para esta categoría se debe hacer notar que las respuestas referidas a la interpretación parten todo para la fracción propia, puede solamente adecuarse al nivel de interiorización de estructuración progresiva, por la baja complejidad de la pregunta. En este sentido, el 70% de la muestra logró este nivel en esta categoría.

En este sentido, las respuestas referidas a la interpretación como medida, puede solamente adecuarse a los niveles de interiorización y condensación de estructuración progresiva, por la mediana complejidad de la pregunta. Para el caso de la medida para la fracción propia, estos niveles fueron logrados por el 28% de la muestra; y para la fracción impropia, el primer nivel fue logrado por un solo alumno.

La interpretación como decimal, razón y racional (no entero) no logró ser cosificado por ningún alumno; el mayor porcentaje (43%) de interiorización fue logrado para la interpretación como decimal, le sigue la razón (32%), luego parte todo impropia (29%) y luego la medida propia (27%). El nivel de condensación fue logrado en mayor porcentaje en la interpretación como medida propia (29%), le sigue reparto propia (18%) y luego parte todo impropia (12%), las demás interpretaciones oscilaron entre 2% y 9%. El nivel de cosificación fue logrado en mayor porcentaje en la interpretación de operador (22%), le sigue reparto impropia (20%), luego reparto propia (6%) y por último racional entero (3%).

El error que se evidenció en todas las interpretaciones, menos la decimal, fue por la complejidad del símbolo; la de mayor porcentaje fue la interpretación como medida impropia (70%), le siguen las interpretaciones de: medida propia (35%), reparto impropia (33%), reparto propia (27%), razón (21%), parte todo propia (17%), racional no entero (6%), racional entero (6%), parte todo impropia (4%), y operador (2%).

El otro tipo de error que se observó en un alto porcentaje (29%) fue el de “no especificidad de la respuesta” en la interpretación de operador, aun cuando el proceso de solución fue el correcto; esto se debió a las experiencias previas de los alumnos pues algunos alumnos en las entrevistas manifestaron que “en bachillerato no les exigían las respuestas, sino el proceso”.

Se observaron otros tipos de errores en menores porcentajes: incomprensión de la pregunta en la interpretación de operador (13%) y la de razón (2%); deficiencia teórica en la interpretación como decimal

(13%); la errada escogencia en la técnica en la interpretación reparto (18%) para los dos tipos de fracciones; y la errada ejecución de las tareas en la interpretación de operador (1%). En las entrevistas los alumnos manifestaron que estas competencias no fueron adquiridas en bachillerato, por lo que el obstáculo que los provocó fue las experiencias previas.

Se anexaron otros tipos de errores, producto de las experiencias previas, donde los alumnos responden al azar en la entrevista, pero la solución del cuestionario fue correcta. Se muestra el siguiente ejemplo (Cuadro 4) donde al alumno se le pide determinar los $\frac{2}{3}$ de 300, donde se presenta confusión pues se observa que relaciona la interpretación de operador con la división y suma de fracciones, y los porcentajes.

Cuadro 4
Ejemplo de interpretación de operador manifestada en clase

Intervención del Profesor	Intervención del Alumno
	<ul style="list-style-type: none"> Esto está malo. Aquí se aplica la regla de tres. El alumno escribe: $\begin{array}{r} 2 \\ \underline{3} \\ 300 \\ \underline{1} \end{array}$
Si es una regla de tres, por qué aplicas la doble c	<ul style="list-style-type: none"> Perdón, es la doble c. El alumno escribe: $900 : 2 = 450$ Está malo, no se puede aplicar la doble c
¿Qué es la doble c?	<ul style="list-style-type: none"> Es una suma de fracciones; vamos a comprobarlo El alumno escribe: $\frac{2}{3} + \frac{300}{1} + \frac{2+900}{3} = \frac{902}{3}$
¿Qué entiendes tú por $\frac{2}{3}$? Representalo	El alumno escribe: $\frac{2}{3}$
- ¿Qué significa eso para ti?	<ul style="list-style-type: none"> ¿En porcentaje?
Así como lo hiciste en el caso anterior, donde cada parte representa la cuarta parte	El alumno representa:  Una parte son 150. Esto es una parte, la mitad de esto es 75.

