

Ajuste de escalas de sensación térmica para Xalapa, Veracruz, México

Dr. Juan Cervantes Pérez¹
Dr. Víctor Luis Barradas Miranda²

RESUMEN

La determinación de una zona de confort es un objetivo de la bioclimatología humana. El desarrollo manual, perceptivo e intelectual del hombre depende de la condición térmica que experimente. Los índices térmicos han sido desarrollados para zonas y grupos étnicos específicos del planeta, por lo que en este trabajo se presenta una propuesta de adecuación de los índices Temperatura Efectiva (TE) y *Wind-Chill* así como la estandarización de sus escalas de sensación térmica para la ciudad de Xalapa, Ver. La temperatura fue la variable a través de la cual se realizó este proceso y los resultados obtenidos fueron satisfactorios al mostrar sensaciones térmicas muy similares ambos índices en dos meses contrastantes. La aplicación de este tipo de información incluye a la arquitectura y a la medicina, entre otras especialidades.

ABSTRACT

An important aim of human bioclimatology is the determination of comfort zones since human developing depends on the experimented thermal conditions imposed by the environment. For this purpose series of thermal indexes has been elab-

Palabras clave: Bioclimatología, índices térmicos, sensación térmica, confort térmico, Xalapa, Ver.

Key words: *Bioclimatology, thermal indexes, thermal sensation, thermal comfort, Xalapa, Ver.*

Recibido: 29 de julio de 2009, aceptado: 21 de septiembre de 2009

¹ Centro de Ciencias de la Tierra y Licenciatura en Ciencias Atmosféricas, Universidad Veracruzana, jcervantes@uv.mx.

² Instituto de Ecología, Universidad Nacional Autónoma de México, vbarrada@miranda.ecologia.unam.mx.

orated for specific regions and ethnical groups; therefore, the main objective of this paper is the proposal of the modification of two thermal indexes: Effective Temperature and Wind-Chill. This modification was made by standardizing the thermal sensation scales for the city of Xalapa, Ver. Air temperature was the main variable taken into account for the development of this modification. Results were satisfactory in view of the fact that thermal sensation scales for both indexes were very similar after standardization in at least two contrasting analyzed months. This resulting information can be useful, for example in architectural design and medical care among other subjects.

INTRODUCCIÓN

La Organización Meteorológica Mundial (OMM, 1992) define a la **Bioclimatología** como la ciencia que estudia la influencia ejercida por el clima sobre los organismos vivos. En consecuencia, la **Bioclimatología Humana** estudia la influencia del clima sobre los seres humanos. Uno de los grandes objetivos de la bioclimatología humana es la determinación de un intervalo o zona de bienestar térmico (o, como ha sido adaptado del francés: *confort*) humano.

Entre las razones para determinar las condiciones de confort térmico se encuentran las relativas al desarrollo de actividades físicas intensas (Tudela, 1982), así como al reconocimiento de que el desempeño intelectual, manual y perceptivo del ser humano es, en general, mayor cuando él se encuentra en confort térmico con sus alrededores (Fanger, 1970).

La definición de **sensación térmica** está lejos de ser fácil, y en ausencia de un criterio objetivo,

las sensaciones subjetivas que resultan del estímulo térmico han sido adoptadas como medidas de la calidad térmica del ambiente. Así, las sensaciones térmicas se centran alrededor de dos "cantidades" opuestas: calor y frío, cada una de ellas con diferentes intensidades; por ejemplo: los términos agradable (confortable), caluroso y muy caluroso por un lado, y agradable-fresco-frío, por otro, son bien conocidos. Por ello, las sensaciones térmicas pueden ser englobadas en dos categorías simples: confort y malestar.

Para que un ser humano se encuentre totalmente confortable intervienen muchos factores como los físicos (temperatura, humedad, viento, etc.), fisiológicos (edad, sexo, salud, etc.), emocionales (tristeza, alegría, etc.), sociales (moda en el vestido y cabello, etc.) y varios más. Sin embargo, si se supone una persona joven común, que viste apropiadamente, que se encuentra sana física y mentalmente, etc., de tal forma que la sensación de confort es causada únicamente por las condiciones térmicas ambientales, entonces se puede decir que el confort para esa persona es la condición mental que expresa satisfacción con el medio que le rodea (Fanger, 1970).

Por otra parte, los elementos meteorológicos no actúan de manera aislada, la atmósfera actúa como un todo sobre el organismo humano. Se ha reconocido que las variables intrínsecas al organismo y meteorológicas más importantes que afectan la condición de confort son (Fanger, 1970 y Landsberg, 1972): nivel de actividad (producción de calor por el cuerpo humano), resistencia térmica de la ropa, temperatura del aire, flujos de energía (calor) intercambiados, rapidez relativa del viento y presión de vapor del agua (humedad). Henstschel (1986) propone que el grado de importancia de las variables meteorológicas depende también de la zona climática donde pretende realizarse el estudio bioclimático. En los trópicos, por ejemplo, la temperatura del aire y la humedad, de acuerdo a ese autor, son las variables predominantes. Es evidente que el confort térmico puede ser alcanzado por muchas combinaciones de las variables señaladas; de tal forma que un **índice de confort, índice térmico o índice bioclimático**, es un método que permite la estimación combinada de los elementos atmosféricos sobre el cuerpo humano (Givoni, 1974).

Con base en las variables utilizadas, Taesler (1986) identifica cuatro líneas de investigación re-

lativas a los índices térmicos: **la simulación física**, en la cual se utilizan "cuerpos" instrumentados para medir los efectos combinados de las variables atmosféricas sobre el cuerpo humano; **el modelamiento matemático**, el cual calcula índices térmicos correlacionados a sensaciones térmicas o a reacciones fisiológicas y simula el balance de calor en el cuerpo; **los estudios experimentales**, que usan objetivamente pruebas de desempeño así como votos subjetivos en condiciones de campo o en cámaras climáticas controladas; y **los estudios epidemiológicos**, mismos que parten de métodos estadísticos para establecer posibles relaciones entre las condiciones ambientales y la ocurrencia de diversas enfermedades. Morgan y Baskett (1974) identifican dos enfoques en los estudios bioclimáticos: el **sintético o empírico**, que combina diversas variables meteorológicas para expresar el confort térmico, y el **analítico**, el cual explica las bases físicas del confort térmico examinando los intercambios de energía entre el ser humano y su ambiente.

En general, los trabajos sobre evaluación bioclimática en el país han sido realizados con base en los índices empíricos que, de acuerdo a Morgan y Baskett (1974) son producto de la combinación de dos o más variables meteorológicas a través de expresiones matemáticas sencillas. Este tipo de índices, de acuerdo a Taesler (1986), se particularizan a condiciones, sitios y aún grupos étnicos (en particular, actividad sedentaria, latitudes medias y blancos). Si bien los índices que consideran los mecanismos de intercambio de calor entre el cuerpo humano y sus alrededores para evaluar el bioclima son exitosos y de validez universal, ya que son producto de la aplicación de la primera ley de la termodinámica, su aplicación se dificulta debido al tipo de información requerida en sus cálculos.

Como se ha comentado, debido a la particularización de sitios y grupos de los índices empíricos, el objetivo de este trabajo es mostrar un ajuste de las escalas de sensación térmica de los índices de sensación térmica empíricos Temperatura Efectiva (TE) y *Wind-Chill* (K), para la ciudad de Xalapa, Veracruz, México, como un ejemplo de lo que se puede hacer para otras ciudades del país, pues la aclimatación al sitio de residencia juega un papel importante en las sensaciones térmicas experimentadas. Los resultados de este tipo de trabajos pueden ser aplicados en ramas como la arquitectura bioclimática y planeación urbana, entre otras.

MATERIALES Y MÉTODOS

Los índices TE y K propuestos por Missenard (1937) y Sipple y Passel (1945), respectivamente, se calculan con las siguientes relaciones:

$$TE = T - 0.4(T-10)(1-HR/100) \quad [^{\circ}\text{C}]$$

$$K = (10\sqrt{v} + 10.45 - v)(33-T) \quad [\text{KCal}/\text{m}^2]$$

donde T: temperatura del aire [$^{\circ}\text{C}$]; HR: humedad relativa del aire [%] y v es la rapidez del viento [m/s].

