INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 44, (17-21), Mayo-Agosto 2009

Una generalización algebraica del teorema de Cantor-Bernstein a módulos inyectivos puros sobre dominios enteros

Jorge Eduardo Macías Díaz [1]
Bernardo Isidro Guerrero Macías [1]

RESUMEN

Este artículo presenta una versión del teorema de Cantor-Bernstein para módulos inyectivos puros sobre dominios enteros. Los resultados obtenidos en este trabajo generalizan el famoso teorema de Bumby para módulos inyectivos. Hacia el final de esta disertación se proponen posibles vías de generalización de los resultados presentados.

ABSTRACT

Motivated by the algebraic version of the Cantor-Bernstein theorem in the form of Bumby´s theorem for injective modules, we provide a generalization to pure-injective modules over integral domains. Further possible directions of generalization are mentioned in the closing remarks.

INTRODUCCIÓN

El teorema de Cantor-Bernstein establece que si dos conjuntos satisfacen la propiedad de que la cardinalidad de cada uno de ellos es menor o igual a la cardinalidad del otro, entonces ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Esto completa la demostración de que la relación de cardinalidad es de orden parcial (Jech, 1978). Ulteriormente, Bumby logró una generalización de dicho resultado para estructuras algebraicas. Más precisamente, Bumby demostró que dos módulos inyectivos son isomorfos si cada uno lo es a un submódulo del otro (Bumby, 1965).

Debido a la importancia que reviste el problema de generalizar resultados matemáticos con el fin de unificar teorías aparentemente distintas, es necesario tratar de extender el teorema de Bumby a estructuras algebraicas más genéricas. Por ello, en este artículo se presentará una generalización de dicho resultado a una categoría de módulos que contiene propiamente a la de módulos inyectivos. Durante esta exposición, se hará uso de resultados de la teoría de módulos que pueden ser encontrados en Fuchs y Salce, (2000).

MÓDULOS INYECTIVOS

Un módulo Q sobre un anillo A es **inyectivo** si es un sumando directo de cada módulo que lo contenga como submódulo. Equivalentemente, para cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de R-módulos y para cada homomorfismo Φ de A a Q, hay un homomorfismo Ψ de B en Q, que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[r] \arrow[dl, "\psi"] & C \arrow[r] & 0 \\ & Q & & & \end{tikzcd}$$

Las siguientes características son importantes para los módulos inyectivos:

Palabras clave: Módulos inyectivos, módulos inyectivos puros, teorema de Cantor-Bernstein, teorema de Bumby.
Key words: *Injective modules, pure-injective modules, Cantor-Bernstein's theorem, Bumby's theorem.*

Recibido: 28 de noviembre de 2008, aceptado: 18 de febrero de 2009

[1] Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jemacias@correo.uaa.mx

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 44, (17-21), Mayo-Agosto 2009

A) Un producto directo de módulos es inyectivo si y solamente si cada factor directo es inyectivo.

B) Cada módulo se puede encajar como submódulo en un módulo inyectivo.

C) Cada R-módulo inyectivo *Q* que contiene un módulo *M* como submódulo, contiene un módulo inyectivo mínimo *E* con la propiedad de que *M* está contenido en *E*. Por otra parte, cualquiera de los dos módulos inyectivos mínimos que contienen a *M* son isomorfos sobre *M*. Un módulo inyectivo mínimo que contiene a *M* se llama la **cápsula inyectiva** de *M* y se denota por $E_R(M)$. Particularmente, cada módulo inyectivo es su propia cápsula inyectiva.

D) La cápsula inyectiva de un producto directo de módulos es isomorfo al producto directo de las cápsulas inyectivas, es decir:

$$E_R\left(\prod_{\alpha\in\Omega} M_\alpha\right) \cong \prod_{\alpha\in\Omega} E_R(M_\alpha)$$

E) Si A es un submódulo de un R-módulo B, entonces la cápsula inyectiva de A es un sumando directo de la cápsula inyectiva de B.

