

# Análisis de un sistema de comunicaciones afectado por los desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh\*

Analysis of a Communication System affected by flat and slow Rayleigh Fading

Análise de um sistema de comunicações afetado pelo desvanecimento plano e lento tipo rayleigh

*Camilo Torres Zambrano*\*\*

*Carlos Iván Páez Rueda*\*\*\*

---

\* Fecha de recepción: 1 de marzo de 2007. Fecha de aceptación para publicación: 18 de enero de 2008. Este artículo se deriva del trabajo de grado para optar al título de Maestría en Ingeniería Electrónica del primer autor, denominado *Modulación adaptable para voz y datos en canales variantes en el tiempo*.

\*\* Ingeniero electrónico, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Estudiante de la Maestría en Ingeniería Electrónica, Pontificia Universidad Javeriana. Correo electrónico: [camilo.torres@javeriana.edu.co](mailto:camilo.torres@javeriana.edu.co)

\*\*\* Ingeniero electrónico, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Máster en Ingeniería Electrónica, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Profesor asistente, Departamento de Electrónica, Pontificia Universidad Javeriana. Correo electrónico: [paez.carlos@javeriana.edu.co](mailto:paez.carlos@javeriana.edu.co)

### Resumen

En este artículo se presentan los resultados de desempeño de un sistema de comunicaciones digitales, conformado por una modulación M-ary QAM y un canal afectado por los desvanecimientos multitraectoria plano y lento tipo Rayleigh con ruido AWGN limitado en la banda. Los resultados se compararon con algunas probabilidades de error teóricas para este tipo de canales. Las curvas de desempeño halladas permitieron encontrar unas nuevas cotas para el desempeño del sistema, las cuales son valiosas para el cálculo simplificado de radioenlaces.

### Palabras clave

Modulación de luz, sistemas de telecomunicación, métodos de Montecarlo, simulación por computador.

### Abstract

In this paper, we present the performance of a digital communication system made up by a modulation M-ary AQM and a channel with a flat, slow multipath fading type Rayleigh with AWGN noise limited in the band. The results found are compared with some theoretical error probabilities for this type of channel. The curves presented allowed us to find a new approach for this kind of system, which is valuable for simplified measurements of radio links.

### Key words

Light modulation, telecommunication systems, Monte Carlo methods, computer simulation.

### Resumo

No presente artigo apresentam-se os resultados do desempenho de um sistema de comunicações digitais conformado por uma modulação M-ary QAM e um canal afetado pelo desvanecimento multi-trajetória de tipo plano e lento tipo Rayleigh com ruído AWGN limitado na banda. Os resultados encontrados são comparados com algumas probabilidades de erro teóricas para esse tipo de canais. As curvas de desempenho encontradas permitiram achar novos níveis para o desempenho do sistema, as quais são valiosas para o cálculo simplificado de radio enlaces.

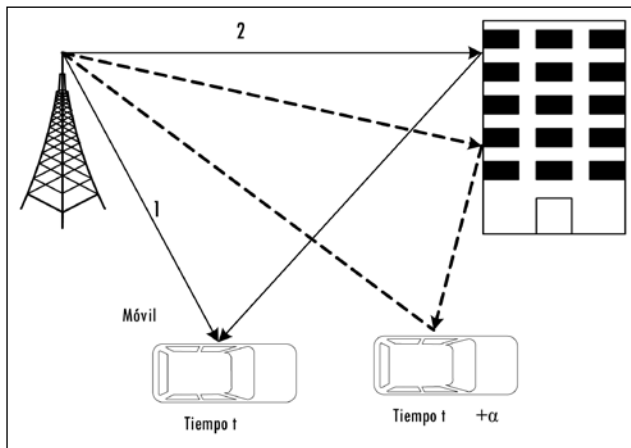
### Palavras chaves

Modulação M-ary QAM, canal AWGN, envolvente complexa, simulação Monte Carlo.

## Introducción

El siglo XXI se ha caracterizado por el incremento exponencial de las soluciones inalámbricas para los problemas relacionados con las telecomunicaciones. Al utilizar un canal de radiofrecuencia como medio de transmisión no guiado de un sistema de comunicación, este debe combatir todos los fenómenos que se presenten, en particular el desvanecimiento multirrayectoria. Este fenómeno, cuya característica usualmente es variante en el tiempo, se produce por la velocidad de movimiento del transmisor o del receptor o por la disposición variante de los objetos presentes en el canal, causantes de la reflexión, la refracción y la dispersión de la onda transmitida, como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1. Desvanecimiento multirrayectoria



Fuente: presentación propia de los autores.

En este artículo se presentan los resultados de desempeño de la modulación M-ary QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) en un canal de comunicaciones afectado por desvanecimientos multirrayectoria plano y lento de tipo Rayleigh,

enmarcado dentro del trabajo de investigación denominado *Modulación adaptable para voz y datos en canales variantes en el tiempo* (Torres, 2007). Los resultados del modelo de simulación planteado y su correspondiente validación abren la posibilidad de continuar con el diseño de un novedoso esquema de modulación de características adaptables, que permita simultáneamente transferir información de dos tipos de tráfico, cuyas medidas de desempeño en el enlace son disímiles, como son las generadas por el tráfico de aplicaciones de voz y datos.