En la **Tabla 1** se muestran escalas de sensaciones térmicas asociadas a estos índices, donde se destacan dos aspectos: los índices fueron generados para latitudes medias y altas, como es el caso de K, y las escalas de sensaciones térmicas no son correspondientes ni simétricas alrededor del confort, además, en el caso de K, mientras mayor sea el valor, mayor será la sensación térmica de frío asociada. Bajo esta perspectiva, se plantea la siguiente cuestión: ¿Cómo obtener una escala de sensaciones térmicas para personas de latitudes tropicales y que a la vez, permita comparar dichos índices? Para resolver la cuestión planteada se procedió de la siguiente manera: se obtuvieron los datos meteorológicos horarios del año 1999 del Observatorio Meteorológico de la ciudad de Xalapa, Ver., la cual se ubica a los 19.5° lat N y 96.5° long W, a una altitud de 1460 msnm, y posee un clima templado húmedo con abundantes lluvias en verano. Se calcularon los índices TE y K horarios para los meses de enero, abril, julio y octubre. Entonces se obtuvieron los

índices de correlación entre los índices y las variables utilizadas para calcular dichos índices (T, HR y v). Puesto que la T fue la variable que mostró mayor correlación con los índices, se utilizó el concepto de *termopreferendum*, el cual indica la temperatura preferente de las personas **acclimatadas** al sitio del cual se desea calcular los intervalos de sensación térmica. El *termopreferendum* se calculó con la siguiente expresión (Auliciems, 1992):

$$T_p = 0.31 T_m + 17.6$$

donde T_p es el *termopreferendum* y T_m es la temperatura media mensual, ambos en $^{\circ}\text{C}$. En este punto, es importante señalar que la temperatura media mensual se obtiene de las **Normales Climatológicas**, valor representativo del sitio en un periodo de tiempo relativamente largo.

Si bien el *termopreferendum* da un valor de temperatura preferente asociada en este caso, como el punto central del confort, existe un pequeño rango en el cual se sigue manteniendo. Para determinar ese rango, se aplicó el método propuesto por Wakely (1978), que relaciona la amplitud de la zona de confort con la oscilación térmica media anual (mientras mayor sea la oscilación, más amplia es la zona de confort).

Por otra parte, la escala de sensaciones térmicas de la ASHRAE (1966) es una escala que considera siete sensaciones térmicas centradas alrededor del confort basada en la amplitud de la zona de confort. Esta escala se ocupó para

Tabla 1. Escalas de sensaciones térmicas asociadas a TE (tomada de Hetschell, 1986) y K (tomada de Terjung, 1966)

Rangos de la TE	Sensación térmica	Rangos de la K	Sensación térmica
>30	Calor pesado		
24 a 30	Calor moderado		
18 a 24	Calor placentero	< 200	Caluroso
12 a 18	Placentero	200 a 300	Confortable
6 a 12	Fresco	300 a 600	Fresco
0 a 6	Muy fresco	600 a 800	Relente
- 6 a 0	Frío ligero	800 a 1000	Frío
-12 a -6	Frío	1000 a 1200	Muy frío
-18 a -12	Muy frío	1200 a 1400	Frío mordaz
-24 a -18	Frío intenso	> 1400	Congelación
< -24	Peligro de congelación		

aplicarla a la estandarización de los índices y poder compararlos.

RESULTADOS

En la **Tabla 2** se muestran los coeficientes de correlación entre los índices térmicos y las variables utilizadas para su cálculo. Un aspecto interesante es el bajo índice de correlación entre v y K , cuando el cálculo de este índice depende de v además de T .

Tabla 2. Coeficientes de correlación (r) entre los índices térmicos y las variables utilizadas para su cálculo en la ciudad de Xalapa, Ver.

Índice	T	HR	V
TE	0.98	-0.39	0.40
K	-0.78	0.41	0.15

El *termopreferendum* para la ciudad de Xalapa tuvo un valor de 23.2°C y la amplitud del rango de confort fue de 4°C. Bajo estos resultados, en la **Tabla 3** se muestran los límites de las sensaciones térmicas de acuerdo a la escala ASHRAE.

Tomando como base la temperatura, en la tabla 4 se presentan los modelos de regresión lineal entre los índices TE y K y esta variable. Así, este sencillo paso permitió ajustar la escala de los índices señalados utilizando los límites térmicos de la **Tabla 3**.

Tabla 3. Límites de las sensaciones térmicas de la escala ASHRAE a la ciudad de Xalapa, Ver., con base en la temperatura

Rango de Temperatura (°C)	Sensación Térmica
> 33.2	Muy caluroso
29.2 a 33.2	Caluroso
25.2 a 29.2	Ligeramente caluroso
21.2 a 25.2	Confortable
17.2 a 21.2	Ligeramente fresco
13.2 a 17.2	Fresco
< 13.2	Frío

Tabla 4. Modelos de regresión lineal, coeficientes de determinación y errores estándar de estimación de los índices térmicos y la temperatura en la ciudad de Xalapa, Ver.

Modelo	Coefficiente de correlación	Coefficiente de determinación	Error estándar de estimación
TE = 3.62 + 0.69T	0.98	0.96	0.78 °C
K = 599.3 - 15.7T	-0.78	0.62	2.37 KCal/m ²

En las **Tablas 5 y 6** se muestran las escalas de sensaciones térmicas estandarizadas a través de las regresiones lineales.

Para fines de comparación, en las **Figuras 1 y 2** se presentan las marchas diurnas promedio de las sensaciones térmicas para TE y K estandarizados a la escala ASHRAE para los meses de enero y abril, contrastantes en cuanto a sensaciones térmicas.

Tabla 5. Escala de sensaciones térmicas de K una vez estandarizada a la escala ASHRAE a través del *termopreferendum* y rango de oscilación

Sensación térmica	Límites de TE (KCal/m ²)
Muy Caluroso (MC)	< 54.5
Caluroso (C)	54.5 – 112.0
Ligeramente Caluroso (LC)	112.0 – 169.5
Confortable (CO)	169.5 – 227.0
Ligeramente Fresco (LF)	227.0 – 284.4
Fresco (F)	284.4 – 341.9
Frío (Fr)	> 341.9

Tabla 6. Escala de sensaciones térmicas de TE una vez estandarizada a la escala ASHRAE a través del *termopreferendum* y rango de oscilación

Sensación térmica	Límites de K (°C)
Muy Caluroso (MC)	> 29.1
Caluroso (C)	26.0 – 29.1
Ligeramente Caluroso (LC)	22.8 – 26.0
Confortable (CO)	19.7 – 22.8
Ligeramente Fresco (LF)	16.5 – 19.7
Fresco (F)	13.4 – 16.5
Frío (Fr)	< 13.4

Como se observa en las **Figuras 1 y 2**, las sensaciones térmicas obtenidas después de estandarizar los índices son un tanto similares. En el caso del mes de enero, las sensaciones térmicas de TE oscilan de FR (Frío) a Ligeramente Fresco

(LF), en tanto que para K solamente lo hacen entre Frío (FR) y Fresco (F). Desde luego, las sensaciones de mayor "frío" ocurren hacia las horas de la salida del sol, mientras que las de mayor "calor" ocurren hacia las primeras horas de la tarde.

