Mundo Siglo XXI, revista del CIECAS-IPN
ISSN 1870-2872, Núm. 32, Vol. IX, 2014, pp. 79-87

Regiones factibles y óptimas del Iso-Beneficio del Consumidor[α]

Fernando Miranda Torrado* / María Ramos Escamilla**

Fecha de recepción: 20/06/2013; **Fecha de aprobación:** 11/11/2013

Resumen: En este artículo presentamos la modelación de variables endógenas y exógenas del crecimiento en la tasa de consumo de los bienes, insumos y productos de economías de supuesto equilibrio preferencial. Desarrollamos la maximización del beneficio en la renta, el dinero y las elecciones posibles del consumidor racional a través de la interpolación de los precios de mercado que tienen como característica esencial la NO linealidad en su valor real por las tres variables técnicas que son el tiempo, el espacio y el trabajo.

Palabras clave:
- Localidad
- Vector de actividad
- Utilidad proporcional
- Hiperplano
- Semiespacio

Feasible and optimal regions of Iso-Profit to consumer

Abstract: This paper presents the modeling of endogenous and exogenous growth rate of consumption of goods, inputs and outputs balance economies of course preferred. We develop profit maximization in income, money and the possible choices of the rational consumer through interpolation market prices having essentially the nonlinearity of its actual value by the three technical variables that are time, space and work.

Keywords:
- City
- vector activity
- Proportional Income
- hyperplane
- half space

Clasificación JEL: O14,C63

[α] Los autores agradecen el apoyo otorgado por CONACyT y la SEPI-ESE-IPN (México), así como del Posgrado e Investigación de la USC (España).

* Universidad de Santiago de Compostela/ Departamento de Economía Cuantitativa, Rua Burgo de las Naciones, s/n.15782. Santiago de Compostela, España.
** Universidad de Santiago de Compostela/ Departamento de Economía Cuantitativa, Rua Burgo de las Naciones, s/n.15782. Santiago de Compostela, España.

1. Introducción

Un agente económico acepta la entrega de una cantidad determinada de un bien. El producto de la cantidad y el precio es un número real. Este número será llamado el monto pagado por el agente. Para ligar los concepto precedentes de precio con la noción usual de un monto de dinero pagado cundo y donde el bien es disponible, uno debe de introducir el concepto y precio en una fecha determinada, en un lugar específico. La cantidad de una clase especifica de un bien es expresada por un número que puede satisfactoriamente ser asumido de ser cualquier número real no negativo. Lo que es disponible a un agente económico es llamado un recurso para él, y lo que es puesto a disposición por un agente económico es un producto. Para algunos agentes económicos, los recursos serán representados por números reales no negativos para los productos.

2. Maximización de la tasa de crecimiento del consumidor

El modelo fractal de expansión tecnológica para las matrices *(A, B)* resuelven el problema de encontrar un m-vector semipositivo*(x)* y un número a tal que:

$\boldsymbol{\alpha}$ es un máximo , sujeto a:

$$x\,\boldsymbol{B} \geq \boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A} \qquad (1)$$

Si el máximo valor de *a* existe es llamado la tasa tecnológica de expansión del modelo y está denotada por $^{\alpha}{}_{0}$. El vector correspondiente x_0 es llamado el vector de óptima intensidad. Teorema. Para los modelos que satisfacen las suposiciones I y II $\boldsymbol{\alpha}_0$existe y es positivo. Prueba. Para cada número positivo $\boldsymbol{\alpha}$ considere el problema de encontrar una solución semipositiva*x* a la desigualdad.

$$x(B - {}_{\alpha}A) \geq 0 \qquad (2)$$

Ahora, para $\boldsymbol{\alpha}$ suficientemente pequeña la desigualdad tiene una solución. Si *X*es positivo de la suposición I tenemos que *x B* es positivo, por lo tanto $xB \geq \alpha\, xA$ para algún número positivo $\boldsymbol{\alpha}$. Por otro lado para $\boldsymbol{\alpha}$ muy grande la desigualdad no tiene solución. Podemos escoger $\boldsymbol{\alpha}$ tan grande que la suma de las coordenadas en cada fila de $(B - {}_{\alpha x}A)$ es negativa. Esto es:

$$(B - {}_{\alpha x}A\,) < 0 \qquad (3)$$

Donde *v* es el vector unitario en R^n y dado que $x \geq 0$

$$x(B - {}_{\alpha}A) < 0 \qquad (4)$$

Este modelo no estudia los bienes como tales sino sus características o preferencias en relación a ellas. En su versión más sencilla, supone que cada bien posee unas características que se consideran medibles en proporciones fijas y las características se encuentran en los bienes en forma proporcional. El vector b_j tiene todas las propiedades analíticas de un vector de actividad.[1] Si reunimos todos los vectores b_j en una matriz *B* que llamamos matriz tecnológica del consumo,[2] obtenemos la matriz básica del modelo. Suponga que tenemos *r* características distintas y *n* bienes distintos. La matriz *B* será entonces de orden *r x n*. La relación entre *r&n* puede ser cualquiera pero se supone que generalmente $r < n$. Sea *z* el vector de características *&x* el de bienes. Tenemos así el modelo:

$$Z = B_x \qquad (5)$$

En este modelo, suponemos que las características vienen asociadas de un modo esencialmente positivo con los bienes, de forma que *B* es semipositiva.