Fuente: Ríos (2008).

Categoría: Interpretación de la totalidad fraccionada

Cuando el alumno identifica cuántas quintas partes tiene la totalidad, la representación externa que prevaleció fue la escrita. Por otro lado, este ítem fue respondido por el 68% de la muestra, lo cual implica que fue una pregunta de mediana complejidad para los alumnos.

De tal manera, para esta pregunta se debe hacer notar que las respuestas se adecuaron a los niveles de interiorización y condensación de estructuración progresiva, por la mediana complejidad de la pregunta, por lo que el nivel de interiorización fue logrado por el 45% de la muestra, y la condensación por un solo alumno. El error que se presentó fue debido a la incomprensión de conceptos en un 21% de la muestra, donde 8 alumnos expresaron que la totalidad está compuesta por dos, uno y ninguna quinta parte; y 2 estudiantes escribieron $1/5=0,2$; $0,2 \times 5=1$, estos últimos alumnos establecieron la respuesta operacionalmente, pues cinco veces la quinta parte resulta la unidad.

La segunda pregunta, donde el alumno debe identificar cuanto le falta a los $3/7$ para completar la unidad, las representaciones externas que prevalecieron fueron la simbólica y aritmética, en 25% y 28%, respectivamente. Esta pregunta fue respondida por el 61% de la muestra, lo que significa que para los alumnos el grado de complejidad fue mediano. El 18% de la muestra logró el nivel de interiorización, y los otros dos niveles fueron logrados por el 5% y 3% de la muestra, respectivamente. Se observó que pocos alumnos justificaron el proceso; dos alumnos justificaron de la siguiente forma: uno realizó una representación algebraica y gráfica en la recta numérica, y otro hizo un análisis fenomenológico usando el béisbol.

Los errores presentes fueron los relacionados a la complejidad del símbolo (1,58%), elección inadecuada de la estrategia de solución (1,58%), ejecución inadecuada de las tareas (21,16%), deficiencia de conceptos (un alumno), la incomprensión de la pregunta (9,52%) y la falta de especificidad de la respuesta (19%). Los errores debido a la complejidad del símbolo, y la falta de especificidad de la respuesta, fueron debidos al obstáculo producido por las experiencias previas de los alumnos, pues en la entrevistas manifestaron que así lo aprendieron en bachillerato.

Los errores de elección inadecuada de la estrategia de solución (1,58%), ejecución inadecuada de las tareas, deficiencia de conceptos, y la incomprensión de la pregunta (9,52%), fueron a causa de los obstáculos producidos por la incomprensión de conceptos matemáticos, pues los procesos cognitivos involucrados en estas actividades son propios de la Matemática, referidos a la toma de decisiones, ejecución de tareas y generalización.

Por otro lado se obtuvieron respuestas azarosas, pues los alumnos expresaron que lo hicieron “a pegar” o que no lo supieron hacer; otro error que se presentó con bastante regularidad fue la dificultad en identificar la totalidad, como se muestra a continuación:

