Epistemology of the Didactic Mathematical Knowledge: An Instructional Experience

Resumen

En este escrito discutimos qué aporta la reflexión epistemológica sobre el saber matemático escolar al profesor de matemáticas a través de una experiencia en un curso de maestría en Matemática Educativa. Esta discusión la llevaremos a cabo presentando el diseño y desarrollo del curso y mostrando algunas de las interacciones con los participantes a través de aspectos como la naturaleza de la discusión filosófica y epistemológica para entender la creación matemática, el aporte que la revisión histórica da a la epistemología del saber, el reconocimiento de la complejidad de la matemática y de la matemática escolar y el reconocimiento de la propia epistemología del profesor.

Palabras clave: *matemática escolar, epistemología, profesor de matemáticas*

Abstract

In this paper we discuss the contribution of an epistemological reflection on the mathematical knowledge to school mathematics teacher through an experience in a master's degree in mathematics education. This discussion will be through the presentation of the course design and its development and showing some of the interactions with the participants through aspects such as the nature of the philosophical and epistemological discussion to understand the mathematical creation, the contribution that gives the historical review epistemology of knowledge, the recognition of the complexity of mathematics and mathematics education and the recognition of the teacher's own epistemology.

Key words: *school mathematics, epistemology, mathematics teacher*

Epistemología del saber matemático escolar: una experiencia didáctica.

Gabriela Buendía Ábalos[1]
Javier Lezama Andalón[2]

1 Autora: Gabriela Buendía Ábalos
Nacionalidad: Mexicana
Grado: Doctorado
Especialización: Matemática Educativa
Adscripción: Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN.
Correo electrónico: gbuendia@ipn.mx

2 Autor: Javier Lezama Andalón
Nacionalidad: Mexicana
Grado: Doctorado
Especialización: Matemática Educativa
Adscripción: Programa de Matemática Educativa del CICATA-IPN
Correo electrónico: jlezamaipn@gmail.com

Fecha de recepción: 7 de marzo de 2012
Fecha de aceptación: 10 de agosto de 2012

Introducción

A la luz del problema de conocer, fundamentar y justificar el saber matemático, o dicho de otra manera, la creación matemática y por ende su epistemología, proponemos una discusión acerca de qué aporta la reflexión epistemológica específicamente sobre el saber matemático escolar al profesor de matemáticas en ejercicio. Para ello, utilizaremos un curso de maestría titulado *Epistemología del saber matemático escolar*. Se discutirá sobre su diseño y desarrollo, así como algunas interacciones de los participantes. A partir de esos elementos basamos la discusión propuesta.

El curso forma parte de la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa que ofrece el Programa de Matemática Educativa (PROME) del CICATA[1], el cual provee elementos para la profesionalización docente de profesores de matemáticas y forma investigadores especializados para enfrentar la problemática que plantea la incorporación de saberes matemáticos al sistema didáctico; en este sentido es que estaremos hablando del saber matemático escolar. Enfrentar dicha problemática conlleva cuestionar el discurso matemático escolar[2] prevaleciente, el cual incluye aquella matemática con la que se está trabajando en el aula; de ahí que resulte relevante, como parte del currículo de la maestría, examinar sus aspectos epistemológicos y brindar a los participantes —profesores en activo— herramientas teóricas para ello.

El curso inició con una breve introducción de corte filosófico en la que se plantea el origen, naturaleza y soluciones que se han dado al problema de conocer la realidad. Con ello, los estudiantes se ambientaron en el problema del curso — la epistemología del saber matemático escolar— incorporando un lenguaje y conceptos, nuevos para la mayoría; se reconoce también la vigencia del problema epistemológico en cualquier actividad cognoscitiva, específicamente en el campo de

---

1 Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

2 Entendemos al Discurso Matemático Escolar (DME) como la manifestación del conocimiento matemático, normada por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la enseñanza y lo que es la matemática.

la matemática educativa. La segunda fase del curso se enfocó en distinguir, en los objetos del discurso matemático escolar, su naturaleza epistemológica. En particular, nos propusimos discutir y distinguir los aspectos de un contenido particular de la matemática escolar registrados en la Historia y su Epistemología. Finalmente, en la última etapa del curso se abordó una de las "aplicaciones" de la reflexión epistemológica dentro de la matemática educativa: el concepto de obstáculo epistemológico; el objetivo fue reconocer la relevancia de este concepto en el estudio del discurso matemático escolar. Como conclusión del curso se solicitó un ensayo individual referido a qué aporta la reflexión epistemológica del saber matemático escolar, al desarrollo de la actividad como profesor o profesora de matemáticas.

A partir entonces del planteamiento y desarrollo de este curso, nos proponemos discutir lo que aporta una reflexión de corte epistemológico al profesor de matemáticas.

Acerca del PROME

Desde 2011, CICATA ofrece la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, un programa totalmente en línea que pretende contribuir a la profesionalización docente y a la formación de investigadores en matemática educativa. Su naturaleza en línea ha favorecido la incorporación de estudiantes de diferentes estados de la República Mexicana, así como de varios países de Latinoamérica. De acuerdo a Mariscal, Rosas y Sánchez (2008), además de las diferencias culturales y geográficas que presentan cada uno de los profesores inscritos en el PROME, estos también provienen de diferentes contextos laborales (diferentes niveles educativos, educación pública o privada, etc). Un requisito importante que deben cumplir los profesores que participan en el posgrado es ser profesores de matemáticas en activo, lo cual supone una cierta experiencia que siempre se verá reflejada, tanto en el tipo de actividades y tareas propuestas, como en las respuestas y reflexiones de los mismos participantes. La experiencia laboral de estos profesores puede ser diferente, variando de profesores "novatos" a aquellos con más de una década de experiencia frente a grupo. La formación matemática previa de los profesores también fluctúa desde profesores que poseen un entrenamiento básico en aritmética, geometría y álgebra, hasta profesores con conocimientos más amplios en áreas como análisis matemático, ecuaciones diferenciales y álgebra abstracta. Las edades de los profesores-estudiantes pueden variar entre 25 y 50 años.

