

Competencias conceptuales adquiridas durante la aplicación de una propuesta didáctica referidas a las fracciones

*Yaneth Josefina Ríos García**

Resumen

Entre los años 2001-2006 se desarrolló una investigación con los estudiantes que ingresan en la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física de la Universidad del Zulia. La metodología de investigación empleada fue la Ingeniería Didáctica propia de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. Dentro de este contexto se decidió realizar otra investigación de corte cuasi-experimental, que se planteó como objetivo general: Determinar la eficacia de una propuesta didáctica para adquirir competencias conceptuales en algunos tópicos referidos a las fracciones, en alumnos de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física. La muestra estuvo constituida por 26 alumnos; se diseñaron experiencias didácticas durante 4 semanas; antes y después de esta experiencia fueron sometidos a un cuestionario para establecer: las preconcepciones iniciales, y los resultados de aprendizaje. Los resultados mostraron que la propuesta fue eficaz para algunas categorías y permitió disminuir errores sintácticos y de cálculo, no así con los errores semánticos.

Palabras clave: Fracciones, ingeniería didáctica, interpretaciones y errores.

* Directora del Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia.

Conceptual Competencies Acquired During the Application of a Didactic Proposal Referring to Fractions

Abstract

Between 2001 and 2006, a study was developed with students entering the degree program for Education, majoring in Mathematics and Physics, at the University of Zulia. The research methodology used was didactic engineering belonging to the theory of didactic situations by Guy Brousseau. Within this context, it was decided to carry out another investigation of a quasi-experimental type, whose general objective was: To determine the effectiveness of a didactic proposal to acquire conceptual competences in some topics referring to fractions on students in the School of Education, majoring in Mathematics and Physics. The sample consisted of 26 students. Didactic experiences were designed during 4 weeks; before and after these experiences, students were given questionnaires to establish their initial preconceptions and the results of learning, respectively. Results showed that the experience was effective for some categories and permitted decreasing syntactic and calculation errors; not, however, with semantic errors.

Key words: Fractions, didactic engineering, interpretations and errors.

Introducción

El presente artículo exhibe la adquisición de competencias conceptuales durante la aplicación de situaciones didácticas a los alumnos que ingresaron, en el año 2004, en la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física, de la Facultad de Humanidades y Educación, de la Universidad del Zulia.

La investigación se planteó como pregunta central, ¿La aplicación de una propuesta didáctica favorece la adquisición de competencias conceptuales en algunos tópicos referidos a las fracciones, en los alumnos que ingresaron en el primer período del 2004, en la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, de la Escuela de Educación, de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia?

Para darle respuesta a esta situación, se planteó el siguiente objetivo general: Determinar la eficacia de una propuesta didáctica para adquirir competencias conceptuales en algunos tópicos referidos a las fracciones, en alumnos del primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física; del cual se derivan los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterizar las interpretaciones iniciales referidas al concepto de fracción que tienen los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física.

2. Determinar los resultados de aprendizajes obtenidos por los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, después de aplicada la propuesta didáctica.

3. Determinar la eficacia de la propuesta didáctica referida al concepto de fracción.

4. Comparar las interpretaciones de los alumnos antes y después de aplicar la propuesta didáctica.

En cuanto a la caracterización de los preconceptos de los alumnos antes de la aplicación de la propuesta didáctica referida a las fracciones, se observó que en una sola categoría más del 70% de la muestra respondió correctamente; y después de aplicada la propuesta más del 70% respondió correctamente los ítems referidos a siete categorías de las ocho sometidas a estudio. Por otro lado, los resultados mostraron que la propuesta fue eficaz para algunas categorías y permitió disminuir errores sintácticos y de cálculo, no así con los errores semánticos.

1. Bases teóricas

Las teorías que sustentan esta investigación se orientan hacia tres vías, **la cognitiva** que tiene su soporte en algunas interpretaciones que puede tener el concepto de fracción, **la didáctica** la cual tiene sus bases en la Teoría de Situaciones Didácticas; ésta última, aporta un elemento que es tomado en cuenta para el diseño de la propuesta didáctica, los errores. Y una tercera vía, **la metodológica** propia de la Teoría de Situaciones Didácticas, como lo es la Ingeniería Didáctica. A continuación se hace una breve descripción de los tres elementos.

1.1. Interpretaciones del concepto de fracción

Son muchas las interpretaciones conceptuales (significados, representaciones, constructos, o conceptos) que se pueden hacer respecto al concepto de fracción. Estas representaciones trabajan con el episteme de fracción, desde una concepción compleja a otras más complejas.

Según Ríos (2001), la propuesta didáctica que propone, está basada en las seis interpretaciones del concepto de fracción, que se describen a continuación:

- La interpretación “parte todo” también denominada sub-área, concibe al todo dividido en partes iguales, donde el denominador indica las partes en que se divide la totalidad y el numerador las que se toman.
- La interpretación como “reparto” también denominada división indicada, entiende la fracción como el proceso de dividir el número de unidades que indica el numerador y ella indica el resultado de esa división, además el numerador permite contar la cantidad de partes que indica el denominador.