Como metodología de análisis se escogió la técnica de simulación por medio de la envolvente compleja, que tiene como ventajas trasladar la complejidad del problema a un modelado particular del sistema de comunicaciones particular, una implementación eficiente en *software*, un análisis estadístico pertinente y un costo computacional inherente. Con esta técnica de simulación aplicada a las telecomunicaciones se pueden crear herramientas de diseño y análisis asistido por computador, que permiten predecir el desempeño de los sistemas bajo condiciones del canal mucho más complejos y, por ende, determinar la eficiencia de los protocolos que combaten sus efectos (Woerner *et al.*, 1994; Tranter y Kosbar, 1994; Shanmugan, 1994).

A continuación se exponen algunos antecedentes teóricos relacionados con el sistema de comunicaciones que se modeló y se documentan algunos resultados teóricos de desempeño, referidos en la literatura, para la modulación M-ary QAM. Luego se presenta el modelo de simulación para encontrar las medidas de desempeño de la modulación M-ary QAM en un canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), limitado en banda, y en un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh.

Después se presentan y se discuten los resultados obtenidos a través de la implementación del modelo del sistema en *software*, comparados con los resultados teóricos encontrados en la literatura. A partir de los resultados obtenidos se plantea una nueva cota teórica que permite encontrar el desempeño del sistema de forma simple y que resulta valiosa para el cálculo simplificado de radioenlaces. Finalmente, se exponen las conclusiones y la perspectiva del trabajo realizado.

## **1. Antecedentes de la teoría de comunicaciones digitales**

A continuación se presentan los antecedentes teóricos relacionados con la técnica de análisis escogida y el sistema de comunicaciones M-ary QAM.

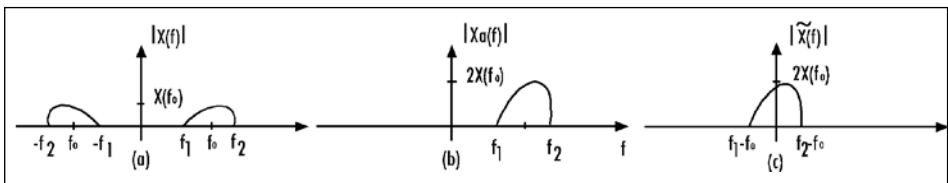
### 1.1 Teoría de la envolvente compleja

La simulación es una actividad indispensable en el diseño y análisis de sistemas de comunicaciones, especialmente cuando se analizan esquemas de una mayor complejidad. La técnica de simulación aplicada se basa en el desarrollo teórico de la envolvente compleja y su aplicación en telecomunicaciones. Por tal razón se presenta esta teoría en el contexto de la teoría de señales y sistemas.

A una señal real de banda angosta  $x(t)$  con frecuencia  $f \in (f_1, f_2)$  se le puede asociar una señal analítica denominada la *preenvolvente compleja*, denotada por  $x_a(t)$  a través de (1). La señal  $x_H(t)$  es la transformada de Hilbert de  $x(t)$ . La relación de los componentes de frecuencia entre la señal real de banda angosta y su preenvolvente compleja se puede deducir de la Figura 2 (a y b).

$$x_a(t) = x(t) + jk_H(t) \tag{1}$$

Figura 2. Señal de banda angosta y equivalente pasa bajos



Fuente: presentación propia de los autores.

A la señal  $x(t)$  se le puede asociar otra señal analítica denotada por  $\tilde{x}(t)$  (Ecuación 2). Dicha función tendría una representación en frecuencia como se observa en la Figura 2c y recibe el nombre de la envolvente compleja.

$$\tilde{x}(t) = x_a(t)e^{-j2\pi f_0 t} \tag{2}$$

La función analítica correspondiente es una representación en el plano de las funciones complejas conveniente para la simulación, ya que es una representación banda base de la señal original; por ende, requeriría una cantidad mucho menor de muestras que la señal original para su representación discreta. La expresión  $e^{j2\pi f_0 t}$  en la envolvente compleja representa la frecuencia de la portadora. A partir de la envolvente compleja es posible encontrar la señal banda base original a través de la relación planteada en (3).

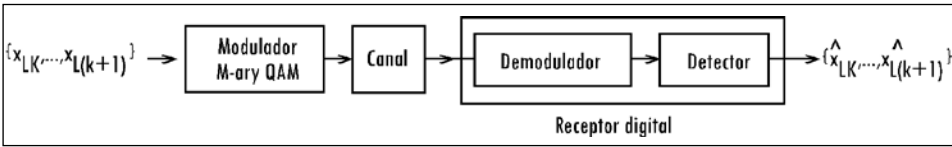
$$x(t) = \text{Re} \{x_a(t)\} = \text{Re} \{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \tag{3}$$

Para un mayor detalle sobre la teoría de la envolvente compleja y su aplicación a sistemas de telecomunicaciones se puede consultar a (Benedetto y Biglieri, 1999).

### 1.2 Transmisión digital M-ary QAM

En la Figura 3 se detalla el diagrama en bloques conceptual que representa una transmisión digital que utiliza una modulación M-ary QAM.

Figura 3. Sistema de transmisión digital M-ary QAM



Fuente: presentación propia de los autores

El modulador digital Mary-QAM se encarga de transformar el bloque k-ésimo de bits de tamaño  $L = \log_2(M)$ , denotado por  $\{x_{L(k+1)}, \dots, x_{L(k+1)L}\}$  en una señal analógica  $s_k(t)$  denotada por (4), válida en el intervalo de tiempo  $[kT_s, kT_s + T_s]$ , donde las amplitudes  $d_k$  y  $q_k$  dependen de la energía transmitida por el bloque k-ésimo.

$$S_k(t) = A_c d_k \cos(2\pi f_0 t) - A_c q_k \sin(2\pi f_0 t), \quad kT_s < t < (k + 1)T_s \tag{4}$$

El diagrama en bloques denominado receptor tiene como función extraer el vector que contiene la información necesaria para estimar cuál fue el símbolo enviado a partir de la señal recibida del canal  $r_k(t)$  en el intervalo de tiempo  $[kT_b, kT_b + T_b]$ . Cuando dicho receptor se denomina óptimo, es porque se ha diseñado para minimizar la probabilidad de error. En el diagrama en bloques general de dicho receptor se ilustra su conformación a través de los subsistemas denominados demodulador y detector.