Es importante mencionar que la naturaleza de estos cursos basados en el uso de Internet exige la aplicación y uso de un número de herramientas que contribuyen a la constitución de ambientes de aprendizaje y reflexión; por ejemplo: herramientas de comunicación sincrónicas y asincrónicas, diferentes tipos de archivos (audio, video, texto e imágenes), *software* matemático y no matemático, blogs, podcasts, páginas wiki, entre otros. Los cursos junto con algunas de las herramientas previamente mencionadas son colocados en plataformas de trabajo colaborativo en Internet; desde 2001, debido a una decisión institucional, se inició con el uso de la plataforma Moodle (Mariscal et al, 2008; Mariscal, 2009).

Descripción del curso Perspectivas Epistemológicas de las Matemáticas

El curso (figura 1) fue seguido por 19 estudiantes pertenecientes al segundo semestre de la Maestría; cuatro profesores del PROME estuvieron a cargo desde la conceptualización y el diseño académico del curso hasta su evaluación. El curso tuvo una duración de cinco semanas y como objetivo general se planteó el introducir al estudiante al reconocimiento del aspecto epistemológico del saber matemático escolar.

Mencionamos en la introducción que el curso se estructuró en tres grandes partes y un trabajo final; cada fase contaba con actividades y objetivos particulares. En las siguientes secciones, se describe cada parte y simultáneamente, iremos discutiendo sobre su aporte a la reflexión epistemológica de los profesores-estudiantes.

Parte I. Epistemología–Teoría del Conocimiento. Fundamento filosófico

El objetivo de la primera parte del curso fue reconocer la naturaleza de la reflexión epistemológica; se propusieron dos actividades.

Figura 1. Presentación del curso en la plataforma Moodle.

Actividad 1

Se propuso la lectura de tres capítulos de un texto de introducción a la filosofía (Ajdukiewicz, 1990). Organizados en seis equipos, los alumnos realizaron una presentación PowerPoint de la siguiente manera: equipos A1 y A2 presentaron el capítulo II titulado *El problema de la verdad;* equipos B1 y B2 presentaron el capítulo III, *Los problemas del origen del conocimiento*; equipos C1 y C2, capítulo IV *El problema de los límites del conocimiento.*

Estas presentaciones se organizaron en un Blog por equipo; el resto del grupo tenía la tarea de conocer el contenido de los capítulos que no les fueron asignados en la lectura inicial e interactuar con los equipos responsables.

Las lecturas son una introducción a la filosofía y a la epistemología, un área del conocimiento en la que los profesores de matemáticas han incursionado poco. Con esta actividad los profesores comienzan por reconocer la existencia de diferentes escuelas de pensamiento y su postura ante asuntos que suelen ser incuestionables, como *la verdad*. Es una discusión que presenta diferentes respuestas a qué es la verdad: un acuerdo o adecuación entre pensamiento y realidad o el acuerdo universal respecto a ella; la discusión puede ser tan profunda e intrincada como se desee, lo cual reconoce que no hay un saber sobre el que todo esté dicho. Con esta lectura resulta factible plantear un escenario donde sí importa el tipo de preguntas y justificaciones que uno es capaz de realizar: *una cosa es hacer algo bien y otra saber que se hizo bien* (Ajdukiewicz, 1990,p.34).

En este escenario, la lectura de Ajdukiewicz clarifica una diferencia que para los profesores, nos parece, resultará fundamental. Un problema psicológico aborda el cómo se forman los pensamientos en la mente humana, mientras que uno epistemológico aborda cómo podemos llegar al conocimiento verdadero. Esta discusión permite que el estudiante pueda darse cuenta de algunas características del saber matemático como que se trata de una creación y es falible; además, las matemáticas están sujetas a largos procesos de validación y este río de pensamiento es distinto al discurso escolar que pretende darse sobre esa matemática. Este tipo de confrontaciones es sin duda complejo de entender para el profesor de matemáticas y sin que el objetivo sea asimilarlas durante este curso, este sí pretende generar un marco de referencia en el que las diferentes naturalezas de lo que antes era una *única matemática* pudieran ser reconocidas.

Actividad 2

Se propuso la lectura del apéndice del material de Popper (1998) en el que se discuten dos problemas fundamentales de la epistemología. Posteriormente, este material fue discutido por parejas a través de un chat que fue grabado y entregado en la plataforma de trabajo como archivo de texto.

El carácter epistemológico del planteamiento de Popper lleva a establecer una clara diferencia con cuestiones de orden psicológico. En el contexto epistemológico no se pregunta cómo se descubren o surgen las afirmaciones científicas, sino que se pregunta por su fundamentación, su justificación y su validez. Al ser la epistemología "ciencia de la ciencia" no tiene que ver con los métodos que utiliza la ciencia, sino con la fundamentación de dichos métodos. Esta distinción, nos parece, posibilita que el profesor reconozca en la epistemología herramientas que le permitan enriquecer su propio saber matemático y, desde ahí, su práctica en el aula.