- La interpretación como “razón” entiende la fracción como un valor de comparación o de relación entre dos números enteros, que indica las veces que el segundo está contenido en el primero o las veces que el primero está contenido en el segundo.
- La interpretación como “número decimal” concibe la fracción como el resultado de hacer la división del numerador entre el denominador (definición conocida como cociente).
- La interpretación como “operador” entiende la fracción como el resultado de la ejecución de dos operaciones la división y la multiplicación, en ese orden o el inverso.
- Cuando el concepto de fracción se descontextualiza, aparece la interpretación de la fracción como “número racional”, este como ente abstracto de la forma (a, b) es entendido como un subconjunto de $(Z \times Z^*)/R$, donde R es la relación de equivalencia definida sobre $Z \times Z^*$ de la siguiente manera: $(a, b) R (c, d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Así se crea el conjunto cociente $(Z \times Z^*)/R$, denominado campo de cocientes de los números enteros, el cual es isomorfo al conjunto $\{a \cdot b^{-1} / a \in y b \in Z^* \text{ y m.c.d. } (a, b) = 1\}$, el cual recibe el nombre de números racionales (\mathbb{Q}). Cuando se toma este conjunto, cada número racional representa una clase de equivalencia formada por pares ordenados equivalentes. Si se considera el conjunto de los pares ordenados donde a y b son números naturales, el nuevo conjunto es el de las fracciones.

1.2. Teoría de las situaciones didácticas

Brousseau (1983), citado por Mercier y Salin (1999), sostiene que en una primera fase para que se dé el aprendizaje, el profesor debe seleccionar problemas donde el alumno debe actuar, reflexionar y evolucionar a su ritmo tratando de adaptarse a la situación y llegar a la solución él mismo; en este momento estamos en presencia de una situación denominada por él como **Situación A-didáctica**, la cual puede ser de tres tipos en función de los actores que intervienen en las acciones y las interacciones que se dan entre ellos:

a) **Acción:** intervienen el alumno y el medio, donde dada una situación problema, los alumnos ponen en juego sus saberes.

b) **Formulación:** intervienen los alumnos y se plantean supuestos en cuanto a la vía de solución del problema.

c) **Validación:** intervienen los alumnos y se tratan de convencer sobre la validez sus hipótesis.

En una segunda fase el docente intervendrá en la situación estableciendo la **institucionalización** del conocimiento donde se transformará el conocimiento aprendido en saber científico (sabio). Ésta es previamente establecida por los programas y planes del Estado.

Dentro de esta teoría se manejan conceptos tales como: fenómenos didácticos, obstáculos, errores, memoria didáctica, transposición didáctica, salto informacional, entre otros. Para efectos de esta investigación

se necesitó trabajar con el concepto de error, el cual se define como un conocimiento antiguo que funciona, no es desechado completamente, sino que queda integrado y valorado dentro de la nueva y más compleja visión que surge del aprendizaje. En esta dinámica se ponen en práctica conocimientos diferentes al saber sabio (científico), estos conocimientos son conocidos como errores.

Son diversas las tipologías de errores encontradas en la literatura, por la naturaleza de esta investigación se escogió la categorización realizada por Quevedo (1999), la cual se describe a continuación:

- Errores en el razonamiento: escogencia incorrecta de la estrategia o aplicación errada de la misma o deducción de conclusiones erradas
- Errores en el cálculo: errada utilización de algoritmos
- Errores semánticos: significado errado a conceptos matemáticos
- Errores sintácticos: utilización errada de símbolos matemáticos

1.3. La ingeniería didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió como metodología de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas en Francia en 1980. La misma se aplica a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y para guiar la experimentación en clase (Farfán, 1995).

Las etapas de la Ingeniería Didáctica son las siguientes:

1. Análisis preliminar: se refiere a los conocimientos teóricos didácticos generales y específicos del campo de estudio y al análisis de: la epistemología de los contenidos por enseñar, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje, las condiciones bajo las cuales se presentará la propuesta didáctica eficaz y los objetivos de la investigación, entre otros.

Los análisis se realizan bajo la dimensión epistemológica, didáctica y cognitiva.

2. Concepción y análisis a priori: esta fase constituye el diseño de la Ingeniería, la cual va a actuar sobre un determinado número de variables del sistema: variables macro-didácticas o globales y variables micro-didácticas o locales; las dos pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico, pero las segundas se refieren propiamente a la organización y la gestión de la secuencia de clase.

El análisis a priori es el momento donde el diseñador de la situación didáctica, antes de la clase, explicita supuestos referidos a: los procesos de enseñanza aprendizaje que se generarán en la situación y los resultados que desea producir: los probables y los seguros

3. Experimentación, análisis a posteriori y validación: la experimentación es el momento en el cual se ejecuta lo planificado en la Ingeniería. El análisis a posteriori consiste en analizar el conjunto de datos recogidos tales como las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes; se pueden complemen-

tar con cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas durante el momento de enseñanza. La validación de las hipótesis se realiza con la confrontación de los análisis: a priori a posteriori.