El objetivo del subsistema demodulador es proyectar la señal recibida  $r_k(t)$  en el subespacio de la modulación. Este proceso se realiza por medio de las funciones base que representan dicho subespacio. El resultado de dicho subsistema en el intervalo de tiempo  $[kT_s, kT_s + T_s]$  es un vector denotado por  $r_k = [r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kL}]$ , que representa la señal k-ésima enviada más los fenómenos introducidos por el canal. El objetivo del detector es encontrar la secuencia de bits original asociada al k-ésimo bloque, minimizando la probabilidad de una incorrecta decisión. Se pueden encontrar diversos criterios y algoritmos para implementar los subsistemas de demodulador y detección en Proakis (2004).

### 1.3 Canal AWGN

El canal AWGN es un canal aleatorio donde se genera una salida modelada por medio de (5).

$$r_k(t) = s_k(t) + n(t), \quad kT_s < t < (k+1)T_s \quad (5)$$

Donde  $s_k(t)$  es la señal de entrada al canal en el intervalo de tiempo  $[kT_s, (k+1)T_s]$  y  $n(t)$  es un proceso aleatorio que representa un ruido ideal denominado *blanco gaussiano*, conformado por una densidad espectral de potencia constante en todas las frecuencias de valor  $N_0/2$ , con media cero e independiente de la señal de entrada. La señal  $s_k(t)$  se asume que está limitada en frecuencia, con ancho de banda  $W$  y con potencia finita.

El modelo de un canal AWGN no es conveniente para analizar sistemas desde el punto de vista de la causalidad y la potencia, ya que no es físicamente realizable. Por lo tanto, es usual definir un ruido limitado en banda derivado del ruido blanco gaussiano para análisis de sistemas. El canal AWGN con ruido limitado en banda es caracterizado por (6), donde  $f_0$  es la frecuencia central de operación y las funciones  $n_d(t)$  y  $n_q(t)$  son procesos estocásticos banda base con ancho de banda  $W$ , mutuamente independientes, con media cero y varianza  $N_0W/2$ .

$$r_k(t) = s_k(t) + n_d(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t), \quad kT_s < t < (k+1)T_s \quad (6)$$

Para un mayor detalle del canal AWGN y el canal AWGN con ruido limitado en banda se puede consultar a (Hanzo *et al.*, 2000).

### 1.4 Canal con desvanecimientos plano y lento

En el modelo de un canal de comunicaciones AWGN, la señal de entrada solamente está afectada por una atenuación y por un retardo constante. Los canales afectados por desvanecimiento multirayectoria generan atenuaciones y retardos variantes con el tiempo, efectos que pueden degradar significativamente el desempeño del sistema de comunicación; por lo tanto, requiere un análisis detallado (Biglieri *et al.*, 1998).

Si un canal varía lentamente, esto es, se tiene una velocidad lenta de movimiento entre el transmisor y el receptor con respecto a la duración del símbolo, entonces este puede ser modelado por medio de (7), donde  $R$  y  $\phi$  son variables aleatorias distribuidas con parámetros constantes en el intervalo  $[kT_s, (k+1)T_s]$  (Goldsmith, 2005).

$$r_k(t) = R_k(t + \phi) + n(t) \quad (7)$$

En el caso particular del modelo con desvanecimiento plano y lento,  $n(t)$  es un señal AWGN limitada en banda, la variable aleatoria  $\phi$  está distribuida uniformemente en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y  $R$  es una variable aleatoria tipo Rice o Rayleigh. En el caso de una variable tipo Rice, significa que el canal modela el fenómeno de múltiples trayectorias, donde una tiene componente dominante. En caso de una variable aleatoria Rayleigh, el canal modela el fenómeno donde no existe componente dominante de las múltiples vías (Gibson, 2002).

Si se asume que el desvanecimiento es lo suficientemente lento con respecto al tiempo de convergencia del sistema de sincronismo del receptor, entonces la recepción coherente permitirá simplificar (7) a (8).

$$r_k(t) = R_k(t) + n(t) \quad (8)$$

En la ecuación (8) se evidencia que el modelo de un canal con desvanecimiento plano y lento considera una atenuación aleatoria igualmente distribuida en un período de un símbolo. Para un mayor detalle del canal variante en tiempo plano y lento se puede consultar a Sklar (1997).