En resumen, esta parte introductoria del curso aporta elementos de iniciación para la reflexión de corte epistemológico que se busca generar en los participantes. Se abre la posibilidad de plantear preguntas sobre cómo justificar, cómo conocer o cómo fundamentar aquella matemática que se enseña en el aula; por ejemplo, ¿podemos confiar en las matemáticas que sabemos? ¿En qué sentido hay creación matemática en la escuela? ¿Por qué el saber matemático que me sirve en la escuela, puede servir en la vida? ¿Cómo se que lo que hago es o no es matemática?

Estamos, entonces, introduciendo al profesor a la reflexión de que toda matemática —incluyendo la escolar— tiene una epistemología.

Parte II. La epistemología en la Matemática Educativa

El objetivo planteado para la segunda parte del curso fue que el profesor-alumno distinguiera estudios del saber matemático escolar de corte histórico de aquellos de corte epistemológico; aunque ambos informan acerca de cómo se construye algún saber matemático, las pregunta histórica y epistemológica son distintas, el énfasis y el aporte son diferentes. Bachelard (2000) menciona que el historiador de la ciencia debe tomar las ideas como hecho, mientras que el epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamientos. Un hecho mal interpretado por una época sigue siendo un hecho para el historiador.

Se tomó el caso del Binomio de Newton y se realizaron lecturas tanto de carácter histórico como epistemológico. Se desglosan a continuación las cuatro actividades propuestas:

Actividad 1

Elaboración de un ensayo individual con título: "Cuéntame lo que sabes del Binomio de Newton"

Actividad 2

Elaboración de una página Wiki en equipos de 3 o 4 estudiantes, sobre la historia de Newton y su binomio.

Estas primeras dos actividades buscaban retomar aquello que el profesor supiera sobre el binomio, tanto desde su experiencia docente (estrategias didácticas, problemas que enfrenta, cómo lo usa), como en su propia experiencia como alumno de matemáticas (cómo se lo enseñaron, para qué considera que sirve). Para la revisión histórica, se solicitó consultar fuentes históricas para obtener datos sobre Newton, el paradigma científico de su época y su propuesta sobre el binomio; al ser un trabajo en equipo, la diversidad de fuentes consultadas era un elemento valioso y al mismo tiempo, de fácil acceso. Estas primeras dos actividades, entonces, explicitan el saber cotidiano y el conjunto de hechos históricos sobre el binomio de Newton.

Actividad 3

Lecturas sobre el binomio de Newton (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 1995).

La elección de estas lecturas es para establecer un contraste de lo que comúnmente se sabe sobre el binomio de Newton y lo que un enfoque fuertemente apoyado en preguntas de corte epistemológico señala al respecto. Este contraste al que se enfrentarán los profesores aporta a su reflexión y cuestiona el quehacer de un profesor de matemáticas.

Esta confrontación la establecen los propios autores, Cantoral y Farfán: ¿Por qué Newton escribió por vez primera su binomio como $(P + PQ)^{m/n}$ y no como $(a + b)^n$? Esta última expresión es como actualmente vive el binomio en el sistema educativo mundial; se tiene entonces el siguiente desarrollo que contrasta con el propuesto por Newton:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}P^{\frac{m}{n}}Q^2 + \frac{m}{n}\frac{m-n}{2n}\frac{m-2n}{3n}P^{\frac{m}{n}}Q^3 + etc.$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Las expresiones, aunque equivalentes matemáticamente, son conceptualmente distintas. Cantoral y Farfán señalan que una lectura ingenua de la cuestión nos haría creer que se trata solo de un asunto de la notación propia de la época, pero se trata de una verdadera concepción alternativa del binomio, que se apoya en una epistemología sensiblemente diferente de la que hoy enseñamos en clase.

Para sostener esa idea, los autores desarrollan un estudio centrado en los paradigmas vigentes de la época: un programa alternativo en el campo de la ciencia con el que se buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático. La idea básica es que con la predicción de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, es posible anunciar, anticipar su estado ulterior.

Los autores proponen el siguiente ejemplo en el que supongamos que B es una magnitud dada que depende de *P* en una relación: $B(P) = P^2$. Imaginemos que P evoluciona incrementándose por un pequeño pedazo de *P*; $P + PQ$ estaría refiriéndose a P + un incremento de P (Q es menor que la unidad). ¿Quién sería entonces *B* después del flujo de *P*?

La respuesta sería $(P+PQ)^2 = P^2 + 2P^2Q + P^2Q^2 = P^2(1 + 2Q + Q^2)$ y la extensión necesaria del resultado anterior estaría dada por la expresión $(P+PQ)^{m/n}$ .El objeto matemático, binomio de Newton, se presenta como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que precisan de la predicción. Este aporte socioepistemológico[3] contrasta con el utilitarismo que la escuela propone para el binomio al relacionarlo con los llamados productos notables: un algoritmo para multiplicar binomios más rápido.

En una revisión de corte histórico, la socioepistemología utiliza técnicas de investigación epistemológica donde esta es entendida como la revisión de circunstancias involucradas en la generación de conocimiento matemático. Así, la búsqueda histórico-epistemológica implica no solo la relatoría de hechos históricos, sino de aquellas circunstancias socio-culturales que los rodean. Es una búsqueda del hacer del hombre, en tanto ente social generando y usando el saber matemático en cuestión.