Desde el año 2001 está en proceso el diseño de una propuesta didáctica puesta en práctica para la enseñanza de las fracciones; estas situaciones están enmarcadas en una metodología de investigación denominada Ingeniería Didáctica propia de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1980). Este trabajo pretende validar la propuesta a través de un estudio cuasi-experimental, donde se comparan las representaciones externas de los estudiantes antes y después de aplicadas las situaciones diseñadas. A continuación se operacionalizan las variables consideradas en el mismo.

2. Operacionalización de variables

Para poder verificar el cumplimiento de los objetivos, las variables que los conforman se operacionalizaron de la siguiente manera:

Objetivo específico número 1: Caracterizar las interpretaciones iniciales referidas al concepto de fracción que tienen los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física (Cuadro 1).

Objetivo específico número 2: Determinar los resultados de aprendizajes obtenidos por los alumnos que ingresaron al primer semestre de 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, después de aplicada la propuesta didáctica.

En este caso el cuadro de operacionalización coincide con el cuadro número uno, pero en este caso la variable se define como: "Resultados de aprendizaje del concepto de fracción".

Objetivo específico número 3: Determinar la eficacia de la propuesta didáctica referida al concepto de fracción (Cuadro 2).

Objetivo específico número 4: Comparar las interpretaciones de los alumnos antes y después de aplicar la propuesta didáctica.

En este caso el cuadro de operacionalización es el mismo que el cuadro número uno, salvo la variable la cual es: "Interpretaciones iniciales y resultados de aprendizaje sobre el concepto de fracción".

3. Metodología

El diseño de investigación fue cuasi-experimental; la muestra para la aplicación de la propuesta didáctica fue no probabilista, elegida de manera intencional, pues estuvo constituida por 26 alumnos que ingresaron a la Licenciatura de Educación Mención Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, durante el 2004. Estos alumnos fueron sometidos a un diseño didáctico referido al concepto de fracción, el cual será descrito en el siguiente numeral.

Cuadro 1. Categorías referidas al primer objetivo específico

Variable	Categorías	Indicadores / Propiedades
Preconcepciones iniciales sobre el concepto de fracción	1. Interpretación del concepto de fracción como parte todo con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	2. Interpretación del con- cepto de fracción como re- parto con unidad continua	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	3. Interpretación del con- cepto de fracción como parte todo o reparto con unidad discreta (operador)	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	4. Interpretación del con- cepto de fracción como razón	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	5. Definición del concepto de fracciones equivalentes	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas.
	6. Definición del concepto de fracción	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	7. Definición del concepto de proporcionalidad	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	8. Propiedad del inverso multiplicativo	Cantidad de respuestas correctas e incorrectas. Calidad de la justificación
	9. Errores	Tipo Frecuencia

Cuadro 2. Categorías referidas al tercer objetivo específico

Variable	Categorías	Propiedades/Indicadores
Diseño de la propuesta didáctica	Competencia conceptual	Definir el concepto de fracción Definir el concepto de fracciones equivalentes Interpretar el concepto de fracción como: parte todo, reparto, razón Definir el concepto de proporcionalidad Propiedad del inverso multiplicativo
	Estrategias	Tormenta de ideas Técnica de la pregunta Resolución de problemas Comunicación interactiva (docente alumno)

Fuente: Ríos (2007).

Después de diseñada la propuesta, se procedió a construir el cuestionario (ver anexo) que permitió recoger la información de las interpretaciones iniciales respecto al concepto de fracción que poseían los alumnos que fueron sometidos a las situaciones didácticas. Este cuestionario fue nuevamente aplicado después de la aplicación de la propuesta didáctica para determinar los resultados de aprendizajes logrados por los alumnos. Las respuestas a todos los ítems fueron codificados con la siguiente escala ordinal: **0** no respondió, **1** respuesta incorrecta y **2** respuesta correcta.

Antes de aplicar el cuestionario, este fue validado por cuatro expertos en el área, y los resultados permitieron mejorar aspectos tales como: redacción, pertinencia y comprensión de los ítems, y coherencia entre objetivos específicos de la investigación, categorías e ítems.

4. Descripción de la propuesta didáctica

Algunos de los insumos que sirvieron para la elaboración de la propuesta didáctica referida al concepto de fracción, en parte fueron producto de una extensa revisión bibliográfica sobre el aprendizaje de las fracciones. En estas investigaciones se establecen diversos niveles de complejidad para los diversos contenidos de fracciones; por ejemplo: se establecen diferencias en cuanto al aprendizaje de las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, se muestra que la interpretación de fracción impropia es más compleja que la fracción propia, exhiben diversos niveles de comprensión en cuanto a las totalidades continuas y discretas, muestran que el significado del número decimal no es asociado a la fracción, explican que el significado de las fracciones equivalentes debe estar asociado a su representación gráfica, entre algunos resultados.

Otros de los insumos que se consideraron fueron las observaciones realizadas a maestros y profesores, que permitieron determinar el nivel de profundidad en que se trabajan diversos contenidos, las estrategias que se utilizan en el proceso, la secuencia en que trabajan los contenidos, entre otras cosas.