Cuadro 5
Ejemplo de identificación de totalidad manifestada en entrevista

Intervención del Docente	Intervención del Alumno
<ul style="list-style-type: none"> • Para representar el tres sobre siete ¿en cuántas partes debes dividir la unidad? 	<ul style="list-style-type: none"> • En dos partes
El profesor hace referencia al caso de la pregunta 2. <ul style="list-style-type: none"> • Aquí te piden qué 	<ul style="list-style-type: none"> • Los 3/7
<ul style="list-style-type: none"> • ¿En cuánto tienen que dividir la unidad • Pero antes de hallar los 3/7 tienen que dividirla en cuántas partes? 	<ul style="list-style-type: none"> • En 3/7 • ¿La unidad?
<ul style="list-style-type: none"> • Sí 	
<ul style="list-style-type: none"> • En el caso de dos tercios, el tercio te indica que tienes que dividir la unidad en terceras partes; en los tres séptimos ¿cuál número te indica las partes en que vas a dividir la unidad? 	<ul style="list-style-type: none"> • El primero
<ul style="list-style-type: none"> • No, el siete 	<ul style="list-style-type: none"> • Entonces, aquí divido la unidad entre siete ¿Cuál es la unidad?
<ul style="list-style-type: none"> • Haz una representación gráfica 	<ul style="list-style-type: none"> • Puedo tomar 10 y la divido entre siete
<ul style="list-style-type: none"> • Para ti la unidad es un conjunto de elementos. La unidad puede ser un objeto como este borrador y lo puedes dividir en siete partes iguales. Tú pudieras tomar cualquier figura para dividirla en siete partes ¿cuál te conviene? 	<ul style="list-style-type: none"> • Un círculo, me convendrían siete círculos
<ul style="list-style-type: none"> • Si tú tienes siete objetos, los tres séptimos qué representarías 	<ul style="list-style-type: none"> • Hay que dividir los siete objetos entre tres
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Entre tres o siete? 	<ul style="list-style-type: none"> • Sí, entre siete
<ul style="list-style-type: none"> • Tienes los siete objetos, ¿cada objeto qué representa? 	<ul style="list-style-type: none"> • La unidad
<ul style="list-style-type: none"> • No, tu unidad son los siete objetos 	<ul style="list-style-type: none"> • Los siete en conjunto...

Fuente: Ríos (2008).

Categoría: Interpretación del concepto de fracción

La representación externa de estas respuestas, por la naturaleza de la pregunta es escrita, la cual fue respondida por el 43% de la muestra. El nivel de interiorización fue logrado por el 19,04% de la muestra, los cuales definieron la fracción de una manera superficial, mencionando diversas interpretaciones como división, reparto, parte del todo, número ra-

cional, cociente, números quebrados entre otros, sin justificar su respuesta; y el nivel de condensación fue logrado por el 1,06% de la muestra, los cuales mencionaron el significado del numerador y el denominador. Estos resultados muestran que el nivel de complejidad de este ítem es moderado a pesar que las fracciones son contenidos manejados desde el segundo grado de nuestro sistema educativo.

Las concepciones previas mostradas en las producciones de los alumnos, persistieron en las entrevistas, pues asociaron la fracción con: la interpretación parte todo, la interpretación como razón de números, la identificaron con un número decimal, la división de objetos y números, e hicieron referencia a la su forma simbólica de un número sobre otro, como en el siguiente ejemplo:

Cuadro 6
Ejemplo referido a la definición de fracción en la entrevista

Intervención del Profesor	Intervención del Alumno
• ¿Qué es una fracción?	• Es la agrupación de números.
• Cuando tú dices la agrupación de dos números, puedo tomar dos números...	• Del tipo fraccionarios Es tomar dos números y colocar uno sobre otro.

Fuente: Ríos (2008).

En cuanto a las demás producciones de los alumnos (23%) en este ítem, se establecieron las siguientes categorías de errores teóricos debido a la incomprensión de conceptos matemáticos, en las cuales los alumnos establecen una(s) característica(s) de la fracción.

Cuadro 7
Categorización de las definiciones de fracciones dada por los alumnos en los cuestionarios

Categoría	Producciones de los alumnos
Definiciones que asocian a la fracción con alguna operación	<ul style="list-style-type: none"> • Divisiones inexactas • Es la división de enteros • Un número menor entre uno mayor • Es donde se realiza una división • Es una multiplicación en cruz que toma en cuenta los signos • Es la suma de dos o más fracciones • Es una multiplicación que toma en cuenta los signos para ampliar los números

Cuadro 7
Categorización de las definiciones de fracciones
dada por los alumnos en los cuestionarios (Continuación)