$$max\boldsymbol{\mu}\,(z) \qquad (6)$$

Sujeto a:

$$Z = B_x P_x \leq k \qquad x \geq 0 \qquad (7)$$

Se puede sustituir *Z* en $\boldsymbol{\mu}$ ***(Z)***y tendremos el conjunto de programas:

$$\max\boldsymbol{\mu}\,(B_x)$$

Sujeto a:

$$p_x \leq k$$

$$x \geq 0 \qquad (8)$$

[1] Variedades de dimensión par: Definido por una estructura casi-compleja como una aplicación J (diferenciable) que a cada vector tangente le asocia otro vector tangente de modo que *J° J = J2 = -id*. Las variedades kählerianas son las más ricas de entre éstas. En particular, *R2n = R3n* es kähleriana. Variedades de dimensión impar: Definido por una estructura casi-contacto como la dada por una aplicación Ã (diferenciable) entre campos vectoriales, por un campo vectorial » y por una 1-forma ´ tales que: (1) Ã2(*X*) = ¡*X*+´(*X*)», para cualquier campo *X,* y (2) ´(») = 1.

[2] Cuando la matriz es estimada es graficada contra *n*, ésta puede aproximar asintóticamente a un valor constante *(umbral)* o puede incrementarse sin límites, conforme se incremente *n*. Los precios de las acciones sin límites sugieren que la variación está dándose en un rango continuo de escalas de tiempo. Tanto el margen, como el costo transitivo, con un umbral finito como los límites, pueden ser analizados en una gráfica log-ln.

Como "la función de utilidad es particular para cada consumidor, tenemos un conjunto de programas".[3] Como todos los consumidores se enfrentan a los mismos precios, el conjunto de características alcanzables.

$$z = \{Z\ I\ Z.=B_x, P_x \leq k, x \geq 0\} \qquad (9)$$

Es un conjunto convexo cerrado y acotado que será el mismo para todos los consumidores sólo que vendrá afectado en cada caso por un multiplicador escalar, *k* que representa a la renta. Puede considerarse que la elección del consumidor consta de dos fases:

a.- La elección de eficiencia que es la misma para todos los consumidores.

b.- La elección personal que será aquella en la que cada individuo elija entre los puntos del subconjunto eficiente aquel que personalmente prefiera.

En términos económicos, "la programación no lineal puede ser escrita como el análisis de problemas de maximización restringida en los cuales la disminución o incremento no lineales de escala pueden estar presentes".[4] En lugar de representar la relación de beneficio por una expresión lineal simple tal como $5x + 3y + 7z$, podemos usar la notación funcional general:

$$\text{El ahorro total} = f(x, y, z) \qquad (10)$$

Esta notación establece simplemente que el ahorro o la variable que se emplee es dependiente de las tres producciones. Notaciones similares son usadas para las restricciones, de tal forma que la programación no lineal puede ser escrita en las tres partes esenciales.

Función objetivo:

$$\max f(x, y, z)$$

Sujeto a restricciones:

$$g_i(x,y,z) \leq C_1$$

$$g_j(x,y,z) \leq C_2$$

$$g_m(x,y,z) \leq C_m \qquad (11)$$

Requerimientos de no negatividad:

$$x \geq 0\ ,\ Y \geq 0\ ,\ z \geq 0 \qquad (12)$$

3. El beneficio económico esperado

Para mostrar cómo un problema no lineal puede ser interpretado en un problema económico considere el caso donde los beneficios[5] $P_x \& P_y$ de $x \& y$ son fijos digamos $P_x = 5y\ P_y = 3$. Suponga sin embargo, que debido a la resistencia del consumidor a incrementar sus ventas, los beneficios unitarios de z, P_z caen continuamente tanto como más de este bien es ofrecido en venta de acuerdo con una relación lineal simple.

$$P_z = 200 - 0.005\ z \qquad (13)$$

Que establece que cada vez que otras cien unidades son ofrecidas en venta, el precio cae cinco centavos. Sustituyendo esta expresión por P_z dentro de la función objetivo tenemos:[6] Beneficio total $= P_x(X) + P_y\ (Y) + P_z\ (Z)$

$$= 5_x + 3_y + (200 - 0.005_z)\ z$$

$$= 5_x + 3_y + 200 - 0.005z^2 \qquad (14)$$

La frontera entre los puntos de región factible y aquellos que representan la producción que no satisface la desigualdad, está dada por el requerimiento de que la igualdad se da en la restricción, $x^2 + y^2 \leq 1$. Esto es:

$$y = (1 - x^2) \qquad (15)$$

Cualquier punto de esta ecuación representa una combinación de $x \& y$. Las desigualdades no lineales,

[3] Peter Vokuhl, *La programación lineal*, Editorial Remest, México, 1994, p.125.