### 1.5 Probabilidad de error teórica de la modulación M-ary QAM

Con el fin de determinar si los resultados obtenidos son correctos, es necesario especificar las medidas de desempeño teóricas existentes para la modulación M-ary QAM bajo el tipo de constelación escogido. Una cota superior para la probabilidad de error de la modulación M-ary QAM bajo un canal AWGN limitado en banda está determinada por la ecuación (9), donde  $E_0$  es la energía de la señal con menor amplitud, que a partir de los conceptos geométricos de la constelación corresponde a  $E_0 = (d_{\min}^2 / 2)$  (Haykin, 2002).

$$P_{e,M-QAM} \approx 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right) \quad (9)$$

Considerando todos los símbolos equiprobables, la probabilidad de error por bit con la modulación M-ary QAM para un canal AWGN limitado en banda queda determinada por (10), siendo  $E_{av}$  la energía promedio de la constelación definida por medio de (11) (Goldsmith, 2005).

$$P_{b,M-QAM} = 1 - \left( 1 - \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q \left( \sqrt{\frac{E_{av}}{N_0} \frac{3 \log_2 M}{M-1}} \right) \right)^2 \quad (10)$$



$$E_{av} = 2 \left[ \frac{2E_0}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} (2i-1)^2 \right] \quad (11)$$

El cálculo teórico de la probabilidad de error en un canal con desvanecimiento lento y plano tipo Rayleigh es mucho más elaborado y no se tienen respuestas generales. En ese caso, la probabilidad de error en BPSK (*Binary Phase Shift Key*) o 2-QAM está determinada por (12) y en 4-QAM por medio de (13) (Chen, 2008).

$$P_{e,2-QAM} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{E[R^2]E_b / N_0}{1 + E[R^2]E_b / N_0} \right)^{1/2} \right) \quad (12)$$

$$P_{e,4-QAM} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{E[R^2]\gamma_s}{2 + E[R^2]\gamma_s} \right)^{1/2} \right) \quad (13)$$

De acuerdo con Tang *et al.* (1999), en el caso de 16-QAM, la probabilidad de error por bit para un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh se puede determinar por medio de (14).

$$P_{b,16-QAM}(E) = \sum_{i=1}^6 \omega_i \Gamma(a_i, b_i, \bar{\gamma}, \rho) \quad (14)$$

Donde las funciones relacionadas en (14) corresponden a las ecuaciones (15), (16) y (17), al igual que a los valores de la Tabla 1. Aquí se asume que el parámetro de correlación  $\rho$ , definido en Tang *et al.*, 1999), toma el valor de 0,9999 para obtener una buena estimación del desvanecimiento en la recepción.

$$\Upsilon(a, b, \bar{\gamma}, \rho) = \frac{1-\rho}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta J(\sqrt{\rho} \sin 2\theta \sin \phi + 1, \sqrt{(1-\rho)\bar{\gamma}}(a \cos \theta + b \sin \theta))}{(\sqrt{\rho} \sin 2\theta \sin \phi + 1)^2} d\phi d\theta \quad (15)$$

$$J(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{3x}{4\sqrt{2x+y^2}} + \frac{b^3}{4(2x+y^2)^{3/2}} \quad (16)$$

$$\bar{\gamma} = E[R^2]E_b / N_0 \quad (17)$$

**Tabla 1. Coeficientes en el cálculo del BER para 16-QAM**

$i$		1	2	3	4	5	6
$\omega_i$	$\frac{1}{4} \times$	1	1	1	-1	1	1
$a_i$	$\frac{1}{\sqrt{42}} \times$	3	1	3	3	-1	1
$b_i$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \times$	0	0	-2	2	2	2

Fuente: Tang *et al.* (1999).

Para el caso de 64-QAM, la expresión que se evaluó tiene la forma de (14), al considerar 28 términos dentro de la sumatoria (Tabla 2).

**Tabla 2. Coeficientes en el cálculo del BER para 64-QAM**

$i$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\omega_i$	$\frac{1}{12} \times$	1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1
$a_i$	$\frac{1}{\sqrt{42}} \times$	1	3	5	7	7	7	5	5	-3	3	-1	1	7	7
$b_i$	$\frac{1}{\sqrt{42}} \times$	0	0	0	0	-4	4	-4	4	4	4	4	4	-6	-2

Continúa

$i$		15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$\omega_i$	$\frac{1}{12} \times$	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1
$a_i$	$\frac{1}{\sqrt{42}} \times$	7	7	-5	5	5	5	-3	3	3	3	-1	-1	1	-1
$b_i$	$\frac{1}{\sqrt{42}} \times$	2	6	6	-2	2	6	3	1	5	9	1	5	3	7

Fuente: Tang *et al.* (1999).

Debido a la complejidad de la evaluación de la ecuación (14), en Goldsmith (2005) se propone una cota superior enunciada en (18).

$$P_{b,M-QAM} \approx \frac{\alpha_M}{2\beta_M \gamma_b} \quad (18)$$

Donde  $\alpha_M$  representa el número de vecinos más cercanos con mínima distancia, y  $\beta_M$  una constante que relaciona la mínima distancia con la energía promedio por símbolo. Goldsmith (2005) aproxima dichas expresiones por medio de (19) y (20).

$$\alpha_M \approx \frac{4(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M} \log_2 M} \quad (19)$$

$$\beta_M \approx \frac{3 \log_2 M}{M-1} \quad (20)$$

## 2. Modelo propuesto para el sistema M-ary QAM

A continuación se presenta el modelo propuesto para analizar la modulación M-ary QAM bajo las condiciones de un canal AWGN limitado en banda y un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh, por medio de la técnica de la envolvente compleja.

2.1 Modelo teórico propuesto por medio de la envolvente compleja

A partir de la representación de la señal M-ary QAM expresada en (4) y la definición de la envolvente compleja presentada en (2), se demuestra en Torres (2007) que su envolvente compleja está determinada por (21).