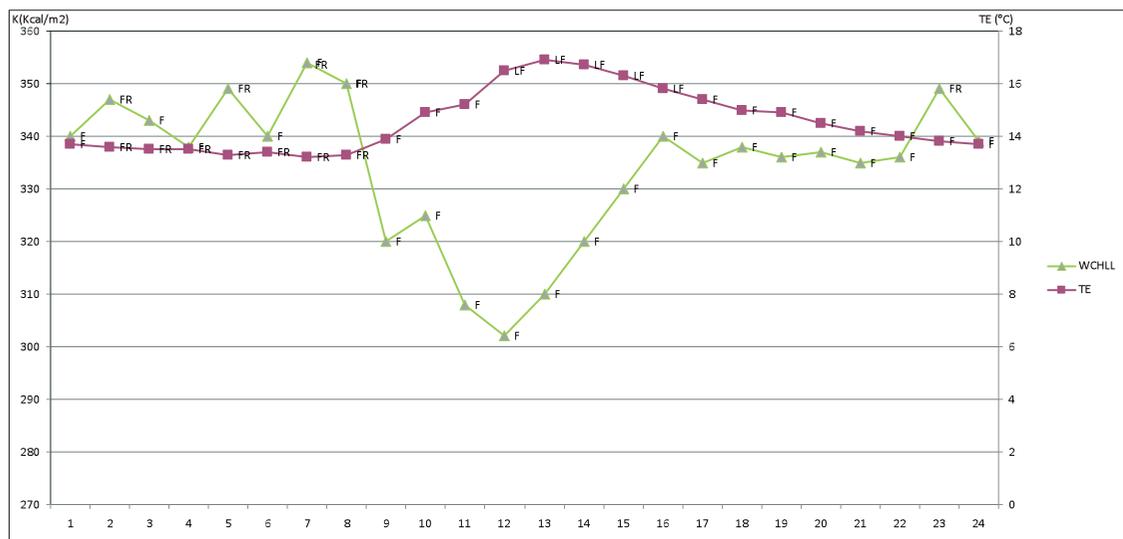
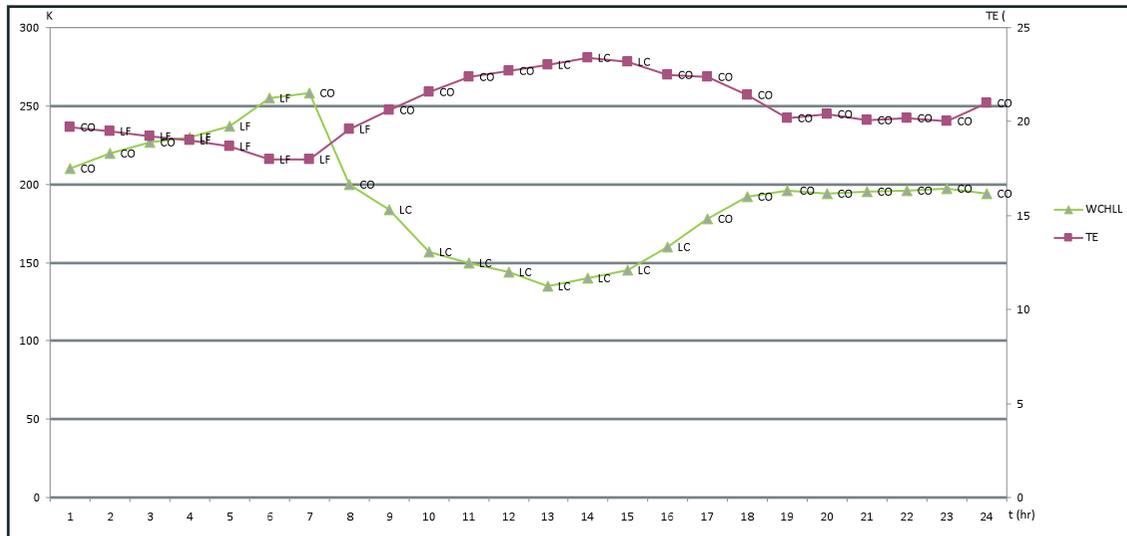
Figura 1. Marcha horaria diaria promedio de TE y K durante el mes de enero de 1999 en la ciudad de Xalapa, Ver.


Figura 2. Marcha horaria diurna promedio de TE y K durante el mes de abril de 1999 en la ciudad de Xalapa, Ver.



En el mes de abril, ambos índices oscilan entre tres sensaciones térmicas: Ligeramente Fresco (LF), Confortable (CO) y Ligeramente Caluroso (LC). Comparadas con el mes de enero, desde luego, son sensaciones de mayor "calor". En este contexto, al menos en la sensación térmica, la coincidencia de los índices es alta.

DISCUSIÓN

La relación bidireccional que existe entre el cuerpo humano y la atmósfera es evidente; de tal forma que muchos de los estudios que iniciaron con el objetivo de mantener una alta producción (agrícola, minera, industrial, etc.) se han extendi-

do en la actualidad con fines de mejorar el desarrollo manual, perceptivo e intelectual del ser humano (Tudela, 1982).

Son muchas las variables, factores y condiciones que se requieren para alcanzar el desarrollo óptimo del ser humano, además de que este tipo de estudios se han generado para latitudes y grupos étnicos específicos, por lo que en este trabajo sólo se presentan dos índices térmicos sencillos que combinan a la temperatura con otra variable (en este caso, humedad relativa para un índice y viento para otro). Este tipo de índices han sido utilizados en nuestro país desde hace ya varias décadas y actualmente y a futuro



La sensación térmica depende de muchos factores: edad, género, actividad física que se realiza, estado de salud, ambiente alrededor, etc. Pero en su mayor parte depende de las condiciones meteorológicas.



La relación bidireccional que existe entre el cuerpo humano y la atmósfera es evidente.



Los índices empíricos TE y K pueden ser aplicados a una ciudad de clima templado como Xalapa, Ver.

con los mismos fines (por ejemplo Jáuregui, 1971; Jáuregui *et al.*, 1997; Jáuregui y Tejeda, 2001), y aunque existen nuevas tendencias y modelos, la aplicación de encuestas de confort para zonas y lugares específicos son una fuente de información referente a las preferencias de los individuos en cuanto a sus necesidades para alcanzar el confort (García, 2008). Si bien en este trabajo no se aplicaron encuestas como se señala en el párrafo anterior, se buscó atacar la adecuación y estandarización de escalas de dos índices para compararlos.

CONCLUSIONES

Con base en lo aquí presentado, se concluye que los índices empíricos TE y K pueden ser aplicados a una ciudad de clima templado como lo es la ciudad de Xalapa, Ver., después de llevar a cabo la estandarización, las sensaciones térmicas obtenidas son muy similares. La estandarización a través del *termopreferendum* considera, de alguna manera, la aclimatación de las personas al sitio de estudio, pues conlleva en su cálculo tanto

a la temperatura media como a la oscilación térmica del lugar.

Los índices aquí expresados representan la ventaja de utilizar para su cálculo información que, generalmente, es medida en un observatorio meteorológico como lo es la temperatura, la humedad relativa y el viento.

Finalmente, es importante destacar dos aspectos: la información bioclimática tiene diferentes tipos de aplicaciones como la arquitectura (bioclimática), la planeación urbana, la evaluación de gastos de energía y la medicina, entre otras. Y si bien, hoy día se habla del efecto del cambio climático, el crecimiento urbano tiene un efecto mayor a éste, pues los materiales con los que se construyen las ciudades son buenos absorbedores y emisores de calor, para cuyo caso se deben realizar otro tipo de estudios que quedan fuera del objetivo del presente.

Agradecimientos: Esta investigación fue parcialmente financiada por DGAPA-PAPIIT, UNAM en el proyecto IN213209-3.



La información bioclimática tiene diferentes tipos de aplicaciones como la arquitectura (bioclimática), la planeación urbana, la evaluación de gastos de energía y la medicina, entre otras.