[4] Luis Leithol, *Matemáticas previas al cálculo*, Editorial Harla, México, 1999, p. 87.

[5] Así, a luz del tiempo y tras el paso de los ciclos, son pocos los agentes que en el largo plazo efectivamente logran retener beneficios del mercado financiero de la economía, pero a pesar de este riesgo, el interés en participar en él es creciente. Este modelo puede ser visto como una extensión de Gleick ,quien planea tres niveles de probar la eficiencia del mercado:
Contraste débil: razona que los precios actuales reflejan toda la información histórica, concluyéndose la imposibilidad de lograr excesivos rendimientos.
Contraste fuerte: considera que los precios actuales reflejan toda la información en forma instantánea, disponible o no para el público *(mercado con información promediativa o agregativa)*.
Contraste semi-fuerte: asume que los precios actuales de los valores reflejan plenamente toda la información públicamente disponible.

[6] Note que esta expresión contiene a z^2, de tal forma que ya no es lineal aun cuando la función original era lineal.

trazan una región factible, tal como lo hacen las desigualdades lineales. Sin embargo, cuando las restricciones son no lineales, las fronteras de la región factible se convertirán en curvas. Lo mismo que sucede para dos dimensiones sucede para más de dos dimensiones siendo necesario en el caso de las funciones no-lineales asegurar la convexidad en una función no lineal. En el caso de la no linealidad no hay correspondencia entre bases y puntos extremos, la selección óptima se alcanza de dos formas:

a) Intersección entre función objetivo y región factible opuesta (convexo-cóncava*)*.

b) Intersección entre función objetivo y región factible similar *(cóncavo-cóncavo, convexo-convexo)*.

Lo anterior se da hasta donde lo dispongan las restricciones disponibles. En ambos casos si existe solución factible básica, única, es óptima. Puede darse el caso de que no se intersecten la función objetivo y la región factible no existiendo solución óptima. En su forma básica el problema envuelve los siguientes pasos:

a) Tome cada una de las restricciones y traslade todos los términos a en una sola orilla de la ecuación.

i. e. $\quad x + y = 5$

Como

$$x + y - 5 = 0 \qquad (1)$$

b) Multiplique cada una de las restricciones por una variable cuyo valor es no especificado siendo esta variable el multiplicador de Lagrange

$$i.e.\lambda \quad (x + y - 5) = 0 \qquad (17)$$

c) Sume juntas todas las restricciones *(cada una de ellas multiplicada por su propio multiplicador de Lagrange)* y entonces adicione esta suma a la función objetivo. Esta suma es llamada la expresión lagrangiana. Esto es, si el problema es maximizar $x^2 + 3xy + z$ sujeto a:

$$x + y = 5$$

$$xz = 10 \qquad (18)$$

La expresión lagrangiana es:

$$x^2 + 3xy + z + \lambda_1 (x + y - 5) + \lambda_2 (xz - 10) \qquad (19)$$

Donde λ_1, λ_2 son dos multiplicadores de Lagrange diferentes. Nosotros podemos ahora establecer el teorema central de la teoría de los multiplicadores de Lagrange que asevera que, en una amplia clase de problemas, cualesquiera valores de *x, y, z* que maximizan el valor de la función objetivo sujeta a las restricciones establecidas también maximiza la expresión lagrangiana *(no restringida)* y viceversa.

O sea que podemos resolver el problema original de maximización restringido o podemos resolver un problema totalmente diferente de maximizar el valor de la expresión lagrangiana que no envolverá restricciones. Donde $\mu(x)$ es la función de utilidad y μ^0 es un nivel de utilidad dado. Esta restricción no exige que las derivadas sean continuas. Suponga que el consumidor toma los precios p^* como un dato y escoge la combinación de bienes x^* que le proporciona un nivel de utilidad.

$$\mu(x^*) = \mu^0 \qquad (20)$$

4. Elección, renta y dinero

Cuando los precios cambian y pasan a ser p^{**} ajustamos la renta del consumidor de tal modo que el nuevo conjunto de bienes elegidos x^{**} produzca el mismo nivel de utilidad original μ^0.

El criterio de elección es que $x^*\&x^{**}$ minimizan $p^*x\&p^{**}x$ respectivamente para todo $x \varepsilon S$.