Nuestro punto de partida en esta etapa de nuestra investigación es el siguiente teorema:

Teorema 1. (Bumby, 1965) *Dos módulos inyectivos son isomorfos si cada uno de ellos es isomorfo a un submódulo (sumando) del otro.*

Como un caso particular tenemos el siguiente resultado importante:

Corolario 2. *Dos módulos, cada uno de los cuales es isomorfo a un submódulo del otro, tienen cápsulas inyectivas isomorfas.*

Debido a la importancia de este resultado para establecer la isomorfía de dos módulos inyectivos, quisiéramos determinar si existe una clase más grande que la de los módulos inyectivos para la cual cualquiera de sus dos miembros son isomorfos siempre que sean isomorfos a submódulos del otro.

Nuestro siguiente ejemplo demuestra que no es necesariamente cierto que dos módulos arbitrarios sean isomorfos a submódulos del otro.

Ejemplo 3. Sean *F* un *R*-módulo libre de rango contable infinito (donde *R* no es autoinyectivo), *M* la cápsula inyectiva $E_R(F)$ de *F*, y $N=F\oplus E_R(F)$. Note que *F* es isomorfo a $F\oplus F$. Por lo tanto, $E_R(F)$ es isomorfo a $E_R(F)\oplus E_R(F)$. Obviamente, *M* y *N* son isomorfos a submódulos del otro; sin embargo, no son isomorfos.

Los siguientes son ejemplos de módulos que no son inyectivos, para los cuales se satisface la característica deseada:

Ejemplo 4. Grupos abelianos totalmente factorizables, es decir, grupos abelianos que son sumas directas de subgrupos libres de torsión de rango 1. Ejemplos de esta clase de grupos conmutativos son grupos abelianos libres.

Ejemplo 5. Módulos totalmente factorizables sobre un dominio *R*, es decir, *R*-módulos que son sumas directas de submódulos libres de torsión de rango 1. Estos módulos tienen la propiedad de que sus sumandos directos son otra vez totalmente factorizables. Más aún, cualquiera de las dos descomposiciones directas de un módulo totalmente factorizable sobre un dominio de valuación en términos de submódulos libres de torsión de rango 1 son isomorfas.

Ejemplo 6. Módulos libres sobre anillos conmutativos con identidad. Las categorías citadas en los ejemplos anteriores satisfacen la propiedad bajo estudio en este artículo debido al hecho de que, dadas dos estructuras algebraicas en cualquiera de dichas categorías con la propiedad de que cada una de ellas es isomorfa a una subestructura de la otra, entonces ambas son sumandos directos de la otra.

MÓDULOS INYECTIVOS PUROS

En esta sección, introducimos la *RD*-inyectividad e inyectividad pura de módulos sobre dominios enteros. Ambas son generalizaciones de inyectividad y son imprescindibles en la extensión del teorema de Bumby. En adelante, *R* denota un dominio entero.

Sean *M* y *N* dos módulos sobre *R*, tales que *M* es un submódulo de *N*. Decimos que *M* es **relativamente divisible** en *N* si dados cualesquier elementos *r* y *m* en *R* y *M*, respectivamente, la solubilidad de la ecuación $rx=m$ en *N* implica su solubilidad en *M*. Un módulo *M* sobre un dominio entero *R* es *RD*-**inyectivo** si es un sumando directo en cada módulo que lo contenga como submódulo relativamente divisible.

Equivalentemente, para cada sucesión *RD*-exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de *R*-módulos y para cada homomorfismo Φ de *A* en *Q*, hay un homomorfismo Ψ de *B* en *Q*, que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & A \longrightarrow & B \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & \phi \downarrow \;\; \swarrow \psi & & & & \\ & Q & & & & \end{array}$$

Claramente, cada módulo inyectivo es *RD*-inyectivo.

Sea *M* un submódulo de *N*. Decimos que *M* es **puro** en *N* si la solubilidad en *N* de cualquier sistema de ecuaciones en *M* con coeficientes en *R* implica su solubilidad en *M*. Una clase de módulos más grandes que la clase de módulos *RD*-inyectivos es la de módulos **inyectivos puros**, que es la de todos los módulos que son sumandos directos de cada módulo que los contenga como submódulos puros. Evidentemente, un *R*-módulo *Q* es inyectivo puro si y solamente si para cada sucesión exacta pura

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

de *R*-módulos y para cada homomorfismo Φ de *A* en *Q*, hay un homomorfismo Ψ de *B* en *Q* que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & A \longrightarrow & B \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & \phi \downarrow \;\; \swarrow \psi & & & & \\ & Q & & & & \end{array}$$

Según lo esperado, los módulos inyectivos puros y *RD*-inyectivos tienen propiedades similares a las de módulos inyectivos (Fuchs y Salce, 2000):

A) Un producto directo de módulos es inyectivo puro (respectivamente, *RD*-inyectivo) si y solamente si cada factor es inyectivo puro (respectivamente, *RD*-inyectivo).