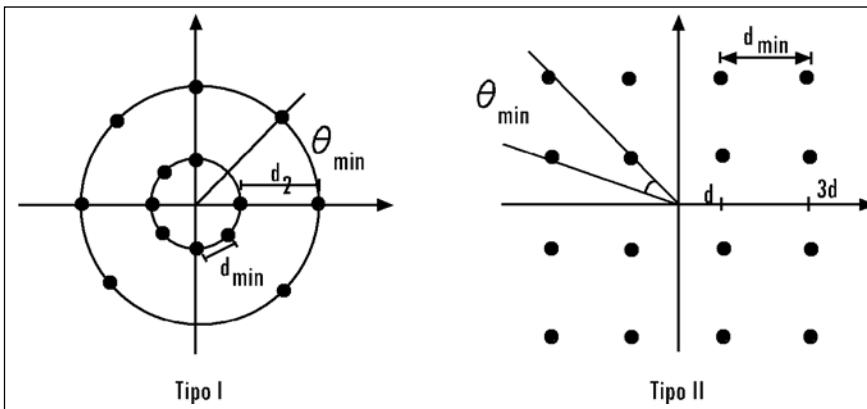
$$\hat{s}_k(t) = A_c d_k + j A_c q_k, \quad kT_s < t < (k+1)T_s \tag{21}$$

Aquí se tienen en cuenta las siguientes consideraciones de diseño para elegir el tipo de asignación de los valores  $d_k$  y  $q_k$  (Chen, 2008):

- Mínima distancia, denotada por  $d_{\min}$  (Figura 4), que determina la inmunidad al ruido del esquema de modulación.
- Mínima rotación de fase, denotada por  $\theta_{\min}$  (Figura 4), lo cual determina la inmunidad a la dispersión por Jitter, en errores de recuperación de reloj y rotación de fase del canal.
- La potencia promedio pico a pico  $r$ , una medida de la robustez contra distorsiones no lineales introducidas por los amplificadores de gran señal o HPA (*High Power Amplifier*).

Para los tipos de constelaciones usuales en la modulación M-ary QAM, en la Figura 4 se presentan su representación geométrica, la mínima distancia y la mínima rotación de fase, que son críticas para el desempeño del sistema.

Figura 4. Formas de constelación 16-QAM



Fuente: presentación propia de los autores.

En la Tabla 3 se comparan los datos de la mínima distancia, la mínima rotación de fase y la potencia promedio pico para la constelación ilustrada en la Figura 4. La constelación Tipo I tiene una mayor inmunidad a la distorsión por *Jitter* con respecto a la constelación Tipo II, pero esta última es más robusta al desvanecimiento, más eficiente espectralmente y tiene mayor eficiencia de potencia y mejor desempeño en términos de probabilidad de error para canales AWGN (Chen, 2008). Por lo anterior, y teniendo en cuenta el tipo de canal que se va a modelar, se implementó la constelación Tipo II, conocida como *constelación rectangular*.

**Tabla 3. Elementos que se van a considerar en una constelación tipo I y II con M-ary QAM**

Tipo	$d_{\min}$	$\theta_{\min}$	$r$
I	$45^\circ$	$0,53 \sqrt{E_s}$	1,5
II	$<45^\circ$	$0,63 \sqrt{E_s}$	1,8

Fuente: Hanzo *et al.* (2000).

El sistema de demodulación implementado es el demodulador óptimo basado en el concepto del correlator en su representación de la envolvente compleja. El detector implementado está basado en el criterio de ML (máxima verosimilitud). Si se asume que la convergencia del sistema de sincronismo del receptor permite una operación coherente ideal, entonces el ruido limitado en banda definido en (6) tendrá una representación por medio de la envolvente compleja por medio de (22).

$$\hat{n}(t) = n_d(t) + jn_q(t) \quad (22)$$

El canal AWGN, con un ruido limitado en banda enunciado en (6) y con desvanecimientos plano y recto tipo Rayleigh enunciado en (8), tendrá una representación por medio de la envolvente compleja por medio de (23) y (24), respectivamente.

$$\hat{r}_k(t) = A_c d_k + n_d(t) + jA_c q_k + jn_q(t), \quad kT_s < t < (k+1)T_s \quad (23)$$

$$\hat{r}_k(t) = RA_c d_k + n_d(t) + jRA_c q_k + jn_q(t), \quad kT_s < t < (k+1)T_s \quad (24)$$

Como el sistema cambia un símbolo cada  $T_s$  segundos, entonces el ancho de banda al primer nulo de la envolvente compleja asociada con la señal M-ary QAM se representa mediante la ecuación (25). La definición de este ancho de banda desempeña un papel importante en el proceso de simulación, ya que definirá la cantidad mínima de muestras por cada símbolo.

$$BW = \frac{1}{T_s} \quad (25)$$

La potencia del ruido limitado en banda en su representación de la envolvente compleja está determinada por (26), siendo  $BW$  el ancho de banda de la señal que se va a transmitir.

$$P_{\bar{n}} = 2N_0 BW = \sigma^2 \quad (26)$$

## 2.2 Modelo de la simulación propuesto por medio de la envolvente compleja

Para realizar el análisis del sistema M-ary QAM propuesto se utilizó un muestreo sobre la señal en la representación de la envolvente compleja en el intervalo de tiempo  $[kT_s, (k+1)T_s]$ . La cantidad de muestras escogidas en un período de un símbolo fue de seis, que garantiza el cumplimiento del criterio de Nyquist.