Además, se hicieron revisiones de textos y programas de Matemática de Educación Básica, para contrastarlo con el trabajo realizado por los maestros y profesores observados. Por otro lado, se consideró el programa de la asignatura Fundamentos de la Matemática.

Con toda esta información y la experiencia que se ha adquirido desde el año 1999 en el dictado de esta asignatura, se diseñó una propuesta didáctica, la cual quedó organizada de la siguiente manera: las fracciones como sistema notacional, interpretación como parte todo en unidades continuas y discretas, interpretación como reparto en unidades continuas y discretas, interpretación como operador, interpretación como razón, e interpretación como número decimal.

Para lograr esta secuencia en clase, se elaboró un guión de trabajo, el cual fue aplicado a 26 alumnos durante 6 semanas, recibiendo tres (3) sesiones semanales, donde cada una consto de tres (3) horas de 45 minutos cada una, es decir, 135 minutos.

Todas las clases estuvieron guiadas por las intervenciones de los alumnos en clase, para ello básicamente se utilizó la técnica de la pregunta, lluvia de ideas, discusiones grupales, trabajos individuales y la interacción docente alumno. Las actividades en su gran mayoría estaban dirigidas a incentivar la curiosidad y la creatividad de los estudiantes, cuando el contenido lo permitía se iniciaba con un problema (etapa de acción) para tratar de contextualizar y posteriormente pasar por las etapas que caracterizan las situaciones didácticas: formulación, validación e institucionalización. Los errores de los alumnos y los conflictos que se presentaron fueron utilizados como nuevas oportunidades de aprendizaje.

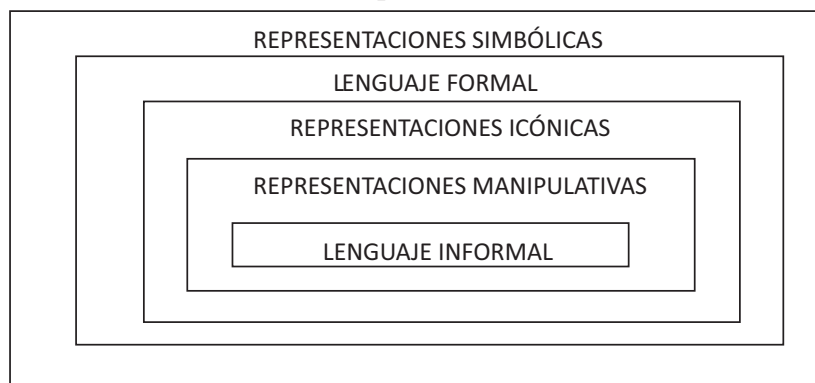
Es interesante observar que en las clase se presentaron situaciones tales como: las ideas aportadas por los alumnos complementan las dadas por el profesor, la intuición en un momento es un obstáculo y el profesor debe recurrir al formalismo matemático para darle significado algunos conceptos matemáticos, y los errores de los alumnos persisten aún y cuando el profesor había creído haberlas aclarado.

Otro elemento importante que se consideró en el diseño de la propuesta didáctica fue la comunicación. Se sabe que para poder comunicar las ideas matemáticas, hacemos uso de notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes. Este conjunto de gráficos, reglas o símbolos es lo que se denomina sistemas de representación o representaciones externas (Segovia y Rico, 1999).

Maza (1995) plantea una hipótesis con respecto al orden de dificultad en cuanto al uso de las representaciones externas, pero esto no quiere decir que son de naturaleza diferente (Gráfico 1). Esta secuencia a nuestro parecer se adecua al grado de accesibilidad al referente, es decir la transparencia que ofrece cada representación externa. El mayor grado de transparencia caracteriza a las representaciones en el lenguaje informal y la de menor transparencia corresponde a las representaciones simbólicas.

Esta investigaciones apega a esta hipótesis, utilizando todas las representaciones excepto las manipulativas, respetando esta secuencia donde se primero se trabajaron una interpretación natural del significado de las fracciones involucradas en la situación, posteriormente se realizaron gráficos para comprender los elementos involucrados y sus relaciones, luego a través del lenguaje formal se hizo una traducción de la situación analizada al lenguaje aritmético, y por último se generalizó a través del lenguaje algebraico.

Gráfico 1. Orden de complejidad en cuanto al uso de las representaciones



Fuente: Ríos (2008)

Otra categoría considerada en la elaboración de las situaciones didácticas, fue el carácter inductivo que tiene la construcción del conocimiento matemático; por tal motivo las experiencias diseñadas parten de casos particulares para tratar que se institucionalice el conocimiento matemático.

5. Estrategias para el análisis de los resultados, y descripción y análisis de los resultados

A continuación se presentan las estrategias utilizadas para analizar la información, así como los resultados con su respectivo análisis; para ello se consideran las siguientes categorías de análisis: diferenciación de los grupos antes y después de aplicada la propuesta didáctica, eficacia de la propuesta y análisis de los errores.