Como apoyo para profundizar esta mirada sociológica a la historia, la Actividad 3 consideró también la lectura de Espinoza y Cantoral (2010), quienes proponen estudiar la obra matemática antigua por medio de tres ejes; la triangulación de estos tres aspectos es lo que permite construir una explicación sociocultural del significado de la obra estudiada:

a) Una producción con historia. La obra debe ser entendida como perteneciente a una época, a un ser humano con sus propias ideas germinales y sus medios de significación. El tipo de datos que se busca es el relacionado con la vida personal del autor, su familia, su formación y episodios relevantes de su vida; también su vida profesional, su carrera académica, la relación con sus colegas y sus intereses académicos. Además importa el contexto sociopolítico de la producción y los problemas abordados por la ciencia de su época.
b) Un objeto de difusión. Toda obra matemática tiene una intencionalidad de difusión intrínseca: busca difundir algo a alguien; hay diferencias entre una intención didáctica o una intenciona-

3 Este es el nombre que recibe la aproximación teórica en la que se fundamentan los autores. Para la Socioepistemología resulta básica la idea de que los grupos humanos construyen conocimiento a través de las prácticas socialmente compartidas en las que se involucran. Como otras fuentes puede consultarse Buendía y Cordero, 2005; Buendía, 2006.

lidad de difusión científica. En la revisión es entonces necesario considerar no solo al autor, sino a los destinatarios de la obra, el tipo de producción, las condiciones del medio de difusión y la institución publicadora.

c) Parte de una expresión intelectual global. Una obra antigua es una expresión intelectual que pertenece a una secuencia de ideas y evoluciona en la totalidad de las obras del autor e incluso de su comunidad científica, académica o social. Para ello, se estudia la obra matemática con una mirada general de las obras más relevantes del autor y se estudian las obras relacionadas con la obra. Esto incluye tomar en cuenta correspondencias con otros matemáticos y ensayos de corte epistemológico y/o metafísico del autor.

En su conjunto, las lecturas de la Actividad 3 pretenden retornar al análisis del concepto matemático en sus orígenes, pero con una nueva visión. Producto de tales interpretaciones, menciona Cantoral (2001), se puede proveer al profesor de nuevas maneras de mirar enriqueciendo su reflexión epistemológica.

Actividad 4

Discusión en foros por equipo sobre Newton y su binomio. La introducción que se planteó para este Foro fue la siguiente:

> Como alumnos de matemáticas y como profesores, sabemos "algo" del binomio del Newton; incluso, como algunos mostraron en sus ensayos, podemos aplicar estrategias didácticas para probar su validez. La historia, por otra parte, enriquece nuestro conocimiento sobre Newton y su binomio; no solo datos anecdóticos sobre el autor, sino datos y hechos históricos que lo sitúan como una de las grandes mentes en el desarrollo del pensamiento científico. Sin embargo, ¿será que la historia solo nutre nuestra cultura general y la de nuestros estudiantes? Sin duda nos aporta datos sobre el desarrollo de un tópico matemático, pero tratemos de profundizar en ese aporte y cuestionemos su aporte epistemológico.

Revisen las wikis de todos los equipos para complementar la información histórica que hallaron entre todos. En los foros de discusión, comentaremos acerca de:

1) Newton escribió originalmente su binomio en la forma *(P+PQ)* y hoy, el discurso matemático escolar suele usar la forma *(x + y)* o con alguna otra literal. Lo mismo ocurre cuando el exponente era presentado en forma fraccionaria. Las lecturas que realizaron nos informan acerca de que esa diferencia no es solo cuestión de simplificar la notación o de adecuarla a la notación "de hoy", sino de los significados subyacentes. Discute con tu equipo esos significados subyacentes, entendiéndolos sobre todo como parte de un contexto socio-histórico-cultural en el cual tienen sentido
2) Reconociendo la historia del binomio de Newton, y no solo la forma institucionalizada en la escuela, ¿qué consideras que a ti, como profesor, te aporta la historia como disciplina científica?

En síntesis, esta segunda parte del curso buscó distinguir, coloquialmente, que no es lo mismo considerar al *Binomio de Newton* que a *Newton y su binomio*; esto es, considerar aspectos socioepistemológicos del saber reconoce al hombre haciendo matemáticas y no solo la producción matemática que logra.

Parte III. El obstáculo epistemológico

Un aspecto que consideramos fundamental en la formación los egresados del programa de maestría en matemática educativa es que logren percibir que aquello que se enseña —matemáticas— es problemático en sí mismo. Esto es, no basta con la intención para ser un buen profesor de matemáticas o bien, el no-entendimiento de los alumnos pudiera deberse a algo más que a una falta de concentración. Bachelard (2000) menciona que es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es en ese acto donde el autor muestra causas de estancamiento y hasta de retroceso, donde se disciernen causas de inercia que llama obstáculos epistemológicos.

La principal actividad de esta etapa consistió en leer y discutir en un foro por equipos, el artículo de Moru titulado *Talking with the literature on epistemological obstacles* (Moru, 2007). Este artículo relata la experiencia de la autora al realizar su investigación doctoral; ella estaba inicialmente interesada en investigar sobre los obstáculos con los que los alumnos de nivel superior se topan al estudiar la noción de límite de funciones. Sin embargo, al revisar la literatura pronto se percató que en la enseñanza de las matemáticas hay diferentes tipos de obstáculos; existen aquellos ocasionados por el desarrollo personal del estudiante o por razones didácticas (como el privilegiar ciertos ejemplos), pero también hay obstáculos debidos a la propia naturaleza —compleja— del concepto matemático involucrado, los epistemológicos.