Sea: $\quad M^* = p^*x \text{ y } M^{**} = p^{**}x \qquad (21)$

Sea el hiperplano H definido por $p^*x = M^*$. Dicho hiperplano divide el espacio de los bienes en dos semiespacios:

$$H^+ = \{x \text{ I } p^*x \geq M^*\}$$

$$H^- = \{x \text{ I } p^*x < M^*\} \qquad (22)$$

Ahora bien, ningún punto de S puede pertenecer al interior de H^-, ya que de existir un punto tal podremos encontrar algún $m < M^*$ de manera que hubiese un punto de S en el conjunto $\{x \text{ I } p^*x < m\}$ en contra de la hipótesis de minimización a través de M^*. Como $x^{**} \varepsilon S$, $x^{**} \varepsilon H^+$ *y, v,* $x^{**} = x^*$, *v,* x^{**} pertenece al interior de H^+. Por lo anterior tenemos que: $x^{**} < x^*$

$$p^*x^{**} > M^* = p^*x^* \qquad (23)$$

Podemos razonar del mismo modo para el hiperplano

$$H' = \{x \text{ I } p^{**}x = M^{**}\} \qquad (24)$$

Con lo que S pertenece al semiespacio positivo. Tenemos así que:

$$x^{**} = x^{*} \qquad (25)$$

$$p^{**}x^{*} > M^{**} = p^{**}x^{**} \qquad (26)$$

Ahora bien, un conjunto estrictamente convexo puede tener más de un hiperplano a través de un punto, por lo que no hay razón suficiente para excluir el caso en que $x^{**} = x^{*}$.

Suponga que sólo se da este caso cuando $H = H'$ (*lo cual es posible si los precios cambian proporcionalmente*) hipótesis menos restrictiva que suponer que todas las derivadas primeras existen y son continuas. Podemos escribir nuestras dos desigualdades como:

$$P^{**}x^{**} - P^{**}x^{*} < 0$$

$$-P^{*}x^{**} + P^{*}x^{*} < 0 \qquad (27)$$

Sumándolas obtenemos el teorema de sustitución generalizado.

$$(p^{**} - p^{*})(x^{**} - x^{*}) < 0 \qquad (28)$$

Si sólo cambia el precio del j-iésimo bien, tenemos el efecto sustitución ordinario para cambios en el propio precio.

$$\Delta pj^{*}.\ \Delta xj^{*} < 0 \qquad (29)$$

"La teoría generalizada de la producción se puede analizar a través de la teoría de conjuntos pudiendo establecerse más localmente y a un mayor nivel de generalidad".[7] Un vector arbitrario Y puede ser posible o imposible bajo las condiciones técnicas existentes.

El conjunto de producción contiene todas las combinaciones de factores y productos que son posibles técnicamente. Una producción Y es análoga a una actividad en el caso lineal con las siguientes diferencias: a) No se supone que ky sea necesariamente posible aunque lo sea Y. b) No suponemos que $yj + y^k$ debe ser necesariamente posible aunque tanto yj como y^k lo sean.

Los módulos no lineales, satisfacen las siguientes propiedades: a) $y \cap \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$*(no es posible obtener productos sin utilizar factores)*; b) $Y \cap (-y) = 0$*(irreversibilidad)*;c) $Y' \varepsilon Y$, $y\ \boldsymbol{\varepsilon Y}$, es factible $y \leq y'$*(es posible derrochar producción)*, y d) Si no hay interacción entre los procesos productivos:

$$y^{i} + y^{j}\ \boldsymbol{\varepsilon}\ Y \text{®} y^{i} + y^{j}\ \varepsilon\ Y \qquad (30)$$

Los rendimientos de escala,[8] pueden diferenciarse para el caso general del siguiente modo: El conjunto de producción Y presenta rendimiento de escala decrecientes, constantes o crecientes. De acuerdo a lo anterior, si el conjunto de producción es aditivo y presenta rendimiento de escala constante o decreciente es convexo. Un ejemplo puede ser la función de producción Cobb-Douglas: $x = cLa\ k^{1-a}$ que se puede expresar:

$$y = \{y_1, y_2, y_3 \mid y_1 \leq c\,(-y_2)^a(-y_3)^{1-a},\ y_1, -y_2, -y_3 \geq 0\} \qquad (31)$$

Donde $y_1 = x$, y_2 $-L$, $y_3 = -k$ y el conjunto Y el satisface las propiedades anteriores. Para hablar de modelos de crecimiento óptimo en economía, es necesario definir el concepto de optimalidad en economía. Considere la economía $E = \{ (xp), (yj)\}$ dados dos estados $E_1\ \{(x_1)\ (Y_1)\ \}$, $E_2\ \{(x_2)\ (Y_2)\ \}$, el segundo se dice que al menos es mejor que el primero si $\{(x_1)\ (Y_1)\ \} \leq \{(x_2)\ (Y_2)\ \}$ lo mismo sucede para el conjunto de la economía, la interpretación económica es que cada consumidor y productor desean su consumo y producción en el segundo estado, mejor o igual que en el primero. En cualquier economía las elecciones deben hacerse entre provisiones para el presente *(consumo)*, y provisiones para el futuro *(acumulación de capital)*.Una vez que este juicio ha sido hecho, nos encontramos con el problema de seleccionar un camino de crecimiento óptimo, esto es el problema central de esta parte: el crecimiento económico óptimo.