REFERENCIAS

- ASHRAE, American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers Standard. *Thermal Environmental Conditions for Human Occupancy*, Atlanta, Ga, 55-56, 1966.
- AULICIEMS, A., Greenhouse warmed Europe: thermoregulatory criteria for future indoor climate management. *Int. Journal of Biometeorol*, 36, 201-209, 1992.
- FANGER, P. O., *Thermal Confort. Analysis and Applications in Environmental Engineering*. Denmark: Danish Technical Press, 244, 1970.
- GARCÍA, G., Equivalencia de consumos eléctricos domésticos e índices de bioclima humano en siete ciudades cálidas de México. *Tesis de Licenciado en Ciencias Atmosféricas*. Fac. de Instrumentación Electrónica y Ciencias Atmosféricas de la Universidad Veracruzana. Xalapa, Ver, 107pp, 2008.
- GIVONI, B., Biometeorological indices. *Progress in Biometeorology*, vol. 1 Part 1A, Holanda: Swtez and Zeitlinger, 138-145, 1974.
- HENTSCHELL, G., A human biometeorology classification of climate for large and local scales. *Climate and Human Health. Proceedings of the Symposium in Leningrad*, 1, 120-138, 1986.
- JÁUREGUI, E., Evaluación del bioclima en dos clínicas de la Ciudad de México. *Bol. del Inst. de Geografía UNAM*, 4, 23-36, 1971.
- JÁUREGUI, E., et al., Bioclimatic conditions in Mexico City-an assessment. *Int. Journal of Biometeorology*, 40,166-177, 1997.
- JÁUREGUI, E. y A. TEJEDA, A scenario of human thermal comfort in Mexico City for 2CO2 conditions. *Atmósfera*, 14, 125-138, 2001.
- LANDSBERG, H. E., *Assessment of human bioclimate. A limited review of physical parameters. Nota Técnica 123 de la WMO*, Suiza, 36 pp, 1972.
- MISSENARD, A., *L'Homme et le Climat*. Francia: Eyrolles, 1937.
- MORGAN, D. L. y R. L. BASKET, Comfort of man in the city. An energy balance modelo f man-environment coupling. *Int. J. of Biomet*, 18,184-198, 1974.
- Organización Meteorológica Mundial, *Vocabulario Meteorológico Internacional*. Suiza, OMM, 276 pp, 1992.
- SIPPLE, P. A. y C. F. PASSEL, Measurements of dry atmospheric cooling in subfreezing temperaturas. *Proceed. Of the Am. Phil. Soc.*, 89, 177-199, 1945.
- TAESLER, R., Climate characteristic and human health-the problem of climate classification. *Climate and Human Health. Proceedings of the Symposium in Leningrad*, 1, 81-119, 1986.
- TERJUNG, W. H., Physiologic climates of the conterminous United States: a bioclimate based on man. *Ann. Assoc. Am. Geog.*, 56,141-179, 1966.
- TUDELA, F., *Ecodiseño*. México: Ediciones UAM, 223 pp., 1982.
- WAKELY, P., *Diseño y Confort Térmico en Climas Cálidos. Un Texto de Aprendizaje para Arquitectos*, Bogotá: Universidad de Los Andes, Col. Mimeo, 1978.
- Fotografías propiedad del autor.

Lixiviados de biosólidos sobre la biota dulceacuícola

Francisco José Flores Tena ¹, Lizbeth Flores Pardavé ¹,
Iris del Carmen Valenzuela Cárdenas ¹, Eduardo Andrés Flores Salinas ²

RESUMEN

El objetivo de este estudio es conocer los efectos que producen los lixiviados de los biosólidos sobre diversos representantes de la biota dulceacuícola. Los efectos sobre el crecimiento o la mortalidad (CL_{50}) en las diferentes especies se evalúan a través de diversos bioensayos. *Nannochloris oculata* resultó afectada en su crecimiento por concentraciones mayores a 500 ppm de lixiviados. Las CL_{50} , a las 48 h., para las especies de la fauna fueron 8.6%, 42.4% y >80% para *Oreochromis niloticus*, *Lecane quadridentata* y *Limnodrilus hoffmeisteri*, respectivamente. Los drenajes del suelo adicionado con biosólidos también afectaron a *N. oculata*, mientras que las CL_{50} , a las 48 h; para la fauna acuática fueron 90 t/ha, 206 t/ha y 432 t/ha para las especies ya mencionadas. Las concentraciones obtenidas en los bioensayos son altas y difícilmente se presentarán en la naturaleza, a menos que por descuido en el manejo de los biosólidos se concentren los lixiviados en el campo, lleguen y permanezcan en los ecosistemas dulceacuícolas.

Palabras clave: Biosólidos, bioensayos, *Nannochloris oculata*, *Lecane quadridentata*, *Oreochromis niloticus*, *Limnodrilus hoffmeisteri*.

Key words: biosolids, bioassays, *Nannochloris oculata*, *Lecane quadridentata*, *Oreochromis niloticus*, *Limnodrilus hoffmeisteri*.

Recibido: 22 de julio de 2009, aceptado: 22 de septiembre de 2009

¹ Departamento de Biología, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, fforest@correo.uaa.mx, lfloresp@correo.uaa.mx, irdelca@hotmail.com.

² Estudiante de Biología, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jumanji_kp@hotmail.com.

ABSTRACT

The goal of this study is to know the effects of biosolid leachates on freshwater biota. Several bioassays were conducted in order to evaluate the effects on the growth and mortality (LC_{50}) in selected species. For *Nannochloris oculata* 500 ppm or more of elutriates inhibited their growing. Elutriates LC_{50} , values elutriates at 48 h; for *Oreochromis niloticus*, *Lecane quadridentata* and *Limnodrilus hoffmeisteri* were 8.6%, 42.4% and >80%, respectively. Soil drainages amended with biosolids affected to *N. oculata*. Drainages LC_{50} , values at 48 h; for aquatic fauna were 90 t/ha, 206 t/ha and 432 t/ha, for species mentioned previously. LC_{50} values obtained are higher and they are not common in nature, only with an accident a high leachate concentration and its draining reach to fresh water ecosystems.

INTRODUCCIÓN

Los biosólidos, subproducto del tratamiento de las aguas residuales, constituyen una fuente importante de materia orgánica y de minerales que pueden utilizarse como fertilizante y mejorador de suelo (Girovich, 1996). Los beneficios en la productividad agrícola ha sido ampliamente reportada (Salcedo-Pérez et al., 2007). Sin embargo, en algunos de ellos se presentan altas concentraciones de varios elementos como los metales, compuestos orgánicos tóxicos y patógenos que pueden disminuir su uso benéfico (Epstein, 2003).

Recientemente, la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA) ha realizado diversos estudios con el objetivo de conocer y evaluar los efectos adversos de los biosólidos provenientes de la planta tratadora de aguas residuales en

Aguascalientes (Flores y Flores, 2005; Flores, *et al.*, 2008), de los cuales se ha obtenido información importante para su uso.

Para conocer de una manera más completa los efectos del uso de los biosólidos, se consideró pertinente evaluar su acción sobre la biota del medio acuático, realizando bioensayos con lixiviados de biosólidos y de drenajes agrícolas simulados, adicionados con biosólidos en especies representativas de ecosistemas dulceacuícolas: *Nannocloris oculata*, especie fitoplanctónica, *Lecane quadridentata*, representante del zooplancton, *Oreochromis niloticus*, especie neotónica exótica que, junto con otras especies también exóticas, conforman el 80% de la ictiofauna en los cuerpos de agua de la entidad (Martínez y Rojas, 2008), y *Limnodrilus hoffmeisteri*, habitante del bentos.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se tomaron muestras de 5 kg de biosólidos en peso húmedo de la planta tratadora de aguas residuales de la ciudad de Aguascalientes. Los elutriados se obtuvieron con la técnica propuesta por la Environmental Protection Agency (EPA), en 1998. Para obtener los drenajes agrícolas a un matraz de 1 L se le agregaron 100 g de suelo seco, proveniente de la Posta Zootécnica de la UAA del tipo planosol eútrico, 20 g de biosólidos y 520 ml de agua destilada (representa 600 t/ha de biosólidos) y se siguió el procedimiento señalado por la EPA para la obtención de elutriados. Tanto a los lixiviados como a los drenajes agrícolas se les determinaron las siguientes características químicas: pH, Sólidos Disueltos Totales (SDT), conductividad, nitratos, sulfatos, nitrógeno amoniacal, fosfatos, cloruros, alcalinidad, dureza, Demanda Química de Oxígeno (DQO) y los metales pesados Cd, Cr, Cu, Fe, Ni, Pb y Zn.

Los organismos planctónicos seleccionados para este estudio fueron la clorofita *N. oculata* y el rotífero *L. quadridentata*, ambos proporcionados por el Laboratorio de Toxicología a cargo del Dr. Roberto Rico; las crías de tilapia (*O. niloticus*) se obtuvieron de la estación piscícola de Pabellón de Hidalgo, Ags. y el tubificido *L. hoffmeisteri* se obtuvo de la localidad de Mangas, Hgo. Todos los organismos fueron sometidos a las condiciones de laboratorio mínimo dos semanas. La cepa de *N. oculata* fue criada en medio Bold con 12 h luz (1700 Lux) y 12 h oscuridad durante 14 días. Concluido este período, se añadieron los

lixiviados en la cantidad necesaria para obtener concentraciones de 50, 200, 500 y 1000 ppm y los drenajes agrícolas para probar las dosis de 400 y 800 t/ha. Se realizaron dos experimentos con dos réplicas cada uno; el tiempo de exposición fue de una semana. Para conocer la densidad (células/mL) se realizaron conteos con el microscopio a diferentes densidades ópticas para construir una curva, posteriormente, se interpolaron los resultados obtenidos colorimétricamente bajo las diferentes condiciones experimentales, obteniendo de esta manera la densidad poblacional bajo las diferentes condiciones experimentales. La concentración de clorofila fue evaluada de acuerdo a la técnica descrita por Vollenweider (1974). También se realizaron bioensayos con medio Bold diluido un 50% y concentraciones mayores de lixiviados (1000, 2000 y 5000 ppm) y de drenajes agrícolas (2000 y 4500 t/ha).