Categoría	Producciones de los alumnos
Definiciones que asocian la fracción con el reparto o división de algún objeto	<ul style="list-style-type: none"> • Partes en que se divide el todo • Es la forma en que un objeto se puede repartir • Partes del objeto y las que se reparten • Es la división de un objeto en partes equitativas para poder fraccionarla • Es cuando dividimos algo
Definiciones asociadas a la noción de número	<ul style="list-style-type: none"> • a/b, donde numerador es la unidad y el denominador parte del todo • Es la expresión de cierta cantidad en partes • Es fraccionar un número entero en partes • Es la forma expresiva de los números • Son todos los números que permiten representar partes iguales de la unidad • Es una porción que se toma de un número completo de los números naturales • Es la manera de representar la mitad de los números • Un número de arriba con relación al de abajo • Es una forma de expresión, un número decimal • Es una cantidad expresada en proporciones • Busca un número que al dividir el denominador y numerador, da exacto
Definiciones asociadas a la noción de todo o unidad	<ul style="list-style-type: none"> • Se divide el todo, la unidad (numerador) en la parte que indique el denominador • Veces en que se divide la unidad • Es el todo sobre las partes que se toman
Definiciones asociadas a la noción de partes	<ul style="list-style-type: none"> • Es lo que indica la cantidad que se tomó de la porción • Es la parte que se divide en partes iguales

Fuente: Ríos (2008).

Conclusiones

Con respecto a las concepciones conceptuales previas de los alumnos de la muestra referidas al concepto de fracción se concluyó:

1. Por el porcentaje de respuestas obtenidas se observó que *la categoría de mayor complejidad* para los alumnos fue: la interpretación de fracción como número racional. *Las categorías de mediana complejidad* fueron: interpretación del símbolo de fracción impropia y número mixto, interpretación de reparto, interpretación de operador, interpretación como razón, interpretación como número decimal, interpretación como medida para la fracción impropia, interpretación de la totalidad fraccionada, definición del concepto de fracción. *Las categorías de baja complejidad* fueron: lectura de las fracciones, interpretación del símbolo de fracción para las fracciones propias y unitarias, interpretación como parte todo, interpretación como medida de la fracción propia.

2. Con respecto a los niveles de estructuración tenemos las siguientes conclusiones:

- Para la lectura de las fracciones, se lograron altos porcentajes para el nivel de condensación, pero llama la atención que no se logran los niveles de cosificación a pesar que la lectura es trabajado en los niveles iniciales de nuestro sistema educativo.
- Para la interpretación del símbolo de fracción, para las fracciones propias y unitarias se logra medianamente el nivel de condensación, para la fracción impropia y el número mixto muy bajos porcentajes logran el nivel de interiorización y cosificación. Se concluye, que en los niveles iniciales los alumnos adquieren mejor comprensión para la fracción propia y unitaria que para la fracción impropia y número mixto.
- Para la interpretación de la totalidad fraccionada, se observó que los conocimientos previos respecto a la identificación del complemento de $\frac{3}{7}$ en la totalidad, y de las quintas partes de la totalidad, logran niveles de condensación muy bajos.
- Para las diferentes interpretaciones del concepto de fracción se obtuvo que: la interpretación con mayor porcentaje de logro de el nivel de cosificación fue parte todo para la fracción propia, no así para el caso de la fracción impropia, reafirmando este resultado el hecho que la interpretación que prevalece en los niveles iniciales es esta, con dificultades para la fracción impropia. Le sigue las interpretaciones de operador, medida caso fracción propia y número decimal. En las demás interpretaciones, reparto, medida caso fracción impropia, razón y número racional, los alumnos mostraron porcentajes de logro bajos para el nivel de interiorización.