Estas *(m+n)* acciones no son necesariamente compatibles con los recursos totales, la notación de equilibrio está relacionada con todos los anteriores conceptos.[9] Así, un estado de la economía es una *(m+n)* tupla $(x_i),(Y_j)$ de puntos de R^k puede ser representada por un punto de R^k $(m+n)$, finalmente tenemos: Una economía E está definida por: Para cada $i = (1,2,..., n)$ existe un subconjunto no vacío

7 Novosolov, *Несоответствиекапитализма*, Edit. Moscú, Rusia, 1992, p. 265.

8 Desde el punto de vista económico, para un proceso productivo, es la cantidad de outputs que se obtienen en una unidad de tiempo determinada. Dentro de este contexto, podría traducirse como sinónimo de productividad haciendo referencia a la relación *inputs/outputs* referidos a la misma unidad de tiempo o, mejor dicho, a los productos obtenidos en el empleo de un factor de producción.

9 Parte alícuota del capital social de una sociedad mercantil que puede ser nominativa o al portador, y estar total o parcialmente desembolsada. Se clasifican en series según los derechos que otorgan y su valor nominal. En general, da derecho a una parte proporcional en el reparto de beneficios y a una cuota de liquidación en la disolución de la sociedad.

x_j de R^k ordenado por preferencias. Para cada $j = (1, 2,. . ., m)$ existe un subconjunto no vacío Y_j de R^k. Así, un estado de la economía es una $(m + n)$ tupla de puntos de R^k. Una vez definida la economía pasaremos al estado de otros conceptos necesarios para la definición de estabilidad. Dado un estado $\{(x_i), (y_j)\}$ de E, el punto x-y es llamado la demanda neta. Así x-y describe el resultado neto de los agentes de la economía juntos. Dado un estado $\{(x_i), (y_j)\}$ de E, el punto x-y=r es denotado Z y constituye el exceso de demanda, en todos los aspectos económicos sobre los recursos totales. Un estado E de la economía se dice que se encuentra estable si su exceso de demanda es cero (0):

Lo anterior puede ser expresado en términos matemáticos como:

$$x - y = z \qquad (32)$$

Lo que quiere decir que la demanda neta de todos los agentes iguala a los recursos. Ahora enfocaremos el estudio a las economías privadas donde los consumidores son propietarios de los recursos y del control de los productores, así, el i-ésimo consumidor recibe el valor de sus recursos ri y las cuotas $\boldsymbol{\Theta}_{il}, \ldots, \boldsymbol{\Theta}_{in}$, del beneficio de i al n productos. El número $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$ es interpretado como la fracción del capital de i-ésimo productor que le pertenece. Una descripción completa de una economía privada es: Para cada consumidor, su conjunto de consumo x_i ordenados por preferencia, sus recursos r_i y su participación $\boldsymbol{\Theta}_{ij}$ junto con sus productores y su producción. Defina ahora $\boldsymbol{\Pi}$ **(p)** de la siguiente forma: Sean $\{y_i, y_j, y_n\}$ puntos del conjunto de producción dado el precio p.

$$\text{Seleccione:} \qquad \max pyj = \boldsymbol{\Pi} \qquad (33)$$

En otras palabras y maximiza el beneficio total si y solo si pyj maximiza el beneficio en el conjunto de producción o sea que:

$$\boldsymbol{\Pi}\ (\mathbf{p}) = \max py \qquad (34)$$

Considere ahora una economía privada $\hat{E}$ donde el precio de sistema es p, y el j-ésimo productor trata de maximizar su beneficio en y_j. Suponga que Y_j lo hace, así el beneficio $\boldsymbol{\Pi}_j = pyj$ es distribuido entre los accionistas. De esta forma la riqueza del i-ésimo consumidor es:

$$r_i = P_{ri} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\Theta}_{ij} \boldsymbol{\Pi}_j \ (P) \qquad (35)$$

El consumidor trata de satisfacer sus preferencias en x_i sujeto a las restricciones de riqueza; suponga que x_i satisface las preferencias sujeto a las restricciones. Si las acciones x_i, y_j satisfacen la igualdad de estabilidad x-y=r. La economía se encuentra estable. Así, una economía privada $\hat{E} = \{(x_i), (y_j), (r_p), (\boldsymbol{\Theta}_{ij})\}$, se encuentra estable si:

Para todo i :a) x_i es cerrado, convexo y tiene una cota inferior; b) No existe saciedad de consumo,, y c) Existe x_i tal que $x_i^o < r_i$

Para todo j: a) 0 ε y_j;b) Y es cerrado y convexo; c) La producción es irreversible, y d) No hay posibilidad de producción libre.