A fin de generar cada una de las señales que representan el ruido limitado en banda se utilizaron dos variables aleatorias gaussianas idénticamente distribuidas e independientes, con media cero y varianza  $\sigma^2$  obtenidas a partir de una potencia: densidad espectral de ruido  $N_0$  y ancho de banda. En la implementación del integrador en el demodulador basado en el correlator se utilizó la definición de la integral por medio de sumas de Reiman enunciada en (27), con  $\Delta T = T_s/M$ .

$$\int_{kT_s}^{kT_s+T_s} f(t) dt \approx \Delta T \sum_{i=0}^{M-1} f(kT_s + \Delta T \cdot i) \quad (27)$$

Para el detector se implementó el criterio ML y como fuente se utilizó una secuencia pseudoaleatoria equiprobable con una asignación Gray (Tang *et al.*, 1999) de los símbolos en la constelación. Para estimar las curvas de desempeño de la probabilidad de error de un bit se utilizó la simulación de Monte Carlo, en la cual de  $N$  símbolos enviados se cuentan los  $N_e$  símbolos recibidos errados. El cálculo de dicha probabilidad de error se obtuvo por medio de (28).

$$\hat{P}_B = \frac{N_e}{N} \quad (28)$$

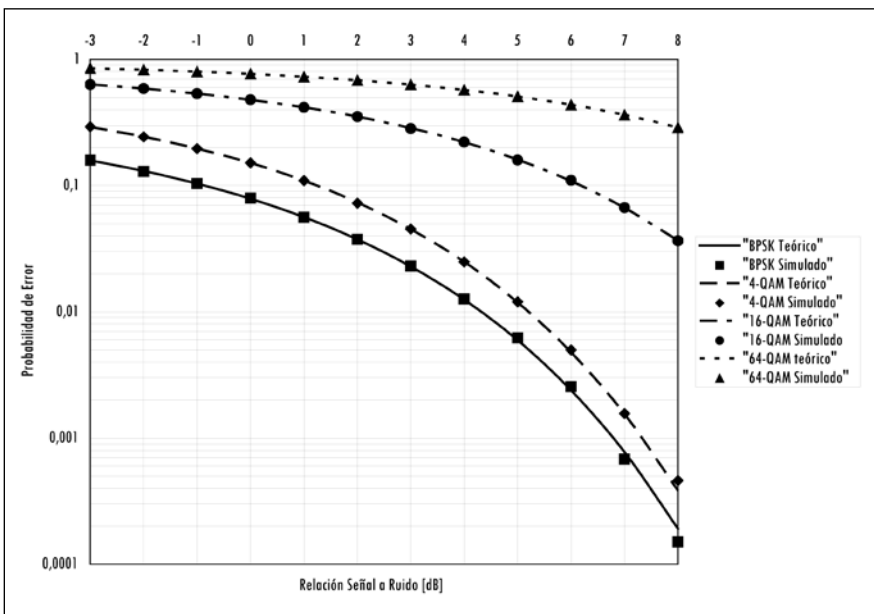
El estimador de la probabilidad de error definida en (28) depende del número de muestras generadas. Por ello se trata de una variable aleatoria que debe analizarse estadísticamente. Para generar las curvas de desempeño por medio de la simulación, se generó una secuencia equiprobable conformada por diez mil símbolos. El estimador de la probabilidad de error bajo estas condiciones presentó un intervalo de confianza mejor al 95%.

### 3. Resultados

#### 3.1 Verificación del modelo

En la Figura 5 se ilustra el desempeño de la modulación BPSK (2-QAM), 4-QAM, 16-QAM y 64-QAM en un canal AWGN limitado en banda. Allí se presentan los resultados teóricos de dicha probabilidad de error, comparados con los resultados encontrados a través del modelo de simulación planteado.

Figura 5. Curva de probabilidad de error de las modulaciones M-QAM en un canal AWGN limitado en banda

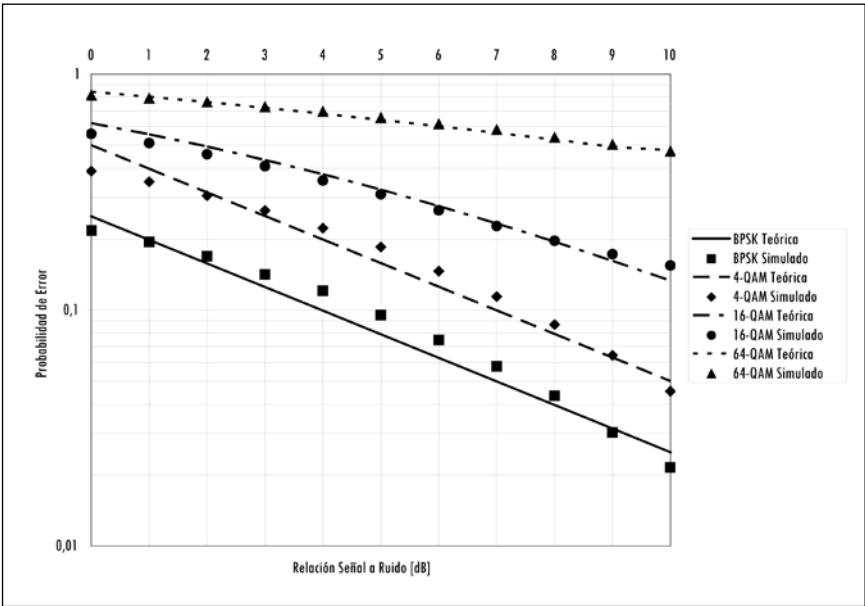


Fuente: presentación propia de los autores.