3. Con respecto a los errores y obstáculos se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- En referencia a la lectura de fracciones, los errores que se manifestaron fueron los sintácticos.
- Con respecto a la categoría referida a la identificación del símbolo, se manifestaron dos tipos de errores referido a la elección de la técnica y por la incomprensión de la pregunta.
- En la categoría referida a las diversas interpretaciones de la fracción se observó lo siguiente: todas las interpretaciones manifestaron errores por la incomprensión del símbolo (menos la de número decimal), donde los mayores porcentajes se manifestaron en la interpretación de medida impropia y reparto. Para la interpretación de reparto se manifestó el error por elección de la técnica; para la interpretación de operador se manifestaron los errores debido a la incompletitud de tareas, debido a la incomprensión del ítem y errores de cálculo; para la interpretación como número decimal se evidenció el error causado por las deficiencias en el manejo de conceptos del sistema de numeración decimal; y para la interpretación de razón se observaron errores por la incomprensión del ítem.
- Con respecto a la identificación de la totalidad, la quinta parte de la muestra mostró deficiencias en la identificación de la totalidad; y en cuanto a identificar el complemento de $3/7$ en la totalidad, se presentaron seis tipos de errores, siendo el de mayor frecuencia los errores de cálculo y debido a la no especificidad de la respuesta, aún y cuando el proceso es correcto.
- En la categoría referida a la interpretación del concepto de fracción se presentan deficiencias teóricas con respecto al concepto.
- Los obstáculos que prevalecieron fueron los asociados a las experiencias previas, en todas las competencias analizadas.

4. Con respecto a las representaciones externas se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Se utilizó solamente la representación externa escrita informal en las siguientes categorías: lectura de fracciones e interpretación del concepto de fracción.
- En la categoría referida a la interpretación del símbolo de fracción, en términos generales se utilizaron las representaciones externas escrita y gráfica, en una razón de 3 a 1, y muy bajos porcentajes de la muestra complementó con las representaciones aritmética y simbólica.
- En la categoría referida a las diversas interpretaciones de las fracciones se observó que: para la interpretación de parte toda la representación utilizada fue solamente la simbólica, en la interpretación de medida predominó la simbólica sobre la escrita, en la interpretación como número decimal predominó la escrita sobre la aritmética,

en una razón de 26 a 1; en la interpretación como número racional predominaron la simbólica y escrita sobre la aritmética en una razón de 4 a 1; en la interpretación como reparto se utilizaron todas las representaciones externas predominando la gráfica, aritmética y simbólica sobre la escrita y algebraica; en la interpretación como razón se utilizaron todas las representaciones externas, predominando la simbólica sobre las demás; y en la interpretación como operador predominaron las representaciones aritmética y simbólica sobre la gráfica y escrita, en una razón de 20 a 1.

- En la categoría referida a la interpretación de la totalidad, para identificar las quintas partes de ella, la representación escrita predominó sobre la aritmética en una razón de 32 a 2; y para determinar el complemento de $3/7$ dentro de la totalidad, predominaron las representaciones simbólica y aritméticas sobre la escrita, gráfica y aritmética en una razón aproximada de 17 a 3.

5. Al realizar un análisis de contenido a las respuestas de los alumnos, podemos destacar lo siguiente:

- La gran mayoría de los alumnos leyeron de forma tradicional las fracciones; ningún alumno usó la noción de conteo y reparto; y entre los errores más comunes encontramos el uso de las cantidades ordinales, cardinales y la combinación de estos.
- Al interpretar el símbolo de fracción, la gran mayoría de los alumnos se apegó a la noción de parte todo, y muy pocos utilizaron las nociones de reparto y cociente.
- Pocos alumnos lograron comprender el concepto de totalidad fraccionada, pues pocos menos de la mitad de la muestra identificaron cuantas quintas partes tiene la totalidad, y la quinta parte de la muestra establecieron el complemento faltante de una porción de la unidad.
- La quinta parte de la muestra logró los niveles de estructuración al darle alguna interpretación teórica a la fracción, pero en la mayoría de los casos las ideas expuestas fueron intuitivas, y sin justificaciones formales. Las demás producciones asociaron la fracción a: alguna operación, reparto o división de algún objeto, noción de número, noción de todo o unidad, y noción de partes.
- Por otro parte, se observó que al solicitar definiciones de determinados conceptos matemáticos, los alumnos utilizaron exclusivamente el lenguaje escrito formal con muchas deficiencias semánticas y sintácticas; al respecto se concluye que el uso del lenguaje escrito formal es un obstáculo para los alumnos, pues cuando intentaron definir conceptos matemáticos o explicar algún procedimiento utilizaron el lenguaje informal y en el mejor de los casos complementaron con las representaciones gráficas y aritméticas a través de ejemplos particulares, lo que lleva a pensar que no son capaces de ejecutar los procesos de generalización, por lo que recurren a la especi-

cidad a través de un caso particular. Así pues, las representaciones algebraicas estuvieron ausentes, lo que se explica claramente pues si los alumnos no muestran habilidades en el uso de las representaciones de menor complejidad, menos aun lo harán en la de mayor complejidad, y por otro lado, en los niveles inferiores del sistema educativo el desarrollo de estas habilidades son desatendidas por lo expresado en las entrevistas realizadas a los estudiantes.