5.1. Diferenciación de los grupos antes y después de la aplicación de la propuesta didáctica

Después de calculada la razón crítica Z (Tabla 1), para determinar la diferenciación del grupo antes y después de la aplicación de la propuesta, se puede concluir lo siguiente: la muestra presentó diferencias significativas, con un nivel de significancia del 95%, entre las preconcepciones iniciales y los resultados de aprendizaje después de aplicada la propuesta, en las siguientes categorías: interpretación parte todo con unidad continua, interpretación reparto con unidad continua, interpretación parte todo o reparto con unidad discreta, fracciones equivalentes, definición de fracción, proporcionalidad e inverso multiplicativo; y no mostró diferencias significativas en la categoría referida a la representación como razón.

Tabla 1. Cálculo de la razón crítica z para el grupo antes y después de la aplicación de la propuesta didáctica

Categorías	Xa	S _{a,n-1}	Xd	S _{d,n-1}	Xa-Xd	Dx	Z
1. Interpretación del concepto de fracción como parte todo con unidad continua	6,35	2,64	11,65	0,85	5,3	2,71	1,96
2. Interpretación del concepto de fracción como reparto con unidad continua	2	1,2	3,65	0,63	1,65	0,87	1,88
3. Interpretación del concepto de fracción como parte todo o reparto con unidad discreta (operador)	1,96	1,78	3,96	0,2	2	0,95	2,11
4. Interpretación del concepto de fracción como razón	3,15	1,49	4,73	0,92	1,58	1,19	1,33
5. Definición del concepto de fracciones equivalentes	2,5	1,14	3,5	0,65	1	0,9	1,11
6. Definición del concepto de fracción	6,23	4,47	13,65	1,29	7,42	3,14	2,36
7. Definición del concepto de proporcionalidad	0,77	0,86	1,88	0,33	1,11	0,45	2,47
8. Propiedad del inverso multiplicativo	0,69	1,01	3,04	1,37	2,35	0,71	3,31

Fuente: Ríos (2007).

Donde:

Xa: media del grupo antes de aplicar la propuesta

S_{a,n-1}: desviación standard del grupo antes de aplicar la propuesta

Xd: media del grupo después de aplicar la propuesta

S_{d,n-1}: desviación standard del grupo después de aplicar la propuesta

Xa-Xd: diferencia de medias

Dx: coeficiente de desviación

Z: razón crítica calculada

A pesar que tanto la interpretación parte todo como la de reparto en unidades continuas obtuvieron un alto porcentaje de respuestas correctas, después de aplicar la propuesta, se observó que la interpretación como parte todo obtuvo mayor porcentaje de respuestas correctas (casi todo el grupo). De ahí, se confirma que la interpretación como parte todo es de un nivel de complejidad menor. Esto lo expresan las investigaciones realizadas por Hart (1980), La Unidad de Evaluación Permanente (A.P.U., 1980), Galloway y William (1975), Muangnapoe (1975, citados por Dickson y cols., 1991), en las cuales se obtuvieron los mismos resul-

tados, por lo que sugieren trabajar la interpretación parte todo antes que las demás interpretaciones.

Las interpretaciones como reparto y parte todo de unidades discretas fue dominada por todo el grupo, después de la aplicación de la propuesta. Por otro lado, se observó que muchos de los alumnos lograron entender la fracción en su interpretación como operador, pues se dieron cuenta que es lo mismo multiplicar y luego dividir, que primero dividir y luego multiplicar.

Con las fracciones equivalentes se lograron diferencias significativas. El salto cualitativo en cuanto a las respuestas de la definición de fracciones fue elevado, pues las respuestas al inicio eran ideas intuitivas; mientras que, al final las definiciones eran más formales. Llama la atención que a pesar de que en clase se trabajaron las interpretaciones como razón, parte todo y reparto, todas las respuestas hacen referencia a parte todo, como los resultados que se obtuvieron en los trabajos de Hart, A.P.U. y Maungnapoe, citados por Dickson y col. (1991).

Aunque no todos los alumnos lograron dominar las definiciones de proporcionalidad, después de la aplicación de la propuesta el porcentaje de respuestas aumenta considerablemente.

La definición de inverso multiplicativo fue dominada por casi todo el grupo después de la aplicación de la propuesta, mientras que al inicio nadie la expresó de forma correcta, en esta categoría hubo diferencias significativas.

5.2. Eficacia de la propuesta didáctica

Para determinar la eficacia de la propuesta sobre cada categoría, se determinó el porcentaje de respuestas correctas para cada uno. El criterio de decisión fue el siguiente: si el porcentaje es mayor al 70%, la propuesta eficaz sobre la categoría, en caso contrario no lo fue.

Después de determinar por cada categoría, el porcentaje de respuestas correctas (Tabla 2), obtuvieron porcentajes mayores de 70% en las siguientes categorías, siendo eficaz la propuesta didáctica en los mismos: interpretación como parte todo con unidad continua, interpretación como reparto con unidad continua, interpretación como parte todo o reparto con unidad discreta, interpretación como razón, fracciones equivalentes, definición de fracción e inverso multiplicativo.