La cantidad de símbolos utilizados en la simulación no permite encontrar valores adecuados en un canal AWGN para  $SNR > 8 \text{ dB}$ , debido a que se encuentra el fenómeno de eventos raros. Este fenómeno se presenta en la simulación de Monte Carlo cuando en (28), el espacio de muestra  $N$  no es representativo para encontrar los eventos de análisis  $N_e$ . En la simulación realizada sería posible incrementar la ventana de análisis de SNR para el caso AWGN a costa de incrementar el tiempo de la simulación de manera exponencial.

En la Figura 6 se ilustra el desempeño de la modulación B-PSK (2-QAM), 4-QAM, 16-QAM y 64-QAM en un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh. En esta figura se ilustran simultáneamente los resultados teóricos de dichos canales para efectos comparativos considerando un  $E(R^2)=1$ .

Figura 6. Curva de probabilidad de error de las modulaciones M-QAM en un canal con desvanecimiento plano y lento tipo Rayleigh



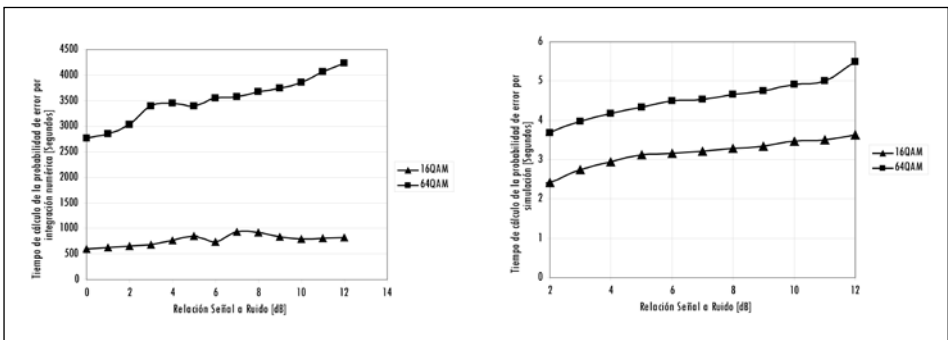
Fuente: presentación propia de los autores.

La comparación de los resultados obtenidos entre el canal AWGN y el canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh permite concluir que el primero tiene una dependencia exponencial de argumentos polinomiales, y el segundo, una dependencia exponencial con argumentos lineales en el intervalo analizado.



El cálculo teórico del desempeño de las modulaciones 16-QAM y 64-QAM ante un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh se realizó mediante la integración numérica de (14), con exigentes requerimientos de recursos de computación, respecto de los necesarios para la simulación. En la Figura 7 se aprecia el tiempo requerido para estimar la probabilidad de error en los casos críticos 16-QAM y 64-QAM, para un  $E(R^2)=1$ .

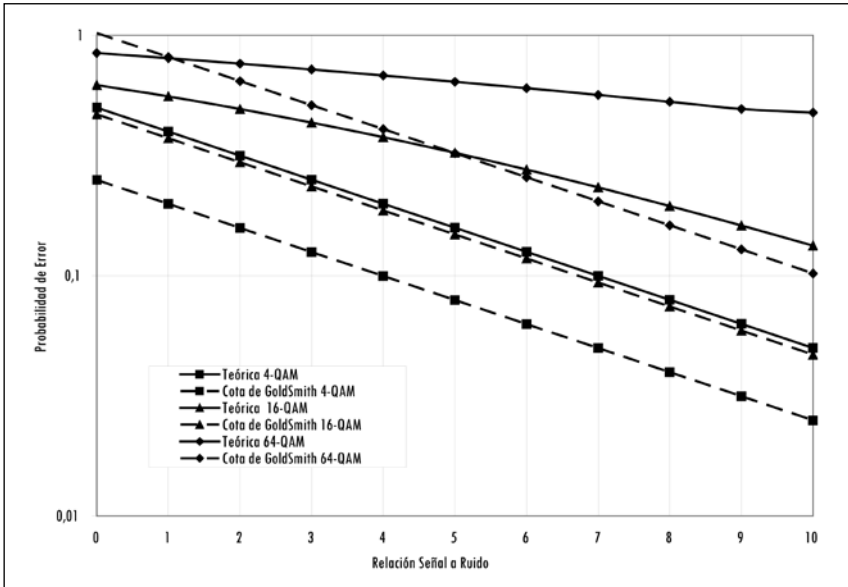
Figura 7. Curva del tiempo de cálculo de la probabilidad de error por medio de integración numérica y simulación, utilizando un computador Pentium IV con 512 MB en RAM



Fuente: presentación propia de los autores.

En la Figura 8 se ilustran simultáneamente los cálculos de la probabilidad de error utilizando la cota enunciada en la ecuación (18) frente a los datos obtenidos por medio del cálculo numérico de la expresión (14) para un  $E(R^2)=1$ . El análisis comparativo evidencia que la ecuación (18) es una cota demasiado optimista; por ende, no es conveniente para los casos particulares 16-QAM y 64-QAM.