Para culminar, los datos que suministró la muestra escogida evidenciaron que los alumnos que ingresan a la universidad, tienen deficiencias en los contenidos conceptuales que en su gran mayoría se plasman en los programas de Matemática de Primaria y Secundaria.

Referencias Bibliográficas

- Astolfi, Jean (2001). **Conceptos claves en la didáctica de las disciplinas**. Serie fundamentos; Primera edición; número 17. España. Editorial DIADA, pp. 94-98.
- Azcárate, Carmen (1995). "Sistemas de representación". **Revista UNO**, Didáctica de las matemáticas. España. Número 4, pp. 53-61.
- Bisquerra, Rafael (1989). **Métodos de investigación educativa**. Perú; Ediciones CEAC, pp. 275-278.
- Blázquez, Sansoles y Ortega, Tomás (2001). "Sistemas de representación en la enseñanza de límite". **Revista Relime**. Volumen 4, Número 3, Noviembre. México. Pp. 100-120.
- Gagné, Ellen (1991). **La psicología cognitiva del aprendizaje escolar**. Primera edición. Mexico. Editorial Aprendizaje Visor, pp: 43-50, 77-118, 213-247.
- Kilpatrick, Jeremy; Gómez, Pedro y Rico, Luis (1995). **Educación Matemática**. México. Editorial Iberoamericana, pp. 86-92.
- Llinares, Salvador y Sánchez, María (1997). **Las fracciones**. España. Editorial Síntesis; Colección matemáticas: cultura y aprendizaje. Número 4.
- Maza, Carlos (1995). **Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales**. Primera Edición. México. Editorial Paidós, pp. 67-76; 119-130; 149-184.
- Pozo, Juan (2001). **Teorías cognitivas del aprendizaje**. Sexta Edición. España. Editorial Morata, pp: 39-50.
- Ríos, Yaneth (2008). **Las fracciones: sus representaciones externas e interpretaciones**. Tesis doctoral. Doctorado de Ciencias Humanas de la Universidad del Zulia.
- _____ (2005). **El proceso de una Ingeniería Didáctica**. Venezuela; Trabajo de ascenso para optar a la categoría de profesor asociado; Universidad del Zulia, Facultad de Humanidades y Educación. Zulia, Venezuela, pp. 1-21.

-
- _____ (2000). **Los errores en el área de matemática**. Trabajo final del Seminario de Didácticas de las Matemáticas, Doctorado de Ciencias Humanas de la Universidad del Zulia.
- Ríos, Yaneth y Escalona, María (2002). **Proyecto de investigación: Representaciones cognitivas del concepto de fracción en alumnos que ingresan al programa de la Licenciatura de Educación, Mención Matemática y Física**. Venezuela. Centro de Estudios Matemáticos y Físicos de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, pp. 5-15.
- Romero, Jaime (2000). "La enseñanza de las fracciones: una opción". En: **Lengua Materna y enseñanza de las matemáticas**. Compilador: Romero Jaime; Primera edición. Buenos Aires, Barcelona, México. Editorial Paidós, pp. 105-122.
- Rumelhard, Guy (1997). "Trabajar los obstáculos para asimilar los conocimientos científicos". En: **Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza**. Compiladora: De Camilloni, Alicia. Primera Edición. España. Serie Didáctica General, Editorial Gedisa, pp. 31-62.
- Segovia, Isidoro y Rico, Luis (2001). "Unidades didácticas. Organizadores". En: Castro, Enrique (Editor) **Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria**. España. Síntesis.