A pesar de haber sido eficaz la propuesta didáctica para las categorías mencionadas en los párrafos anteriores, no hubo diferencia significativa en cuanto a los resultados de aprendizaje obtenidos por los alumnos, a la categoría referida a la interpretación como razón; es de hacer notar que en las respuestas asociadas a estas categorías los alumnos al inicio de la aplicación de la propuesta dieron respuestas correctas rudimentarias, es decir, sin la formalidad propia de la Matemática. Después de aplicada la propuesta, se observó que algunos alumnos lograron niveles de formalidad más próximos al saber sabio.

Tabla 2
Eficacia de propuesta didáctica

Categorías	Porcentajes de Respuestas Correctas por Ítems		Promedio de Porcentajes
	Item	Porcentaje	
1. Interpretación del concepto de fracción como parte todo con unidad continua	Item 1	96,15	95,51
	Item 2	96,15	
	Item 3	100	
	Item 4	96,15	
	Item 5	84,61	
	Item 8	100	
2. Interpretación del concepto de fracción como reparto con unidad continua	Item 6	73,08	82,69
	Item 7	92,3	
3. Interpretación del concepto de fracción como parte todo o reparto con unidad discreta (operador)	Item 9	96,15	98,08
	Item 10	100	
4. Interpretación del concepto de fracción como razón	Item 11	100	76,92
	Item 18 a	50	
	Item 18 b	80,77	
5. Definición del concepto de fracciones equivalentes	Item 13	96,15	96,15
6. Definición del concepto de fracción	Item 12	88,46	88,46
7. Definición del concepto de proporcionalidad	Item 14	69,23	65,53
	Item 15	61,53	
8. Propiedad del inverso multiplicativo	Item 16	92,3	92,3
	Item 17	92,3	

Fuente: Ríos (2007).

5.3. Análisis de los errores

Para determinar la eficacia de la propuesta didáctica sobre la disminución de la cantidad de errores cometidos por los estudiantes, se aplicaron dos procedimientos. Primero, se determinó para cada categoría el número de errores cometidos por el grupo, según la tipología: errores semánticos, sintácticos, y de cálculo; y por otro lado, se determinó la cantidad total de errores, de cada tipo, cometidos por el grupo.

Para determinar si la propuesta didáctica fue eficaz en cuanto a la disminución de errores por cada categoría, se utilizó el coeficiente de error (E). Este coeficiente permite determinar el porcentaje de disminución del error después de aplicada la propuesta didáctica, con respecto a

los errores cometidos antes de su aplicación. Para calcularlo se usó la siguiente fórmula: $E = (Ea - Ed) / Ea$, donde Ea , es la cantidad de errores antes de la aplicación de la propuesta, Ed es la cantidad de errores después de la aplicación de la propuesta.

Por ejemplo en el caso de la primera categoría “interpretación del concepto de fracción como parte todo con unidad continua” (Tabla 3), antes de aplicar la propuesta se cometieron 40 errores semánticos y después de aplicar la propuesta 5 errores; luego al calcular el coeficiente del

Tabla 3
Cálculo del coeficiente de error por categoría

Categoría	Ea			Ed			E		
	Ese	Esi	Ec	Ese	Esi	Ec	Ese	Esi	Ec
1. Interpretación del concepto de fracción como parte todo con unidad continua	40	0	1	5	0	0	0,88	0	1
2. Interpretación del concepto de fracción como reparto con unidad continua	13	18	X	0	14	X	1	0,22	X
3. Interpretación del concepto de fracción como parte todo o reparto con unidad discreta (operador)	8	2	2	0	0	0	1	1	1
4. Interpretación del concepto de fracción como razón	45	X	X	18	X	X	0,6	X	X
5. Definición del concepto de fracciones equivalentes	33	X	X	2	X	X	0,94	X	X
6. Definición del concepto de fracción	1	15	X	1	2	X	0	0,87	X
7. Definición del concepto de proporcionalidad	21	X	X	13	X	X	0,38	X	X
8. Propiedad del inverso multiplicativo	9	X	X	2	X	X	0,78	X	X

Fuente: Ríos (2007).

error resulta $35/40 = 7/8 = 0,875 = 87,5\%$, lo que significa que de los 100 errores semánticos que puedan cometer los alumnos, en esta categoría, al aplicar la propuesta didáctica es probable que desaparezcan 88 de estos errores, es decir, que la razón de los errores semánticos que pueden desaparecer ($E_a - E_d$) por la aplicación de la propuesta, con respecto a los posibles errores semánticos que se pueden cometer (E_a) en la primera categoría, es de 7:8. Así pues, se deduce que mientras más próximo esté E de 1, los errores en las categorías correspondientes tienden a desaparecer, pues los errores cometidos después de aplicada la propuesta se aproxima a cero.

Donde:

- Ea: errores del grupo antes de aplicar la propuesta
- Ed: errores del grupo después de aplicar la propuesta
- Ese: errores semánticos
- Esi: errores sintácticos
- Ec: errores de cálculo
- E: coeficiente de error
- X: no aplica el tipo de error para la categoría

Por lo explicado anteriormente, se justifica el siguiente criterio de decisión que permitió determinar si la propuesta didáctica es eficaz en cuanto a la disminución de los errores para cada una de las ocho categorías; a saber, si al hallar el coeficiente de error, este supera el 0,7, se señalará que la propuesta didáctica fue eficaz para la disminución de los errores en cada categoría, en caso contrario no fue eficaz.