Los bioensayos con *L. quadridentata* consistieron en tres repeticiones con lixiviados y tres con drenajes agrícolas con cada una de las siguientes concentraciones: 0, 6.25, 12.5, 25 y 50% y 0, 37.5, 75, 150, y 300 t/ha para el caso de drenajes agrícolas. También se utilizó un control negativo (tres gotas de metil paratión). Se colocaron diez rotíferos en cada pocillo para cada concentración, se expusieron durante 48 h después de las cuales se cuantificaron el número de organismos sobrevivientes. Con los resultados de los bioensayos se calcularon las CL50 para lo cual se utilizó el software de la Universidad de Montpellier (1983). De la misma manera para *L. hoffmeisteri* se realizaron tres repeticiones con lixiviados y tres con drenajes agrícolas en cada una de las siguientes concentraciones: 0, 10, 20, 40 y 80%, para el caso de los elutriados 0, 200 y 600 t/ha para los drenajes agrícolas. Se colocaron diez tubificidos en cada frasco de 250 ml que contenían 15 g de arena y 185 ml de solución. El bioensayo duró cuatro días; a las 48h, 72h y 96h se realizaron los conteos para determinar el número de sobrevivientes. Con los resultados obtenidos se calcularon las CL50 para cada uno de los tiempos y para cada bioensayo.

Para la realización de los bioensayos con la tilapia (*O. niloticus*) se colocaron 20 peces de una talla de 5 ± 1 cm en cada pecera de 20 l de capacidad. Se seleccionaron las concentraciones de 0, 5, 10, 15 y 20% para el caso de los lixiviados y de 0, 60, 120, 180, 240 y 300 t/ha para los drenajes agrícolas (Figura 3). Cada 24 horas se revisaron las peceras y se retiraron los ejemplares muertos. Con los datos recabados a las 48 h, 72

h y 96h se calcularon las CL50 para los diferentes bioensayos. Para los análisis estadísticos se utilizó el paquete estadístico *Minitab* (2008).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las características químicas de los lixiviados de los biosólidos y de los drenajes agrícolas utilizados para los bioensayos se presentan en la **Tabla 1**, en ellos se aprecia que el contenido de metales pesados es muy bajo en ambos casos, al menos, un orden de magnitud inferior a lo establecido en la NOM-001-ECOL-1996 para la protección de la vida acuática (SEMARNAP, 1996), hecho que indica que no existe contaminación por parte de estos elementos.

La composición química de los lixiviados mostró una cantidad importante de sales minerales: Nitratos, fosfatos, sulfatos, cloruros, bicarbonatos,

mismos que pueden ser utilizados por los vegetales para su crecimiento, en este caso la clorofila, hecho que ya ha sido reportado por otros autores como Bell y Elmeteri (2007). Los bioensayos con *N. oculata* mostraron que dosis de 50 ppm de lixiviados producen un mayor crecimiento que cuando no se agrega lixiviado, la dosis de 200 ppm produjo un crecimiento similar al testigo y solamente dosis de 500 y 1000 ppm produjeron un decremento con respecto a él. Ya que el medio *Bold* contiene todos los elementos en concentraciones óptimas, un exceso de sales como las dosis superiores produjeron una disminución en el crecimiento. Cuando se diluyó al 50% el medio *Bold* sólo la adición de 5000 ppm de lixiviados y de 4500 t/ha de drenaje causaron efecto negativo en la especie, concentraciones menores proporcionaron parte de los minerales faltantes, debido a la dilución, y que son necesarios para su crecimiento (Reynolds *et al.*, 1988). La concen-

Tabla 1. Caracterización química de elutriados de biosólidos y de drenajes agrícolas utilizados en los bioensayos de toxicidad

Parámetro	Elutriados	Drenaje agrícola 600 t/ha	Elutriados*	Drenaje agrícola 600 t/ha*
pH	8.92	7.37	8.29	7.22
SDT (g/L)	0.436	1.034	1.059	0.933
Conductividad (µS/cm ²)	671	1590	1629	1435
Nitratos (mg/L)	12	186	36.3	161.3
Sulfatos (mg/L)	30	186	80	123
Nitrógeno Amoniacal (mg/L)	70	64	142	5
Fosfatos (mg/L)	0.19	52	86.5	45.5
Cloruros (mg/L)	23.9	2.39	14.39	4.79
Alcalinidad (mg/L)	180	160	386	750
Dureza (mg/L)	480	940	880	460
DQO (mg/L)	138	168	131	55
Metales (mg/L)				
Cd	0.04	0.04		
Cr	0.61	0.01		
Cu	0.02	0.7		
Fe	<0.05	6.84		
Ni	<0.01	<0.01		
Pb	<0.01	<0.01		
Zn	<0.01	0.03		

* Utilizados solamente con *O. niloticus*

tración de clorofila solamente aumentó significativamente cuando se agregó 50 ppm de lixiviado y disminuyó significativamente cuando se utilizó el medio *Bold* diluido y se agregó 5000 ppm de

lixiviado y 4500 t/ha de drenaje. Lo anterior coincide con la disminución en la densidad bajo estas mismas condiciones (**Tabla 2**).

Tabla 2. Densidad y concentración de clorofila "a" de *N. oculata* bajo diferentes condiciones experimentales

Condición	Densidad (10 ⁵ células/ml)	Clorofila "a" (mg/l)
Testigo	8.64 ± 1.12 ^a	7.29 ± 0.28 ^a
50 ppm lixiviado	10.72 ± 0.22 ^b	8.29 ± 0.73 ^b
200 ppm lixiviado	8.36 ± 0.40 ^a	7.42 ± 0.51 ^{ab}
500 ppm lixiviado	6.50 ± 0.36 ^c	7.23 ± 0.09 ^a
1000 ppm lixiviado	6.23 ± 0.31 ^c	7.10 ± 0.10 ^a
MB (50%) + 1000 ppm lixiviado	9.34 ± 0.24 ^{ab}	7.47 ± 0.43 ^{ab}
MB (50%) + 2000 ppm lixiviado	8.19 ± 0.57 ^a	6.51 ± 0.52 ^a
MB (50%) + 5000 ppm lixiviado	6.78 ± 0.26 ^c	3.83 ± 0.31 ^c
Drenaje 400 t/ha	7.12 ± 0.22 ^a	6.90 ± 0.16 ^a
Drenaje 800 t/ha	7.22 ± 0.25 ^a	7.03 ± 0.21 ^a
MB (50%) + Drenaje 2,000 t/ha	7.67 ± 0.42 ^a	6.93 ± 0.42 ^a
MB (50%) + Drenaje 4,500 t/ha	6.42 ± 0.36 ^c	4.54 ± 0.28 ^c

Diferente literal significa diferencia significativa $\alpha = 0.05$.

MB = Medio *Bold*.

Los valores de las CL₅₀ obtenidas de los bioensayos con la fauna dulceacuícola se muestran en el Cuadro 3, en el que se observa que la especie más sensible en este estudio fue *O. niloticus* y la más resistente *L. hoffmeisteri*.

El número de organismos muertos de *L. quadridentata* se incrementó en la medida en que se aumentó la concentración de lixiviados y de drenaje agrícola. La mortalidad pudo deberse, entre otros factores, al pH y la salinidad; Wallace *et. al.*, (1993) mencionan que el pH óptimo para esta especie oscila entre 6.5 y 8.5, y el pH de lixiviados fue de 8.92.