Analicemos ahora el modelo lineal de expansión de Von Newman, respecto a la noción de estabilidad en la economía.

El modelo describe una economía caracterizada por funciones de producción lineales en los cuales las producciones sirven sólo como materia prima para producciones futuras. Analizaremos desde otro punto de vista la estabilidad; se observa que un cambio en el precio total de todos los bienes no afecta el comportamiento de la economía, sin embargo, el cambio de uno o varios de ellos genera una fuerza que afecta el precio total y el equilibrio.[10] Sea una función de utilidad $\boldsymbol{\mu(x)}$, sujeta a precios estables para ofertas fijas.

Suponga que:

$$\max\ \boldsymbol{\mu}_1(x_1) + \mu_2(x_2) + \ldots + \ldots \boldsymbol{\mu}_n(x_n)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & p_{11} + p_{12}x_2 + \ldots + \ldots p_{ln}x_n = b_1 \\ & p_{12} + p_{22}x_2 + \ldots + \ldots p_2 x_n = b_2 \\ & p_{ln} + p_{n2}x_2 + \ldots + \ldots p_m x_n = b_m \end{aligned} \qquad (36)$$

Ahora cambie un solo precio sin cambiar la función objetivo.

$$\max\ \boldsymbol{\mu}_1(x_1) = \mu_2(x_2) + \ldots + \ldots \boldsymbol{\mu}_n(x_n)$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + \ldots p_{ln}x_n = b_1 \\ & p_{12} + p_{22}x_2 + \ldots + \ldots p_{ln}x_n = b_2 \\ & p_{ln12} + p_{lnxm} + \ldots + \ldots p_{lnxn} = b_m \end{aligned} \qquad (37)$$

[10] Situación de un mercado producido por la coincidencia de la oferta y la demanda. Suele darse en los mercados de competencia perfecta donde los precios se establecen en el punto donde el coste marginal es igual a la utilidad marginal.

5. Equilibrio en el valor del insumo-producto

Los principales problemas económicos nacionales y mundiales son el crecimiento y el equilibrio. El problema fundamental hasta la fecha es que se ha considerado que sólo el trabajo es el único que añade valor a las cosas. Sin embargo, un bien o servicio obtiene valor de tres dimensiones diferentes:

a) El trabajo
b) El tiempo
c) El espacio

Variaciones del valor para cada dimensión:

-Con respecto al incremento del valor del trabajo, se encuentran muchos ejemplos cotidianos.
-El caso del tiempo, se puede ejemplificar con los productos agrícolas que requieren de tiempo para poder incrementar su valor, por ejemplo las maderas preciosas, en las que los árboles que crecen en las selvas requieren sólo de tiempo para incrementar su valor.
-El caso del espacio es algo diferente.

Un producto en un país africano tiene un valor diferente, al mismo producto en un país americano, por ejemplo el maíz o el trigo. También se tiene el caso del volumen espacial que ocupan los productos en una misma localidad. Todos los modelos que hablan de crecimiento y equilibrio tienen como premisa fundamental la minimización de costos y la maximización de beneficios, pero esto no es cierto ni es el fundamento. Para lograr el crecimiento económico con equilibrio y por lo tanto una economía sin ciclos es necesario hacer las siguientes consideraciones:

a) Considere como frontera superior a una economía mundial o nacional utilitarista.
b) Considere como frontera inferior a los individuos como entes económicos, que tienen una actuación racional económica.
c) Considere el conjunto de agentes económicos de una economía nacional o del mundo dividido en dos grandes grupos: a) Oferentes y b) Demandantes.
d) Considere que los agentes interactúan entre sí cambiando a veces su rol.

Sea A_j el conjunto de los productores u ofertantes.

Sea B_i el conjunto de los consumidores o demandantes.

El trabajo incrementa el valor de los bienes[11] o servicios de oferentes y demandantes. El tiempo incrementa el valor de los oferentes y decrementar el valor de los consumidores o demandantes. El espacio incrementa el valor de todos los agentes. Sea una economía dividida en oferentes y demandantes, sean tres dimensiones que agregan o disminuyen valor a los bienes y servicios; si los oferentes se encuentran representados por el conjunto A_i y los demandantes por el conjunto B_j, una economía se encuentra en equilibrio si:

$a > b$ produce un incremento en el valor
$b > a$ produce un decremento en el valor
$a \approx b$ no produce cambios

Se minimizan los incrementos y decrementos. Demostración:

Suponga que $a \neq b$ tenemos que se produce un decremento en el valor.[12]
Suponga que $b \neq a$ tenemos que se produce un incremento en el valor.
Suponga que no se minimizan los incrementos y los decrementos, entonces se toma el $LIM \sum_j \sum_i a_j b_i$ cuando $i \to \infty$ y cuando $j \to \infty$ y se produce desequilibrio entre los A_i y los B_j.