El artículo va revisando, a través de la experiencia de la doctorante, la noción de obstáculo epistemológico; resulta especialmente ilustrativo cuando retoma y reflexiona sobre el comentario de Brousseau acerca de que un obstáculo epistemológico no puede ser evitado en el transcurso de la enseñanza y, es más, ni siquiera es aconsejable evitarlo debido a su rol en el proceso formativo del alumno. En este escrito resulta evidente, pues así lo explicita la autora, cómo la matemática —como saber sabio— es de una naturaleza totalmente distinta a la matemática escolar; así, por ejemplo, el uso de ciertos términos (como "reach" o "attain", en el caso de su investigación sobre el límite de las funciones) que los matemáticos pueden acordar usar sin problema, suelen causar problemas no triviales al ingresar al aula. Nos parece que esta reflexión es útil para la formación de nuestros propios alumnos-profesores ya que además, desde ahí se puede entender también los diferentes roles que, como egresados de una maestría, pudieran llegar a jugar:

> (…) As a mathematics teacher, my focus was more on procedures or methods that have to be applied in solving mathematical task to achieve correct answers. As a researcher, my understanding of what constitutes teaching mathematics now goes beyond paying attention to meth-

> ods or procedures used in obtaining the correct answers. In my teaching, I now see myself as having a dual role, that is, being a teacher and a researcher (p. 37).

Como parte de este foro de discusión, se les pidió a los participantes proponer un ejemplo de obstáculo epistemológico que hayan observado en sus estudiantes. Sin duda, se preveía cierto conflicto para distinguir entre obstáculos de origen didáctico o psicológico de los de corte epistemológico. Sin embargo, estando ya en la tercera fase del curso se esperaba contar con mayores herramientas teóricas para llevar a cabo la discusión y distinción.

A manera de ilustración, se presentan algunos extractos de este último foro de discusión. Cabe recordar que en la plataforma *Moodle* estos foros tienen cierto formato y secuenciación, además de ser asíncronos[4]; entre una intervención y otra median por lo menos un par de horas, aunque al ser un foro con un periodo explícito y corto de tiempo —tres días— las intervenciones no suelen espaciarse más de 12 horas.

Para fines de claridad en el manejo de los extractos, en este escrito se presentan como diálogos. Los nombres de los estudiantes cuyas respuestas se presentan se han escrito solo con sus iniciales *(R, M, Z)*; la docente se identifica con ***G***. En todo caso, se respeta la redacción y ortografía originales del foro. La pregunta a discutir fue:

> En la página 35 de Moru (2007) se mencionan tres tipos de obstáculos epistemológicos que se encuentran en el trabajo de Bachelard. ¿Has identificado alguno de este tipo de obstáculos en tu práctica docente?

Extracto 1

En este extracto, la participante *R* retoma los conflictos que Moru discutió en su artículo y se siente identificada desde lo que a ella le ocurre en su propia práctica docente: los límites también a ella *le cuesta trabajo enseñarlos*. Si bien es cierto que se reconoce la coincidencia do-

4 Los foros de discusión se presentan en ventanas o hilos de discusión. Para más información puede consultarse la página oficial http://moodle.org/

cente, es también el reconocimiento explícito de que el tema límite es complejo; es traer a la reflexión docente la naturaleza de ese saber.

Un poco más adelante, cuando propone otros ejemplos de obstáculos epistemológicos, lo hace en función de temas de matemáticas que *cuestan mucho trabajo* a los alumnos. La intervención del docente intenta que *R* profundice en aquello que es identificado como *difícil* para cuestionar en qué consistiría dicha dificultad. Este extracto ilustrativo del foro de discusión lo terminamos cuando *R* refina su argumento inicial para identificar en la naturaleza de los números negativos la fuente de dicha dificultad; esto es, *R* comienza a cuestionar aquello que se suele enseñar de manera transparente.

> **R:** *Buenas noches. La tendencia a basarse en experiencias intuitivas aparentes la he observado precisamente en el estudio de límites; a mí también me cuesta trabajo enseñar este tema y solamente veo la noción intuitiva de límite; doy los teoremas de límites y resolvemos ejercicios. Para explicar el tema doy el ejemplo del conejo que quiere llegar a la zanahoria y en cada salto se acerca la mitad de la distancia, la pregunta es ¿el conejo alcanzará la zanahoria? Algunos alumnos dicen que sí, otros que no y al final quedamos en que nunca va alcanzar la zanahoria.*
>
> *Otros temas en donde me baso en la noción intuitiva son en composición de funciones y en el tema de derivada. En el caso de límites creo que la tendencia a generalizar es cuando no analizo las funciones y solo me concreto a enseñar los algoritmos para determinar si existe o no el límite. Con respecto al lenguaje, son importantes los significados de las palabras utilizadas en las definiciones, por ejemplo lo infinitamente grande e infinitamente pequeño. No sabía que las palabras "reach" y "attain" fueran motivo de una ardua investigación. . . o ¿el límite es alcanzado o no?*
>
> **G:** *Hola R. En alguna investigación leí que, con relación al ejemplo del conejo, los alumnos contestan: "Bueno, en la realidad sí la alcanza; pero en matemáticas no".*
> *Es un contraste entre la realidad que enfrenta el estudiante con la abstracción que le pide la matemática. ¿Cómo ves?*

R: *Hola maestra G. La lectura de Moru me ha ayudado mucho a comprender más a los alumnos, me ha ayudado a mí porque como la autora menciona en un principio, su tema era muy amplio y tenía que delimitarlo, tal como nos sucedió a muchos de nosotros al elegir nuestro tema de investigación; por otro lado, también me llama mucho la atención que efectivamente algunos temas matemáticos por su naturaleza misma son complicados de explicar y de entender. . . Con respecto al ejemplo del conejo, sí lo he dado pero tal vez no he sido muy observadora con los comentarios y puntos de vista de los alumnos y puedo decir que termino imponiendo mis ideas concluyendo que el conejo no alcanzará la zanahoria. . . Como usted menciona en matemáticas debe darse la abstracción y eso cuesta mucho trabajo.*

Como obstáculos epistemológicos, también puedo mencionar los números racionales; en la recta numérica, muchos de los alumnos no ubican cuáles son los valores mayores y cuáles los menores (cuando les pregunto si el 0 es mayor o el -1 hay diferentes respuestas) y como consecuencia al momento de dar el dominio y rango de una función no lo encuentran correctamente. . . La graficación de funciones también cuesta mucho trabajo, la resolución de problemas, demostraciones, etc.