L. hoffmeisteri mostró una gran tolerancia a los lixiviados (**Figura 1**), ya que aún a una concentración del 80%, sólo se registró un 6% de mortalidad, probablemente, la concentración de los diversos componentes de los lixiviados no produjo cambio importante en la fisiología de los animales, o bien, no contenían algún componente tóxico que les causara daño. El contenido de salinidad en la concentración del 80% (400 mg/l) estuvo cercano al límite inferior de las aguas salobres de 500 mg/l (Lewis, 1980), sin embargo, de acuerdo con Kennedy (1965) y Berezina (2003) estos organismos son resistentes a cambios en la salinidad. Cuando se utilizaron drenajes agrícolas sí se observaron efectos negativos en la concen-

Tabla 3. Valores de CL₅₀ en bioensayos con lixiviados y drenajes agrícolas en *O. niloticus*, *L. quadridentata* y *L. hoffmeisteri*

Especie	Lixiviados (%)			Drenaje agrícola (t/ha)		
	48 h	72 h	96 h	48 h	72 h	96 h
<i>O. niloticus</i>	8.6	7.9	7.6	90	90.5	121
<i>L. quadridentata</i>	42.4			206		
<i>L. hoffmeisteri</i>	>80	>80	>80	432	388	373

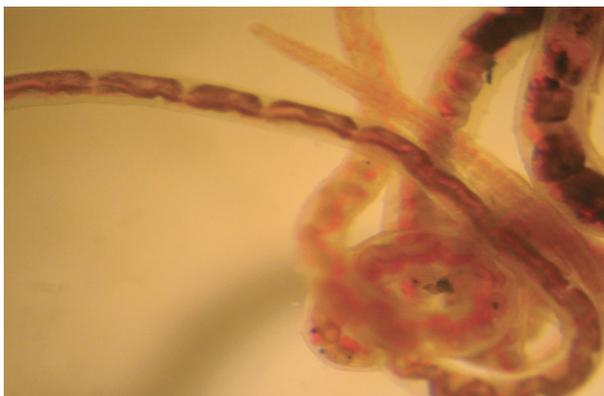


Figura 1. Ejemplar de *L. hoffmeisteri* expuesto a una concentración de 80% de elutriados durante 96 h.

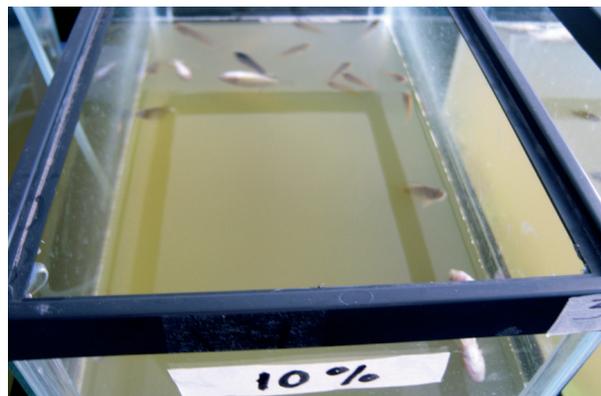


Figura 1. Bioensayo de elutriados con *O. niloticus*. Se aprecian ejemplares muertos a una concentración de 10%.

tración de 600 t/ha, la cual puede ser una dosis recomendada para suelos pobres en minerales como litosoles y planosoles, comunes en la entidad, para ciertos cultivos forrajeros como el maíz (Flores y Flores, 2005); en esta concentración se registraron muertes significativas a las 48h, 72h y 96h, debido a un posible factor como mayor salinidad del drenaje agrícola (1.1 g/l). Lo anterior, indica que existe un límite de tolerancia al contenido de sales para la especie, a pesar de reconocerse como resistente a la salinidad (Lin y Yo, 2008).

Si bien la tilapia (*O. niloticus*) es muy resistente a la variación de los parámetros físico-químicos del hábitat (El-Shafai *et al.*, 2007), las concentraciones que presentan los lixiviados, específicamente la salinidad y la DQO, pudieron contribuir de manera importante para incrementar la mortalidad a concentraciones del 10% o superiores (**Figura 2**). En el bioensayo con drenaje agrícola, no hubo mucha mortalidad ya que la salinidad y, sobretudo, la DQO fueron menores. Un hecho que desconcertó fue que la mayor mortalidad ocurrió a concentraciones intermedias (180 t/ha), en periodos de exposición relativamente cortos (48 h).

CONCLUSIONES

Los lixiviados y los drenajes agrícolas adicionados con biosólidos contienen sales que pueden servir

como fertilizante para el desarrollo de *N. oculata*. Aunque con las concentraciones utilizadas se observaron efectos negativos, en condiciones naturales, la concentración de sales en los cuerpos de agua suele ser menor a la del medio Bold utilizado en este estudio.

Las CL_{50} obtenidas para los representantes del zooplancton, del necton y bentos (*L. quadridentata*, *O. niloticus* y *L. hoffmeisteri*) indican diferente grado de susceptibilidad, siendo el pez el más sensible y el tubífido el más tolerante, tanto para los lixiviados como para los drenajes agrícolas con suelo de tipo planosol eútrico de la región.

En general, los resultados obtenidos indican que la biota acuática se ve poco afectada por los biosólidos, por lo que la implementación de este subproducto como fertilizante en los cultivos recomendados, como los forrajes, no debe considerarse como un riesgo ambiental, a menos de que suceda algún derrame accidental de ellos o algún otro suceso que eleve la concentración, de tal manera, que se alcance en los cuerpos de agua las concentraciones que produjeron daño en los bioensayos realizados en este estudio. Por otro lado, también se tiene que considerar que aunque se utilicen concentraciones de 400 y 600 t/ha de biosólidos para la fertilización de los suelos de la región, sólo una fracción alcanza a llegar a los cuerpos de agua y afectar a la biota dulceacuática.

REFERENCIAS

- BELL, P.R.F. y I. ELMETRI, Some chemical factors regulating the growth of *Lyngbya majuscula* in Moreton Bay, Australia: importance of sewage discharges. *Hidrobiología*, 592, 359-371, 2007.
- BEREZINA, N. A. Tolerance of Freshwater Invertebrates to Changes in Water Salinity. *Russian Journal of Ecology*, 34 (4), 261-266, 2003.
- EL-SHAFI, S.A., *et al.*, Nitrogen recovery in an integrated system for wastewater treatment and tilapia production. *Environmentalist*, 27, 287-302, 2007.
- ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY, Evaluation of dredged material proposed for discharge in waters of the U.S. Testing Manual Office of waters (4305). *Inland Testing Manual*, Estados Unidos: E.P.A., 409pp, 1998.
- EPSTEIN, E. *Land application of sewage sludge and biosolids*. Estados Unidos: Lewis Publishers, 201 pp, 2003.
- FLORES, T. F. y P. L. FLORES, Los biosólidos de la planta tratadora de aguas residuales de la ciudad de Aguascalientes: Características y usos. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*, 33, 4-11, 2005.
- FLORES P. L., *et al.*, Estudio de la biodiversidad de artrópodos en suelos de alfalfa y maíz con la aplicación de biosólidos. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*, 40, 11-18, 2008.
- GIROVICH, M., Biosolids characterization, treatment and use: An overview in M. J. Girovich, (ed). *Biosolids treatment and Management. Processes for beneficial use*. Estados Unidos: Marcel Dekker, 1-46, 1996.
- KENNEDY, C.R., *The distribution and habitat of Limnodrilus Claparede (Oligochaeta: Tubificidae)*, *Oikos*, 16, 226-238, 1965.
- LEWIS, E.L. Escala práctica de salinidad 1978 y sus antecedentes. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 5 (1), 3-8, 1980.
- LIN, K.J. y S.P YO, The effect of organic pollution on the abundance and distribution of aquatic oligochaetes in an urban water basin, Taiwan. *Hydrobiologia*, 596, 213-223, 2008.
- MARTÍNEZ, M. J y P. A. ROJAS, Peces en "La Biodiversidad en Aguascalientes. Estudio de Estado". CONABIO/IMAE/UAA, 132-135, 2008.
- REYNOLDS, C.S. y J.W.G. LUND, The phytoplankton of a fan enrichment, soft water lake subject to intermittent hydraulic flushing (Grasmere, English Lake District). *Freshwater Biology*, 19 (3), 379-404, 1988.
- SECRETARÍA DE MEDIO AMBIENTE, RECURSOS NATURALES Y PESCA. Norma Oficial Mexicana NOM-001-ECOL-1996 que establece los límites máximos permisibles de contaminantes en las descargas de aguas residuales en aguas y bienes nacionales, 23 de abril de 2003.
- VOLLENWEIDER, A., *A Manual on Methods for measuring Primary Production in Aquatic Environments*. 2. ed, Inglaterra: Blackwell Scientific Publications, 225, 1974.
- WALLACE, R.L., *et al.*, *Guides to the identification of the microinvertebrates of the continental waters of the world (Zooplankton guides) 23 Rotifera*, Holanda: Backhuys, 229 pp, 2006.
- Fotografías propiedad del autor.