B) Cada módulo se puede encajar como submódulo puro (respectivamente, relativamente divisible) en un módulo inyectivo puro (respectivamente, *RD*-inyectivo).

C) Cada *R*-módulo inyectivo puro *Q* (respectivamente, *RD*-inyectivo) que contiene un módulo *M* como submódulo puro (respectivamente, relativamente divisible) contiene un módulo inyectivo puro (respectivamente *RD*-inyectivo) mínimo *E*, con la característica que *M* está contenido en *E*. Por otra parte, cualquiera de los dos módulos inyectivos puros (respectivamente *RD*-inyectivos) mínimos que contienen a *M* son isomorfos sobre *M*. Un *R*-módulo inyectivo puro mínimo que contiene a *M* como submódulo puro es llamado la **cápsula inyectiva pura** de *M*, y se denota por $PE_R(M)$ o, simplemente, por *PE(M)*. Similarmente, un módulo *RD*-inyectivo mínimo que contiene *M* como submódulo relativamente divisible es llamado la **cápsula *RD*-inyectiva** de *M*. En particular, cada módulo inyectivo puro es su propia cápsula inyectiva pura.

D) La cápsula inyectiva pura de un producto directo de módulos es isomorfo al producto directo de las cápsulas inyectivas puras. Es decir:

$$PE_R\left(\prod_{\alpha\in\Omega} M_\alpha\right) \cong \prod_{\alpha\in\Omega} PE_R(M_\alpha)$$

E) Si *A* es isomorfo a un submódulo puro (respectivamente, relativamente divisible) de un *R*-módulo *B*, entonces la cápsula inyectiva pura (respectivamente, la cápsula *RD*-inyectiva) de *A* es isomorfa a un sumando directo de la cápsula inyectiva pura (respectivamente, la cápsula *RD*-inyectiva) de *B*.

Lo que sigue es nuestra generalización del teorema 1 a módulos inyectivos puros sobre dominios enteros.

Teorema 7. Dos módulos inyectivos puros sobre un dominio entero son isomorfos si cada uno de ellos es isomorfo a un submódulo puro del otro.

Demostración. Asumimos que *A* y *B* son módulos inyectivos puros isomorfos a un sumando directo del otro, por ejemplo, $A=H_0\oplus B_1$ y $B_1=K_0\oplus A_1$, con A_1 y B_1 isomorfos a *A* y *B*, respectivamente. Por otra parte, $A_1=H_1\oplus B_2$ y $B_2=K_1\oplus A_2$, con A_2 y B_2 isomorfos a *A* y *B*, respectivamente. Note entonces que

$$A = (H_0 \oplus H_1) \oplus (K_0 \oplus K_1) \oplus A_2$$

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
Número 44, (17-21), Mayo-Agosto 2009

Más generalmente, para cada número entero positivo n,

$$A = (\oplus_{m=0}^{n} H_m) \oplus (\oplus_{m=0}^{n} K_m) \oplus A_{n+1}$$

De manera similar, fácilmente se prueba que:

$$B_1 = (\oplus_{m=1}^{n} H_m) \oplus (\oplus_{m=0}^{n-1} K_m) \oplus B_{n+1}$$

Para cada $n \geq 1$, sea $C_n = (\oplus_{m=1}^{n} H_m) \oplus (\oplus_{m=0}^{n-1} K_m)$. Obviamente, la cadena

$$C_1 \hookrightarrow C_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C_n \hookrightarrow \cdots (n \geq 1)$$

es ascendente de submódulos puros de A y de B_1. Por lo tanto,

$$C = \cup_{n\geq 1} C_n = (\oplus_{m=0}^{\infty} H_m) \oplus (\oplus_{m=0}^{\infty} K_m)$$
$$\cong \oplus_{m=0}^{\infty} (H_m \oplus K_m) = H_0 \oplus C$$

es puro en A y en B_1. Puesto que A y B_1 son inyectivos puros, contienen el casco puro-inyectivo de Q de C. Por otra parte, $A=Q \oplus K$ y $B_1=Q \oplus H$. Observe que $Q=PE(C)$ es isomorfo a $PE(H_0) \oplus PE(C)=H_0 \oplus Q$, esta última igualdad en vista de que tanto H_0 como Q son módulos inyectivos puros. Por lo tanto,

$$A = H_0 \oplus B_1 = H_0 \oplus (Q \oplus H) \cong Q \oplus H = B_1$$

concluimos que A y B son isomorfos.