Corolario. La economía mundial se encuentra limitada por:

$$\sum_j \sum_i A_j B_i \qquad (38)$$

Así, la producción es eficiente si:

a. El valor de todo el producto en el tiempo $\boldsymbol{t_i}$, es mayor que el valor de todo el producto en el tiempo t_0.

$$V_0 < V_1 t_i > t_0 \qquad (39)$$

[11] Cualquier objeto o servicio capaz de satisfacer una necesidad.
[12] Este término puede definirse desde dos puntos de vista: como grado de utilidad proporcionada por un bien o servicio para la satisfacción de las necesidades (valor de uso), y como cantidad de otro bien (como pueda ser el dinero) que hay que entregar para poder disfrutar de dicho bien o servicio (valor de cambio).

b. La utilidad[13] de todos los bienes es mayor o igual en el tiempo t_i que la utilidad en el tiempo t_0.

$$\boldsymbol{\mu}_0 < \mu_1 t_i > t_0 \qquad (40)$$

Finamente el modelo de insumo-producto con un solo factor primario escaso, el conjunto de actividades óptimo para producir una combinación de bienes, es óptimo en la producción de cualquier otra combinación entendiendo por óptimo que minimice el uso del factor escaso. Los modelos lineales conciernen con la determinación de resoluciones óptimas a los problemas. Esto nos sirve para analizar la actuación racional económica. Algunas de las más factibles aplicaciones de la programación lineal, están involucradas con la economía en general y con la consecución de objetivos relevantes. Es claro que el elemento común a todos los modelos lineales de optimización es que todos ellos requieren de la investigación de los mejores valores de las variables. Para el economista teórico, los requerimientos de no negatividad son importantes ya que la teoría económica en general y la marginalista en especial no son capaces de contabilizar cantidades negativas. Sin embargo, aun cuando no se puede hacer un análisis económico con cantidades negativas, existen en el campo de las decisiones económicas algunos razonamientos que pueden ser hechos con la ayuda de los cálculos que indiquen la no negatividad. El vector de factores a es no negativo con a_{ij} positiva si i es factor y nula si no lo es. Suponga que existen n actividades y reunimos todos los vectores de producto en una matriz B de orden $n \times m$, llamada matriz de productos y a su vez reunimos todos los vectores de factor en una matriz de factores A de orden $n \times m$. La matriz $(B\text{-}A)$ es la matriz tecnológica y tiene como componente en el lugar aij, b_{ij} si el bien i es producto de la actividad, a_{ij} si el bien i es factor de la actividad j, y cero cuando el bien no es factor ni producto de dicha actividad. Suponga que varias actividades funcionan a niveles señalados por un vector y de orden n. Los productos del sistema vinculado por el vector x será:

$$x = (B\text{-}A)y \qquad (41)$$

El vector y es positivo, aunque el vector x puede tener cualquier signo:

a) Si $x_i > 0$ la resultante es un producto final del sistema para los niveles de actividad y.
b) Si $x_i = 0$ la resultante es un bien intermedio del sistema para los niveles de actividad y.
Si $x_i < 0$ la resultante es un factor primario dentro del sistema para los niveles de actividad y.

Es útil hacer algunas observaciones referentes al conjunto de producción factible. El conjunto de producción factible está formado por todos los vectores de producto neto que puede producirse a partir de la tecnología existente, el cual a veces es llamado conjunto productible. Como las actividades pueden funcionar a diferentes niveles no negativos, el conjunto de producción X puede definirse formalmente como:

$$x = \{x\ I\ x = (B\text{-}A)\ y,\ y \geq O\} \qquad (42)$$

El conjunto de producción tiene las siguientes propiedades: es un conjunto convexo cerrado y es también poliedro convexo además de lo anterior, se tiene que:

- No puede reproducirse una cantidad positiva de un bien sin un factor de por lo menos otro bien.
- Los procesos de producción son irreversibles.
- Siempre puede producirse con derroche de modo que si $x \varepsilon X$ & $x' \leq x,\ x \varepsilon X$.