Un esquema de diferencias finitas que conserva la positividad de una ecuación modificada de Fisher-KPP

Jorge Eduardo Macías Díaz ¹
Javier Ruiz Ramírez ¹

RESUMEN

Se presenta un esquema no estándar de diferencias finitas para aproximar las soluciones positivas de una ecuación modificada de Fisher-KPP que aparece en el estudio de la dinámica de poblaciones. El método es consistente de orden cuadrático y provee aproximaciones no negativas para cualquier elección de un perfil inicial positivo. La técnica fue validada contra soluciones analíticas para un problema de valor inicial.

ABSTRACT

We introduce a non-standard finite-difference scheme to approximate positive solutions of a modified Fisher-KPP equation appearing in the investigation of population dynamics. The method is consistent to the second order, and it provides non-negative approximations for non-negative initial profiles. The method is validated against known analytical solutions for an initial-boundary-value.

Palabras clave: Problema hiperbólico de valor inicial, esquema de diferencias finitas, positividad, ecuación linealizada de Fisher-KPP.

Key words: Hyperbolic initial-value problem, finite-difference scheme, positivity, linearized Fisher-KPP equation.

Recibido: 13 de agosto de 2009, aceptado: 6 de enero de 2010

¹ Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jemacias@correo.uaa.mx., j_soulmind@yahoo.com.

INTRODUCCIÓN

Las condiciones de no negatividad en las soluciones de modelos matemáticos son de gran importancia cuando las variables a estudiar son medidas en unidades absolutas. Por ejemplo, cuando la variable de interés es la densidad de población en biología matemática o, cuando la temperatura es manipulada en Kelvin, entonces, el requerimiento de positividad en las soluciones se convierte en una condición física significativa que debe ser observada.

Hoy día, algunos problemas físicos asociados a la ecuación de onda con amortiguamiento (Mickens y Jordan) y la evolución temporal de poblaciones (Mickens, Moghadas y Moghadas) han sido resueltos a través de varias técnicas numéricas que fueron diseñadas con el objetivo de garantizar que las aproximaciones fuesen no negativas. En su mayoría, la construcción de estas técnicas está basada en la noción de esquemas de diferencias finitas no estándares introducidas (Mickens). Estos métodos han generado resultados satisfactorios tanto para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas de segundo orden como para elípticas. En este trabajo se estudia un modelo hiperbólico que describe la densidad de ciertas poblaciones, basado en una generalización de un método no estándar de diferencias finitas propuesto (Mickens y Jordan).

Los modelos parabólicos han sido empleados con un éxito parcial en cuanto a la descripción de fenómenos difuso-reactivos. Como ejemplo, Fisher y Kolmogorov *et al.* estudiaron simultáneamente la propagación de genes mutantes que son cruciales para la supervivencia de poblaciones distribuidas en hábitats lineales. Su modelo llegó

a ser conocido como la ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (en la literatura también se puede encontrar como la ecuación de Fisher-KPP o simplemente como la ecuación de Fisher). Su expresión es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (1)$$

Aquí κ juega el papel del coeficiente de difusión, el cual es un número real positivo, γ , $f(u) = mu(1-u)$, siendo m una constante también positiva. La ecuación de Fisher-KPP es el caso más simple de una reacción no lineal difuso reactiva y ha sido extensivamente estudiada tanto por la literatura matemática como por la física y biológica. A pesar de la importancia que ha tenido desde su concepción, en 1937, la ecuación de Fisher presenta la desventaja de que cualquier perturbación en el medio descrito por este modelo, se propaga con una rapidez infinita. Para poder salvar esta dificultad, se han propuesto varias modificaciones de la misma, siendo las generalizaciones a ecuaciones diferenciales parciales no lineales hiperbólicas las más interesantes. De hecho, la inclusión de un tiempo de relajación ha sido aplicada satisfactoriamente en el estudio de la dinámica de poblaciones de parásitos (Haderler y Dietz), la propagación de virus en placas cuando se considera el tiempo de retraso atribuido a la reproducción del mismo (Fort y Mendez) y la migración de poblaciones durante el periodo Neolítico en Europa (Fort y Mendez), entre otras situaciones realistas.

El modelo postulado en este artículo puede ser considerado como una generalización de la ecuación de Heaviside propuesta para el estudio del fenómeno de transferencia de calor para escalas de tiempo del orden de zeptosegundos (MarciaK-Kozłowska y Kosłowski), la investigación de la ecuación modificada de Schrödinger propuesta para describir las interacciones de los electrones dentro de los átomos en una escala de tiempo de los attosegundos (MarciaK-Kozłowska y Kosłowski), y de la ecuación modificada de Klein-Gordon que fue empleada para estudiar la propagación del estado térmico inicial del universo (Kosłowski y MarciaK-Kozłowska). Como se mencionará al final de este trabajo, este artículo intenta construir un puente que comunique el estudio de la ecuación de onda amortiguada a través de esquemas no estándares de diferencias

finitas que conservan la positividad de las soluciones, y el correspondiente estudio de las versiones hiperbólicas generalizadas de la ecuación de Fisher-KPP que incluyen, entre otras características, la presencia de coeficientes no constantes.

Es importante mencionar que los métodos numéricos que se presentan en este trabajo han sido diseñados siguiendo los paradigmas postulados por Mickens. En particular, se aprovecha la idea de representar a las derivadas parciales de primer orden como una suma distribuida de diferencias adelantadas y centradas. Además, se aproximan las derivadas parciales de segundo orden con respecto a una variable fija utilizando la aproximación de Dufort-Fraenkel (Lari), esto con el objetivo de simplificar la expresión de los esquemas explícitos que resulten.

En la segunda sección de este artículo, presentamos la ecuación lineal hiperbólica de interés. A continuación, se introduce la notación numérica y los esquemas no estándares de diferencias finitas para aproximar nuestro problema. Luego, se lleva a cabo una validación sistemática y detallada del código computacional, contrastándolo con soluciones exactas derivadas anteladamente. Finalmente, el trabajo termina con una sección de conclusiones.

Problema matemático

Sean τ , κ y β números reales positivos, sea γ una constante no negativa y sea I un intervalo cerrado y acotado del sistema de los números reales \mathbb{R} . Asíumase que u es una función de (x, t) , donde $x \in I$ y $t > 0$. El punto de partida de esta investigación es la ecuación diferencial lineal parcial y homogénea con coeficientes constantes:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \beta^2 u = 0. \quad (2)$$

Cabe mencionar que esta ecuación puede ser fácilmente identificada con otras en ciertos casos especiales. Por ejemplo, ésta se transforma en la ecuación de onda clásica con rapidez de propagación igual a $\sqrt{\kappa/\tau}$ en el caso en que ambos γ y β sean iguales a cero; la ecuación de onda amortiguada con la misma rapidez de propagación aparece en la ecuación (2) si $\beta = 0$. La ecuación de Helmholtz (Zwillinger) – una expresión derivada de la ecuación de Maxwell para estudiar la propagación de

ondas – es obtenida si ambos, τ y γ , son iguales a cero. La ecuación clásica de Schrödinger con potencial constante $V = -\beta^2$ aparece cuando $\tau = 0$, $\gamma = -i\hbar$ y $\kappa = \hbar^2/(2m)$ donde \hbar denota la constante original de Planck dividida por 2π , y m representa la masa; por otro lado, la ecuación de Klein-Gordon amortiguada de la mecánica cuántica relativista resulta de (2) si β es un número complejo puro. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, en este trabajo se enfoca la atención al caso cuando γ es un número real no negativo y τ , κ y β^2 son positivos.