G: *Hola R. La cuestión de que algún tema cueste mucho trabajo, como señalas en tu última línea, no necesariamente involucra algún obstáculo epistemológico.*
Ahora, la cuestión de la recta numérica y el obstáculo epistemológico, ¿será cuestión de la representación recta? O el obstáculo epistemológico tendrá que ver con la confrontación entre el sentido innato de algo "mayor que" y "menor que" con la naturaleza de los números negativos?

R: *Buenas noches doctora G. Gracias por sus observaciones, creo que ya me está quedando más claro el obstáculo epistemológico. Con respecto a la recta numérica, la cual se enseña desde la primaria, en el NMS la utilizamos para determinar dominio y rango de una función entre otras; yo creo que el problema está ligado con la naturaleza de los números negativos, tal vez desde el momento en que una suma aritmética da como resultado un valor negativo. ¿Es esto correcto? Saludos*

Extracto 2

En esta ilustración, Z comenta en el foro su ejemplo sobre obstáculo epistemológico. Ella lo hace con base al obstáculo del lenguaje natural que menciona Moru en su artículo y tanto en su ejemplo inicial como en la intervención última se perciben elementos de su propia epistemología; esto es, cómo ella justifica y argumenta acerca de lo que considera un obstáculo para sus alumnos. La intervención de la docente intenta profundizar en esta reflexión para distinguir asuntos de corte didáctico de los de corte epistemológico; *Z* cierra esta ilustración cambiando su ejemplo aunque no necesariamente —como se verá más adelante— profundiza en asuntos epistemológicos.

> **Z:** *Buen día, compañeros. En mi caso les voy a hablar sobre el obstáculo del lenguaje pero en álgebra, cuando decimos la palabra "Se Cancela la X" al tener por ejemplo x/x y ellos creen que la palabra cancelar es sinónimo de cero, por lo tanto su respuesta a este tipo de ejercicios es cero.*
> **G:** *Hola Z. Y, ¿en qué sentido consideras que ese ejemplo es un obstáculo epistemológico? ¿No podría ser didáctico? Esto es, causado por el tipo de explicaciones (uso de lenguaje en este caso) del profesor. Saludos*
>
> **Z:** *Buen día profesora. Analizando lo que me comenta tiene razón, no medité bien. Propongo entonces el siguiente ejemplo en cuanto a la Tendencia a confiar en las experiencias engañosas:*
> *lim 3/0 = 0 dado que se basa en lim 0/3 = 0*

Esta ilustración la dejamos aquí, pues en la siguiente sección, donde retomaremos elementos del curso para la discusión sobre la reflexión epistemológica de los profesores, se vuelve a retomar el foro en el que participa *Z*.

Discusión

En cada una de las secciones del curso fuimos señalando y comentando acerca de aquellos elementos de corte epistemológico que nos parecieron relevantes ante lo que involucra el quehacer de un profesor de matemáticas en ejercicio. A lo largo del curso, los profesores muestran sus visiones y supuestos acerca de la matemática y en particular, de la matemática que enseñan; estos son producto de su experiencia docente y de sus inquietudes personales.

En su formación académica, un profesor de matemáticas puede no haber entrado en contacto nunca con asuntos de corte filosófico o epistemológico, por lo que como punto de partida resultó fundamental conocer la existencia de corrientes de pensamiento como el empirismo o el positivismo que sin duda, influyen en la generación de la obra matemática y en la matemática escolar. Este contacto plantea un escenario mucho más amplio y rico para los profesores en el que la matemática misma puede ser cuestionada y resulta factible el planteamiento de preguntas —junto con sus posibles múltiples respuestas— sobre el problema de conocer, fundamentar y justificar ese saber matemático.

Después de la breve introducción con las lecturas de corte filosófico y epistemológico, el curso se centró en un objeto concreto de la matemática escolar, el binomio de Newton. A partir de reconocer la naturaleza social de aquella matemática que se enseña, el profesor puede valorar el papel de la historia y su revisión epistemológica. Esta forma de abordaje histórico impresionó mucho a los profesores, ya que además de que la escuela mexicana está radicalmente alejada de la historia, para los profesores resultó impactante la distancia entre el planteamiento de Newton, lo que la escuela les ha enseñado y lo que ellos mismos, mejor dicho, nosotros como profesores enseñamos. Es importante enfatizar que no se trata necesariamente de repetir la historia en el aula actual, sino de reconocer las circunstancias que en su momento significaron al saber matemático y que no evolucionan necesariamente en lo que hoy significa al saber matemático escolar. De esta manera, no se trata de renegar la matemática escolar actual, sino de reconocer que existen epistemologías subyacentes.

Finalmente, reconocer la naturaleza epistemológica de la matemática que se enseña y reconocer que es factible cuestionarla desde cómo se conoce, se fundamenta y se justifica dicho saber solo así, los obstáculos epistemológicos que enfrenta todo aprendiz de matemáticas pueden ser reconocidos y valorados. En primera instancia, se reconoce el valor que un obstáculo epistemológico aporta a la didáctica en cuanto a que es un conocimiento en sí mismo, útil y coherente en un cierto momento, pero que necesita ser superado —por impreciso o provisorio, por ejemplo— para continuar avanzando; de ahí que el papel como profesor no puede remitirse a *enseñar bien* pretendiendo evitar esos obstáculos. Es factible reconocer que la complejidad en la enseñanza de las matemáticas recae no solo en el profesor o el alumno, sino en el propio saber con el que se está trabajando.