Algunas ideas relacionadas con el conjunto de producción son las de producción eficiente, eficiencia y actividades eficientes para lo cual damos la siguiente definición: Un vector de producto es eficiente si y sólo si no existe ningún otro vector que pueda producir una cantidad mayor de alguno de los productos finales.[14]

6. Conclusiones

Considerando que el modelo fractal de expansión tecnológica representa los ingresos Yj en el sector j que dan lugar a un gasto $aijYj$ en bienes del sector i medido en términos monetarios. Las matrices correspondientes $A = (\alpha\ ij)$ & $B = (bij)$ son llamadas las matrices de insumos y producción respectivamente. Un vector de intensidad x, es un vector semipositivo y los vectores correspondientes de insumo y producción están dados por xA y xB. El modelo que consideramos es cerrado, esto significa que no existe un flujo de bienes de o hacia el modelo y por ende todos los bienes consumidos en el modelo deben haber sido previamente producidos por éste y la única

[13] Defendido por autores como Walras y Marshall, según la cual la utilidad es una magnitud exactamente cuantificable, por lo que las utilidades producidas por varios bienes a un consumidor pueden ser comparadas, pero además puede establecerse en qué cuantía difieren unas de otras.

[14] Note que no se excluye la posibilidad de que tanto los insumos como la producción de algún bien puede ser cero.

cosa que puede uno hacer con la producción del modelo es alimentarlo en forma retroactiva como un insumo en una etapa posterior. Un modelo como este es en algún sentido una aproximación a la economía total en la cual el trabajo produce bienes de consumo y esos bienes son demandados por la sociedad en general. Es claro que para que el modelo funcione de la manera descrita debe de ser posible escoger un vector *x* tal que cada bien que es consumido es también producido una condición para asegurar esto es: Para todo *j*, $bj \geq 0$ cada bien es producto de alguna actividad y si para toda *i* $ai \geq 0$, entonces cada actividad debe tener al mes, un bien como insumo (efecto marginal de escases tecnológica) , en lenguajes de vectores; el ingreso no negativo se puede expresar como un vector $y = (n\ 1, \ldots, n\ n)$ el cual debe de satisfacer: *A* y =0.5 .El problema matemático es idéntico aun cuando la interpretación económica es diferente, si bien existe o no elasticidad de ahí que consideramos de suma relevancia el modelo de expansión de Von Newmann cuya producción varía con el tiempo y considere la posibilidad de una expansión firme y en términos reales, en la mayor parte de las economías el método de insumo-producto constituye en esencia un complemento de las cuentas nacionales, teniendo interés tanto en el examen del resultado final de la actividad económica como en las relaciones entre los distintos sectores productivos. En vista de que se pueden realizar varias combinaciones, surge la inquietud es este artículo, de si se pueden sustituir dichos procesos o existe una solución óptima en el problema de la optimización de la economía financiera.

Bibliografía

♦ Arrow, Kennet J. y M. Kurz, *Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1970.

♦ Chain, Nassir Sapag y Reinaldo Sapag Chain, *Preparación y evaluación de proyectos*, Mc Graw Hill. Santa Fé de Bogotá, 2007.

♦ Fisher, A., L. Calvet & B. Mandelbrot, “Multifractality”, in *Cowles Foundation Discussion Paper 1165*, 1999.

♦ Frame, Michael & B. Mandelbrot, “Fractals, Graphics and Mathematics Education”, in *Mathematical Association of America*. Washington, 2002.

♦ Funtowics, Silvio Jerome, *La ciencia económica postnormal*, Barcelona, 2009.

♦ Goldberger, A., D. Rigney y B. West, “Caos y Fractales en la esfera”, en *Scientific American*, 1990.

♦ Gross, Herbert, *Matemáticas vectoriales*, Editorial Anaya, México, 1991.

♦ Hale, J. & H. Kocak, “Dynamics and Bifurcations”, in *Springer*, 1991.

♦ Honkapoja Evans, G., *Economic dynamicsk*, Santa Fé de Bogotá, 1998.

♦ Kantorovich, *La asignación optima de los recursos*, Editorial Moscú, Moscú, 1995.

♦ Levín, Pablo, “Estructura temporal del capital en la configuración del espacio económico”, en *Seminario de Planificación,* CFI/ILPES, Buenos Aires, 2003.

♦-----------------“Modelo de rotación del capital. Diagnóstico de subsistemas económicos”, en *Boletín Geográfico VIII*, Universidad Nacional del Comahue, Río Negro, 2001.

♦ Marx, Karl Enrich, *Das capital*, Volumen I, Editorial Progress, Moscú, 1867.

♦ Marx, Karl Enrich y Federic Engels, *Text auf der methode der Wissensschaft economic*, Beogral, 1870.

♦ Solanet, Manuel A., *Evaluación económica de proyectos de inversión*, Editorial SAE, Buenos Aires, 1995.

♦ Stiglitz, Joseph E., *Algunas observaciones adicionales sobre el análisis de costos y beneficios en la evaluación de proyectos*, BID, Departamento de Desarrollo Económico y Social, Washington, 1984.

♦ Suárez Suárez, A., *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*, Ediciones Pirámide, Madrid, 2008.

♦ Vokuhl, Peter, *La programación lineal*, Editorial Remest, México, 1994.