La eficacia de la propuesta para la disminución de errores por categoría, para cada tipo de error se analiza a partir de los datos de la Tabla 3, y se resume en el siguiente cuadro:

Donde aparece la palabra SI, se observó que la propuesta didáctica fue eficaz para disminuir significativamente los errores en la categoría y en el tipo de error correspondiente; en donde aparece la palabra NO, se observó que la propuesta no fue eficaz, y donde aparece X, el tipo de error correspondiente no aplica a la categoría.

Después del cálculo del coeficiente del error para cada tipo de error (Tabla 4), se puede concluir que después de la aplicación de la propuesta, la disminución de los errores fue significativa para los errores de tipo sintáctico y de cálculo, y no así para los errores semánticos.

Análisis de los errores por categoría

Los errores semánticos en la categoría uno, interpretación como parte todo unidad continua, disminuye pues los alumnos aplican eficientemente esta interpretación para darle significado tanto a las fracciones propias e impropias.

Cuadro 3
Disminución de errores por categoría

Categorías	Error Semántico	Error Sintáctico	Error de Cálculo
1. Interpretación del concepto de fracción como parte todo con unidad continua	SI	X	SI
2. Interpretación del concepto de fracción como reparto con unidad continua	SI	NO	X
3. Interpretación del concepto de fracción como parte todo o reparto con unidad discreta (operador)	SI	SI	SI
4. Interpretación del concepto de fracción como razón	NO	X	X
5. Definición del concepto de fracciones equivalentes	SI	X	X
6. Definición del concepto de fracción	NO	SI	X
7. Definición del concepto de proporcionalidad	NO	X	X
8. Propiedad del inverso multiplicativo	SI	X	X

Fuente: Ríos (2007).

Los errores semánticos en la categoría dos, interpretación como reparto con unidad continua, disminuyen pues los alumnos aplican eficientemente la representación gráfica reparto, pero siguen las dificultades en dar respuestas con la simbología fraccionaria, pues se expresan en términos de pedazos.

Los errores semánticos, sintácticos y de cálculo la categoría tres, interpretación como parte todo o reparto con unidad discreta, disminuye pues la mayoría utiliza las dos interpretaciones, parte todo y reparto, para responder las preguntas.

El error semántico en la categoría cuatro, representación razón, no disminuye eficazmente pues a los alumnos se les dificultó identificar que parte representa un objeto de otro, cuando el primero es más grande que el segundo, es decir, persiste el problema con las fracciones impropias.

Los errores semánticos en la categoría cinco, fracciones equivalentes, disminuye pues casi todos los alumnos logran responder correctamente la definición de fracciones equivalentes.

Los errores sintácticos en la categoría seis, definición de fracción, son superados pues los alumnos son capaces de redactar una definición, en su gran mayoría asociada a la representación parte todo.

En la categoría siete, proporcionalidad, los errores semánticos no disminuyen pues aunque muchos responden correctamente, aumenta la cantidad de respuestas incorrectas con respecto al inicio de la propuesta.

En la categoría ocho, inverso multiplicativo, se superaron los errores semánticos pues para la gran mayoría la propiedad adquiere significado.

Por otro lado, a pesar de haberse observado muchos cambios cualitativos en las respuestas de los alumnos, aún cuando disminuyen los errores sintácticos y de cálculo, los errores semánticos persisten.

Para concluir, en la Tabla 3 se observa que para algunas categorías, el coeficiente del error es negativo, pues al haber más respuestas, aumentan, evidentemente, la cantidad de errores.

6. Conclusiones y recomendaciones

Después de haber analizado los resultados, se concluye lo siguiente:

1. Al observar las interpretaciones iniciales de los alumnos antes de la aplicación de la propuesta didáctica, se pudo observar que el grupo obtuvo un alto porcentaje de respuestas correctas, mayor de 70%, en una única categoría denominada traslación de representación simbólica a la representación verbal.

2. Al observar los resultados de aprendizaje de los alumnos después de la aplicación de la propuesta didáctica, se puede observar que el grupo obtuvo un alto porcentaje de respuestas correctas, mayor de 70%, en las categorías denominados: interpretación como parte todo con unidad continua, interpretación como reparto con unidad continua, interpretación como parte todo o reparto con unidad discreta, interpretación como razón, definición de fracciones equivalentes, definición de fracción, e inverso multiplicativo.

3. Al determinar la eficacia de la propuesta didáctica, además de reflejarse en un alto porcentajes de respuestas correctas en siete categorías, mencionados en la conclusión anterior, la eficacia también se traduce en cambios cualitativos tales como:

a) Comprensión de que la repartición del todo es en partes iguales y si se presentan varias unidades, la repartición es igual en cada una de ellas.

b) Eliminación de la concepción de que la característica que identifica que dos variables tienen una proporcionalidad directa o inversa, tiene relación con el crecimiento y decrecimiento de las mismas.

Por otro lado la baja eficacia de la propuesta didáctica, se observa en la poca destreza al: usar la interpretación como razón al comparar el tamaño de dos objetos.