Una consecuencia inmediata de este resultado es el corolario siguiente:

Corolario 8. *Cualesquier dos módulos sobre un dominio entero tienen cápsulas inyectivas puras que son isomorfas si cada uno de ellos es isomorfo a un submódulo puro del otro.*

Demostración. Si A y B son isomorfos a submódulos puros del otro, sus cápsulas inyectivas puras, $PE(A)$ y $PE(B)$, respectivamente, son módulos inyectivos puros isomorfos a sumandos directos del otro. Por el teorema 7, $PE(A)$ y $PE(B)$ deben ser isomorfos.

SUMAS DIRECTAS DE MÓDULOS INYECTIVOS PUROS

Nuestro último objetivo es generalizar el teorema 7 a las sumas directas de módulos inyectivos puros. Para hacer esto, necesitamos introducir la propiedad de intercambio de módulos.

Un R-módulo M se dice que tiene la propiedad del intercambio si para cualquier descomposición

$$A = M' \oplus H = \oplus_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$$

de un R-módulo arbitrario A, donde M' es isomorfo a M, existen submódulos B_α de A_α para $\alpha \in \Omega$, tal que

$$A = M' \oplus (\oplus_{\alpha \in \Omega} B_\alpha)$$

Se sigue que, para cada $\alpha \in \Omega$, B_α es un sumando de A_α.

Los módulos inyectivos y, más generalmente, los módulos RD-inyectivos y los inyectivos puros sobre dominios enteros satisfacen la propiedad del intercambio. En particular, los siguientes resultados son válidos para estas clases de módulos.

Lema 9. (Warfield, 1969) *Sea R un dominio entero. Cualesquier dos descomposiciones de un R-módulo en sumas directas contables de módulos que satisfacen la propiedad del intercambio tienen refinamientos isomorfos.*

Lema 10. (Warfield, 1969) *Sea M un módulo sobre un dominio entero que es una suma directa de módulos inyectivos puros contablemente generados. Entonces cualquier sumando de M es suma directa de módulos inyectivos puros y cualesquier dos descomposiciones de M tienen refinamientos isomorfos.*

En nuestra investigación, deseamos establecer que dos módulos sobre un dominio entero que son sumas directas de módulos inyectivos puros son isomorfos si cada uno de ellos es isomorfo a un submódulo del otro. Cabe señalar que el caso de productos directos es trivial, en vista de que productos directos de módulos inyectivos puros son nuevamente módulos inyectivos puros.

REFERENCIAS

- BUMBY, R. T., Modules which are isomorphic to submodules of each other. *Archiv der Math.*16, pp. 184-185, 1965.
- COUCHOT, F., Pure-injective hulls of modules over valuation rings. *J. Pure and Appl. Algebr.* 207, pp. 63-76, 2006.
- FACCHINI, A., Decomposition of algebraically compact modules. *Pacific J. of Math.* 116, pp. 25-37, 1985.
- FUCHS, L. y SALCE, L., *Modules over Valuation Domains.* New York: Marcel Dekker Inc., 1985.
- FUCHS, L. y SALCE, L., *Modules over Non-Noetherian Domains*, New York: American Mathematical Society 2000.
- HOLZSAGER, R y HALLAHAN, C., Mutual direct summands. *Archiv Math.* 25, pp. 591-592, 1974.
- JECH, T. *Set Theory*. New York: Academic Press, 1978
- WARFIELD, R. B., Decomposition of injective modules. *Pacific J. of Math.* 31, pp. 263-276, 1969.
- WARFIELD, R. B., Purity and algebraic compactness for modules. *Pacific J. of Math.* 28, pp. 699-719, 1969.