Otras variantes de (2) ecuación aparecen en varias ramas de la física, química y biología. Como ejemplo, la ecuación linealizada de Landau-Ginzburg de la superconductividad (Kudryavtsev), se obtiene si $\gamma = 0$, y la ecuación de Maxwell-Cattaneo con uso en la termodinámica se deriva de (2) cuando $\beta = 0$. Más relevantemente, (2) es una modificación de la ecuación de Heaviside (también conocida como la ecuación del telégrafo), la ecuación clásica de Heaviside siendo obtenida de (2) si β es un número complejo puro.

Problema en un dominio acotado

En el terreno de la física, γ es difícilmente cero. Además, la ecuación (2) está acompañada de las condiciones iniciales y/o de frontera en el conjunto I . Para propósitos de validación será de particular importancia considerar el conjunto de condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, & t > 1, \\ u(1,t) = 0, & t > 1, \end{cases} \quad (3)$$

asociadas con la ecuación modificada de Fisher-KPP bajo estudio, en el intervalo $I = [0,1]$. Después de aplicar la técnica de separación de variables, la solución analítica con las condiciones de valor inicial y de frontera generada por la ecuación (2) y las condiciones (3), es:

$$u(x,t) = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2\tau}\right) \sin(\pi x) \Psi(t) \quad (4)$$

donde

$$\Psi(t) = \begin{cases} \cosh(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \sinh(\omega t), & \begin{cases} \beta < \pi \text{ y } \tau < \tau_c, \\ \beta > \pi, \end{cases} \\ 1 + \frac{\gamma}{2\tau} t, & \beta \neq \pi \text{ y } \tau = \tau_c, \\ \cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \sin(\omega t), & \beta < \pi \text{ y } \tau > \tau_c, \end{cases} \quad (5)$$

y

$$\tau_c = \frac{\gamma^2}{4(\pi^2 - \beta^2)}, \quad \Delta = \frac{\gamma^2 - 4\tau(\pi^2 - \beta^2)}{\gamma^2}, \quad \omega = \frac{\gamma}{2\tau} \sqrt{|\Delta|} \quad (6)$$

Esquema de diferencias finitas -Nomenclatura

En la presente sección, se introduce el esquema de diferencias finitas no estándar utilizado para aproximar las soluciones de (2). En lo que resta de la misma, I representará un intervalo fijo y cerrado de la forma $[a,b]$, y las soluciones de la ecuación modificada de Heaviside serán aproximadas en el intervalo temporal $[0,T]$. Con este fin, fijaremos particiones regulares $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ de los intervalos I y $[0,T]$, respectivamente, de norma Δx y Δt en cada caso. Con esta notación, u_n^k denotará la aproximación numérica del valor de u en (x_n, t_k) , para $n = 0, 1, \dots, N$ y $k = 0, 1, \dots, M$.

Después de haberse desarrollado el análisis no dimensional de (2), es fácil observar que una simplificación para su estudio se encuentra al alcance al tomar $\kappa = \gamma = 1$, una convención que se seguirá a partir de este punto en adelante. Además, por simplicidad, se empleará la siguiente notación estándar:

$$\delta_x^{(2)} u_n^k = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{(\Delta x)^2}, \quad \delta_t^{(2)} u_n^k = \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (7)$$

así como la nomenclatura (no tan estándar)

$$\delta_{t,\alpha} u_n^k = (1-\alpha) \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_n^k}{\Delta t} + \alpha \frac{u_n^{k+1} - u_n^{k-1}}{2\Delta t}, \quad \bar{\delta}_x^{(2)} u_n^k = \frac{u_{n+1}^k - (u_n^{k+1} + u_n^{k-1}) + u_{n-1}^k}{(\Delta x)^2}, \quad (8)$$

donde se sobreentiende que α es un número real. Es claro que las fórmulas para las segundas diferencias centrales en (7) aproximan las segundas derivadas parciales de u respecto a

x y t , respectivamente, mientras que la primera expresión en la ecuación (8) aproxima la primera derivada parcial de u respecto a t , y la segunda aproxima la segunda derivada respecto a x . Cabe señalar que el parámetro α es un parámetro de ponderación entre dos aproximaciones de la primera derivada con respecto al tiempo. En estos términos, la primera ecuación en (8) es una manera no estándar de aproximación a la primera derivada temporal.

-Esquema de diferencias finitas

El esquema de diferencias finitas no estándar utilizado para aproximar las soluciones de (2) es:

$$\tau \delta_t^{(2)} u_n^k - \delta_x^{(2)} u_n^k + \delta_{t,\alpha} u_n^k - \frac{\beta^2}{2} [u_{n+1}^k + u_{n-1}^k] = 0. \quad (9)$$

Es importante mencionar que el tipo de segunda diferencia utilizada en este esquema para aproximar la segunda derivada parcial de u respecto a x es conocida como la aproximación de Dufort-Frankel (Lari), la cual fue empleada exitosamente en el estudio de la ecuación de onda clásica con amortiguamiento (Mickens y Jordan). Esta última expresión es obtenida de la anterior al reemplazar u_n^k por $(u_n^{k+1} + u_n^{k-1})/2$. Una aplicación de los criterios de Neumann fácilmente expone que el esquema antes presentado es estable bajo la correcta selección de los parámetros computacionales. No es difícil comprobar que el esquema de diferencias finitas puede ser reescrito de la manera siguiente:

$$k_1 u_n^{k+1} = k_2 u_n^k + k_3 u_n^{k-1} + k_4 (u_{n+1}^k + u_{n-1}^k), \quad (10)$$

donde las constantes $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathfrak{R}$ dependen de los parámetros computacionales Δx y Δt , y de los del modelo τ, κ, γ y β^2 . De hecho, la **Tabla 1** proporciona una expresión concreta para cada constante.

Tabla 1. Relación de la expresión de cada parámetro $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathfrak{R}$ con la expresión explícita del esquema considerado

Coefficientes

k_1	k_2	k_3	k_4
$\frac{\tau}{\Delta t} + R + 1 - \frac{\alpha}{2}$	$\frac{2\tau}{\Delta t} + 1 - \alpha$	$\frac{\alpha}{2} - \frac{\tau}{\Delta t} - R$	$R + \frac{\beta^2 \Delta t}{2}$

Por simplicidad se define a $R = \Delta t / (\Delta x)^2$.

- Positividad

En esta sección, se establecen condiciones en los parámetros k_1, k_2, k_3 y k_4 en (21), con el objeto de garantizar que las aproximaciones en el $(k+1)$ -ésimo paso de tiempo sean no negativas, asumiendo que las aproximaciones en los k y $(k-1)$ -ésimos pasos son no negativas. Definase

$$R = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (11)$$

Sea k_3 - el coeficiente de u_n^{k-1} - igual a R . Es posible establecer rápidamente que el valor de α y los valores de los coeficientes de u_n^{k+1} y u_n^k son, respectivamente,

$$\alpha = 2 \left(2R + \frac{\tau}{\Delta t} \right), \quad k_1 = 1 - R, \quad k_2 = 1 - 4R \quad (12)$$

Se opta por forzar la igualdad con el objetivo de simplificar la expresión del esquema explícito; es decir, igualamos $R = \frac{1}{4}$. Bajo estas circunstancias, el esquema se transforma en:

$$u_n^{k+1} = \frac{u_n^{k-1} + (1 + 2\beta^2 \Delta t)(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k)}{3} \quad (13)$$

Por conveniencia, la **Tabla 2** presenta el valor de α que hace que el coeficiente k_3 ser igual a R , y los valores de los coeficientes k_1, k_2 y k_3 en términos de α .

Validación computacional

Considérese el problema con valor inicial-frontera descrito por la versión no lineal de la ecuación diferencial (2) y las condiciones (6). Además, con el propósito de generar soluciones no negativas de este problema de valor mixto, se seleccionan los parámetros $\beta = 1$ y $\tau = 0.0001 / (2\pi)^2$. Computacionalmente, se fijan $\Delta t = 0.0004$ y $\Delta x = 0.04$, de forma que $R = \frac{1}{4}$. Bajo estas circunstancias, el coeficiente k_2 para este esquema es cero. Se procede a aproximar las soluciones del problema con valor inicial y de frontera, utilizando el esquema para diferentes valores de tiempo. Los resultados de las simulaciones y las soluciones exactas son presentados en la **Figura 1**. Éstos, exhiben que, bajo las condiciones computacionales antes mencionadas, las aproximaciones se encuentran en excelente acuerdo con los resultados esperados.