Hemos elegido el siguiente extracto para cerrar la discusión. Es parte del último foro de discusión en el que los profesores-alumnos están discutiendo sobre sus ejemplos de obstáculos epistemológicos. Además de hablar de sus experiencias didácticas, retoman algunas de las herramientas que este curso intentó brindarles. Las intervenciones de la docente buscan explicitar aún más todos aquellos elementos de corte epistemológico con los que se trabajó en el curso y resulta notorio que, efectivamente, algunos de los alumnos incorporan dicha reflexión a su quehacer.

Extracto 3

En este momento del foro, *M* comparte sus experiencias, Z es la misma alumna del extracto 2. El alumno M plantea su ejemplo de obstáculo epistemológico ocasionado por el lenguaje natural. Como hemos venido señalando, los profesores intervienen desde su cotidiano y en este ejemplo, el tratamiento de la probabilidad y la estadística da un giro desde el punto de vista epistemológico muy importante pues su epistemología es muy distinta de la matemática del cálculo o el álgebra; el lenguaje juega un papel distinto. Esto nos muestra que en el pensamiento de los profesores hay un continuo que no les permite distinguir con facilidad los matices epistemológicos; por ello consideramos que esta reflexión debe ser parte formativa de un profesor de matemáticas al incursionar en un proceso de profesionalización y tanto más, en su formación como investigador.

A la luz de la discusión sobre el lenguaje, la docente *G* retoma algunas de las lecturas realizadas para puntualizar y apoyar la reflexión; nótese cómo *Z* va modificando su propia reflexión —que continúa del extracto dos— acerca de qué es un obstáculo epistemológico y finalmente, ella cierra el foro de discusión reflexionando sobre el binomio de Newton.

M*: En mi poca experiencia eh batallado con los obstáculos causados por el lenguaje natural, principalmente en la materia de Probabilidad y Estadística, por ejemplo, cuando se pide obtener la media armónica y que este resultado sea expresado con 4 decimales, el alumno solo lee hasta media… así que a lo demás no le ponen atención, pero cuando se les entrega sus exámenes y se les retroalimenta se dan cuenta que no finalizaron correctamente el problema o que no realizaron la instrucción adecuadamente, ya que unos obtuvieron únicamente la media, otros leyeron hasta obtener la media armónica, pero no realizaron la instrucción completa de expresarla con 4 decimales. Otro ejemplo muy común es cuando se usan frases como: "no más de, al menos, menos de, hasta, inclusive, y, o, cuando mucho". En esta asignatura tengo un índice alto de reprobación y en gran medida se lo atribuyo a este tipo de problemas.*

G: *Hola M, pero no entiendo en qué sentido el no leer bien una instrucción lo asocias con un obstáculo epistemológico.*

M*: No propiamente el leer bien una instrucción, sino el hecho de que cuando ven en el problema la palabra "media" solo se enfocan a resolverlo (robotizando su proceso). Creo que están acostumbrados a resolver el problema pero sin identificar que es lo que se les pide, la experiencia de materias anteriores tal vez los lleve a únicamente enfocarse a dar un resultado utilizando los datos que estén a la mano. Asocio el obstáculo epistemológico con* *la limitación o el impedimento que afectan con los alumnos para construir este conocimiento en particular.*

Z: *En mi caso sucede lo mismo cuando veo técnicas de conteo y si no aparece la palabras "grupo, comité, etc." u "orden, fila" no pueden identificar si se usará combinaciones o permutaciones. Considero que lo anterior se debe a que aprenden un concepto de manera general y no quieren utilizar su razonamiento para extrapolarlo a situaciones diferentes, inclusive de la vida real.*

G: *Hola M. En un comentario anterior también decías que asocias el obstáculo con la limitación o impedimento que afecta a los alumnos; eso efectivamente podría caracterizar qué es un obstáculo. El punto es que al hablar de obstáculo epistemológico esa caracterización no es suficiente. El mismo artículo que leíste empieza por ahí: es una caracterización demasiado amplia.*
Analizar no solo la limitación o impedimento, sino el tipo de *limitación o impedimento es lo que lleva a ver si es epistemológico o no. Te recuerdo que puede haber obstáculos de corte cognitivo, didáctico, psicológico...*
Robotizar un proceso, como mencionas, poco tendría que ver con la naturaleza del saber en cuestión, o retomando algunas cosas discutidas en este curso, con la manera de conocer (referida a algún saber matemático). Eso es un obstáculo quizá más de corte cognitivo (por aquello de la tendencia a generar heurísticas) o quizá didáctico (la manera como el profesor/sistema educativo enseña).

G: *Hola Z. Sigo dudando en qué sentido ese "abuso del lenguaje" da pie a un obstáculo epistemológico. En este caso, pareciera una estrategia por parte del alumno (y yo creo que del profesor) asociar una palabra con el reconocimiento del tipo de combinatoria involucrada. Si pienso en la naturaleza del saber matemático involucrado o en "cómo conocer", ¿por qué ese abuso del lenguaje genera un obstáculo epistemológico?*
Una cuestión que me gustaría aclarar —en general, para todos— es que por ejemplo, el uso del lenguaje natural no es que sea en sí un obstáculo epistemológico, sino que ese uso suele generar o evidenciar obstáculos epistemo-

lógicos al analizar cómo se conoce (científicamente) lo que se conoce. Como menciona Sierpinska, puede ocasionar una manera errónea de conocer. ¡Saludos!