4. Al comparar las interpretaciones de los alumnos antes y después de la aplicación de la propuesta didáctica, se observaron cambios tales como:

a) Antes de la aplicación los alumnos al tratar de hacer reparticiones gráficas, dividen las unidades en pedazos desiguales y al tener varias unidades las divisiones en cada una es diferente, estos errores son superados después de la aplicación

b) Antes de la aplicación algunos alumnos confunden el número mixto con el producto de un natural por una fracción, después de la aplicación no lo hacen.

c) Antes de la aplicación algunos alumnos no respetan la sintaxis del signo de igualdad; después de la aplicación esto persiste en pocos alumnos.

d) Antes de la aplicación hay un desconocimiento total de los conceptos de proporcionalidad e inverso multiplicativo; después de la aplicación muchos alumnos manejan estos conceptos.

e) Antes de la aplicación muchas de las justificaciones dadas por los alumnos se caracterizan por tener gráficos y operaciones aritméticas donde no se explicita la respuesta; después de la aplicación esto casi fue eliminado por completo.

5. Para el diseño de la propuesta didáctica el error es un insumo importante, por dos razones, por un lado los alumnos pueden retomarlos como oportunidades de aprendizaje y por otro, el docente puede usarlos como un indicador del proceso de aprendizaje del alumno, por lo que puede conducir la planificación de éste. Para el diseño de la propuesta del 2004 y para determinar la eficacia de la misma, los errores que cometieron los alumnos antes de ser sometidos a estas, constituyeron uno de los insumos principales para su diseño, porque gracias al cálculo del coeficiente del error, para varias categorías, se pudo determinar el grado de eficacia de las mismas para cada categoría.

Por otro lado, los resultados obtenidos en cuanto a la eficacia de la propuesta didáctica referida a las fracciones, permite hacer las siguientes recomendaciones:

1. Debido a la gran cantidad de información que se maneja en el contenido referido a las fracciones, se observó que las cuatro semanas no alcanzan para implementar las actividades planificadas. Por ejemplo no se trabajaron los porcentajes ni el ordenamiento de fracciones y no se profundizó en la representación gráfica de las fracciones en la recta real. Por tal motivo se recomienda que se reestructure la asignatura de Fundamentos de Matemática para trabajar el tema de los números racionales en mayor profundidad, pues como se mencionó en el planteamiento del problema, este tema se desarrolla en los programas de Matemática de Educación Básica desde tercer grado hasta octavo grado y los egresados

de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, deben formar a los alumnos de séptimo y octavo grado, en este tema.

Así mismo, por lo antes mencionado se deben reestructurar los programas de Matemática I y II de la Licenciatura en Educación, Mención Básica Integral, para que de igual manera los alumnos que egresen de ella, salgan preparados para formar a los alumnos de tercer a sexto grado, en este tema.

2. Debido a la baja eficacia de la propuesta en algunas categorías, se deben desarrollar situaciones didácticas que fortalezcan la utilización de otras interpretaciones (reparto, razón y expresión decimal) y la representación de fracciones en la recta real.

3. Aunque para algunas categorías la propuesta mostró eficacia en la disminución de errores semántico, sintáctico y de cálculo, para otros no la demostró, por lo cual se debe seguir profundizando en el diseño de la misma y buscar estrategias para minimizar estos errores. Por la teoría se sabe que los errores son provocados por obstáculos, pues bien se deben diseñar actividades para detectarlos y lograr que los alumnos tomen conciencia de ellos para que minimicen los errores.

Referencias Bibliográficas

- DICKSON, Linda, BROWN, Margare y GIBSON, Olwen (1991). **El aprendizaje de las matemáticas**; Editorial Labor S.A.; España.
- FARFÁN, Rosa (1995). **Ingeniería didáctica, un estudio de la variación y cambio**; Grupo Editorial Iberoamericano; México.
- MAZA, Carlos (1995). **Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales**; Primera Edición; México; Editorial Paidós; pp: 67-76; 119-130; 149-184.
- MAZA, Carlos (1999). **Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de las fracciones**; Revista Suma (31); 87-95.
- MERCIER, Alain y SALIN, Marie (1999). **Taller: El análisis a priori**; Material de apoyo de la V Escuela de Verano realizada en Francia 1988; Traducido por la Dra. Blanca Quevedo.
- QUEVEDO, Blanca (1998). **Teoría de las situaciones didácticas**; Doctorado de Ciencias Humanas de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia, Material de apoyo del Seminario: Didáctica de las Matemáticas.
- QUEVEDO, Blanca (1999). **El funcionamiento del error en el aprendizaje de las matemáticas**; Doctorado de Ciencias Humanas de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia; Material de apoyo del Seminario: Didáctica de las Matemáticas. Maracaibo, Venezuela.

RÍOS, Yaneth (2001). **Algunos elementos sobre la enseñanza de las fracciones**; Trabajo de ascenso para optar a la categoría de agregado de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad del Zulia. Venezuela.

SEGOVIA, Isidoro y RICO, Luis (1999). **Unidades didácticas. Organizadores**; Revista de Educación Matemática; Volumen 13; Número 2; pp. 83-104.