Z: *Buen día profesora. Le comento que siguiendo los comentarios que le hizo al compañero M y leyendo de nuevo la lectura y analizando el por qué en la primera etapa estuvimos hablando sobre el binomio de Newton, empezó a tener sentido lo que es un obstáculo epistemológico, explicando a mi manera:*

En la antigüedad surgen los conocimientos matemáticos dado una situación problemática, como lo es el binomio de Newton, las derivadas, e integrales, etc. con el tiempo ese conocimiento sufre ciertos cambios debido a la transposición didáctica y se adapta a la escuela en donde muchas veces se pierde el sentido de lo que dio origen a ese conocimiento, convirtiéndose en algunos casos en un obstáculo epistemológico, por ejemplo el ver a la derivada únicamente como área bajo la curva complicando la existencia de los alumnos cuando les hablas de una razón de cambio instantánea siendo que lo que le dio origen fueron problemas físicos en distintas situaciones.
Por otro lado, creo (a lo mejor estoy errada) que para dar ejemplos de este tipo de obstáculos, hay que llegar a concocer más sobre la epistemología de los conocimientos matemáticos, es decir, cómo fueron las situaciones de antaño que dieron pie a la generación de esos conocimientos.

Comentarios finales

Como un programa que pretende contribuir a la profesionalización docente y a la formación de investigadores en Matemática Educativa, uno de nuestros objetivos en generar un campo disciplinar para el profesor de matemáticas que ingresa al programa. En él, el profesor es un profesional preocupado y ocupado, crítico y propositivo; en ese sentido, es que la epistemología del saber matemático escolar puede contribuir a su preparación.

A manera de conclusión primaria, pues ahora es necesario analizar cuidadosamente las producciones de los participantes en este curso, podemos señalar que el diseño y desarrollo de este curso ha favorecido la reflexión epistemológica de los profesores de matemáticas en los siguientes aspectos. El primero, con relación al reconocimiento de escuelas de pensamiento para entender la creación matemática y la factibilidad de cuestionar el saber matemático. Se evidenció el contraste que puede existir entre los planteamientos originales relativos a ciertos saberes matemáticos con lo que hoy se enseña —enseñamos— el aula, lo cual se evidenció al reconocer el aporte que la revisión histórica da a la epistemología del saber. Esto va forjando el reconocimiento de la complejidad de la matemática y de la matemática escolar y ante ello, se vuelve trascedente el reconocimiento de la propia epistemología del profesor. En su conjunto, consideramos que estos aspectos lejos de dar respuestas inmediatas que simplifiquen la problemática que enfrenta un docente de matemáticas en su aula, sí aportan elementos hacia una reflexión sistemática de corte epistemológico —que se nutrirá de aquéllas de corte cognitivo o didáctico propias de otros momentos de la maestría— que nos sitúan a los participantes en un campo disciplinar interactivo y propositivo.

El siguiente extracto puede ilustrar, de manera resumida, el potencial que una discusión de corte epistemológico podría tener para enriquecer el quehacer docente. Este comentario de *Z* fue en respuesta a una observación del docente *G* con relación a que la historia —y no solo un recuento histórico— puede darnos luz para reconocer y entender un obstáculo epistemológico que se presente en nuestra aula. Además, concluye *G*, será necesario consultar aquellas investigaciones que ya han reportado obstáculos epistemológicos incluyendo alternativas para pasar por ellos con éxito.

> **Z:** *Hola Profesora. (…) Como bien comenta entonces además de una revisión histórica es necesario hacer revisiones a las investigaciones que ya han reportado la observación de obstáculos epistemológicos, y con mayor razón, sabiendo que estas investigaciones reportan cómo superarlos, puesto que, definitivamente existen los obstáculos epistemológicos en el quehacer docente, es indispensable saber cómo tratarlos e inclusive adelantarnos a ellos de ser*

posible, será una de las cosas que nos van a ayudar como docentes a educar en matemáticas. Saludos afectuosos.

Referencias

Ajdukiewicz, K. *Introducción a la Filosofía: Epistemología y metafísica*, México: Publicaciones Cultural, S.A. de C.V., 1990.

Bachelard, G. *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. 23ª. Edición. México: Siglo Veintiuno editores, 2000.

Buendía, G. y Cordero, F. "Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study", en: *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer publishers. Volumen 58, número 3, 2005, 299-333.

Buendía, G. "Una Socioepistemología del aspecto periódico de las funciones". *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 9 (2), 2006, pp. 227-251.

Cantoral, R. y Farfán, R. "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis". *Epsilon*, Revista de la SAEM "Thales", 42, 1998, pp. 353-369.

Cantoral, R. "Acerca de contribuciones de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Tayor". *Mathesis*, 11, 1995, pp. 55-101.

Espinoza, L. y Cantoral, R. "Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange", en: Lestón, P. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 23. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., 2010, pp. 889-898. Disponible en: http://www.clame.org.mx/alme.htm.

Mariscal, E.; Rosas, A y Sánchez, M. Programa de matemática educativa en línea del CICATA-IPN, en: P. Lestón (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 21. CLAME, 2008.

Mariscal, E. "Gestión en el posgrado en línea de Matemática Educativa en el IPN". *Apertura*, 9(10), 34-41. Universidad de Guadalajara, 2009.

Moru, E. K. "Talking with the literature on epistemological obstacles". *For the Learning of Mathematics*, 27(3), 2007, pp. 34-37.

Popper, K. *Los dos problemas fundamentales de la epistemología: basado en manuscritos de los años 1930-1933*, (M.A. Albisu, Trad.). (T. Eggers, Ed.) Madrid: Editorial Tecnos S.A., 1998. (Trabajo original publicado en 1993).