Figura 8. Curva de probabilidad de error de 4-QAM, 16-QAM y 64-QAM enunciada en (14) comparada con la cota superior planteada por Goldsmith en (18), para  $E(R^2)=1$

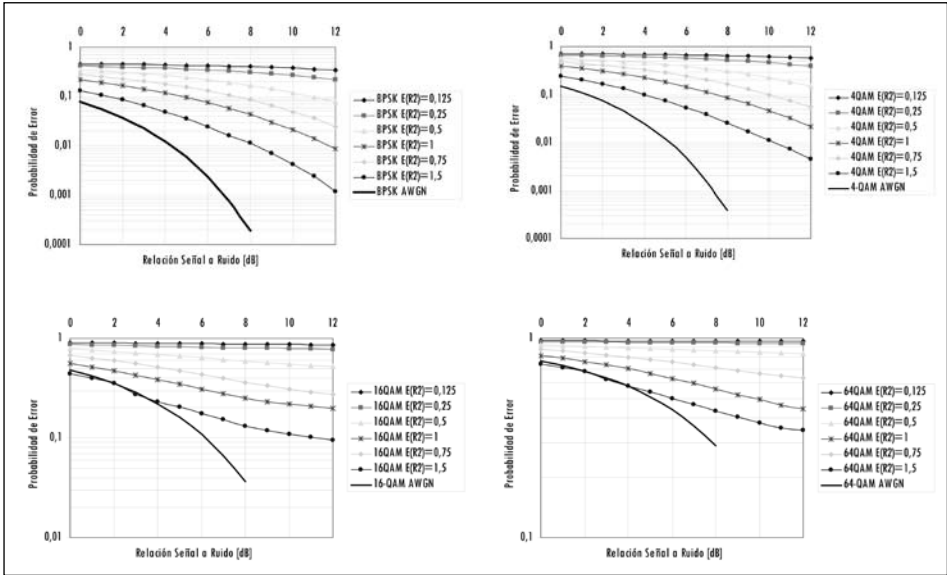


Fuente: presentación propia de los autores.

### 3.2 Curvas de desempeño

En la Figura 9 se ilustra la probabilidad de error estimada para un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh al variar el parámetro  $E(R^2)$  para los casos BPSK (2-QAM), 4-QAM, 16-QAM y 64-QAM. En la Figura 9 se muestra la curva de desempeño de la modulación M-ary QAM con un canal AWGN limitado en banda para efectos comparativos.

Figura 9. Probabilidad de error de 16-QAM y 64-QAM para diferentes valores de  $E(R^2)$



Fuente: presentación propia de los autores.

Con el fin de determinar las condiciones de potencia adicionales requeridas en un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh que produzca el mismo desempeño de un canal AWGN con ruido limitado en banda, en la Figura 9(a) se muestra la distancia  $E$ . Así mismo, con el propósito de establecer la degradación del sistema de comunicaciones si en este se mantiene constante la relación señal a ruido, en la Figura 9(a) se muestra la distancia  $D$ . Con dichas medidas es posible comparar ambos sistemas y determinar la influencia o degradación en el sistema de comunicaciones en cálculos de diseño ante la escogencia específica de alguno de los dos canales.

Debido a que la cota establecida en (Goldsmith, 2005) para el desempeño de un sistema de modulación  $M$ -ary QAM de alto orden es demasiado optimista y a que la evaluación de la ecuación (14) para un grado de confiabilidad aceptable tiene velocidad de convergencia lenta, se plantean —gracias a los resultados obtenidos en la simulación— dos nuevas aproximaciones para la probabilidad de error, basadas en una aproximación logarítmica que usa el error cuadrático medio y que para el caso particular de 16-QAM arroja el resultado (29) y para el caso de 64-QAM el resultado (30), con la relación señal a ruido

$\bar{\gamma}$  planteada en la ecuación (17) en escala lineal y los intervalos  $1 \leq \bar{\gamma} \leq 15,84$  y  $0,125 \leq E(R^2) \leq 1,5$ .

$$P_{e,16-QAM} \approx (-0,366 \cdot E(R^2) + 0,957) \bar{\gamma}^{(-0,436 \cdot E(R^2) + 0,042)} \quad (29)$$

$$P_{e,64-QAM} \approx (-0,156 \cdot E(R^2) + 1) \bar{\gamma}^{(-0,238 \cdot E(R^2) + 0,047)} \quad (30)$$

Las expresiones (29) y (30) permiten estimar de forma simplificada la probabilidad de error de estas modulaciones, bajo la consideración de un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh con un error mejor a +/- 10%.

#### 4. Conclusiones

En este artículo se presentó la metodología de análisis, la implementación del modelo de simulación y el cálculo de las curvas de desempeño de la modulación M-ary QAM en un canal AWGN limitado en banda y en un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh, por medio de la teoría de la envolvente compleja.

Se comparó la cota planteada por Goldsmith (2005) y se encontró que es demasiado optimista para el sistema analizado. El modelo computacional para calcular el resultado de la probabilidad de error ante las condiciones variantes del canal resulta costoso, en cuanto al tiempo de computación, y por ello se concluye que el modelo por medio de la simulación es atractivo para analizar el desempeño del sistema. Con los resultados encontrados se planteó una nueva cota para la probabilidad de error de la modulación M-ary QAM ante las condiciones del canal propuesto.

Las curvas de la probabilidad de error encontradas para el caso del canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh muestran un aumento considerable en la probabilidad de error en comparación de un canal AWGN limitado en banda. Ya que el canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh es variante en el tiempo, lo cual es usual en aplicaciones inalámbricas fijas en las que no existe línea de vista entre el transmisor y el receptor, la metodología planteada es valiosa para encontrar las medidas de desempeño de un sistema que tiene una compleja descripción analítica. Este es el caso de diversas aplicaciones de comunicaciones inalámbricas modernas, como el estándar 802.16<sup>TM</sup>-2004-OFDM, también conocido como WiMAX fijo, cuyo esquema de modulación adaptable se basa en la modulación M-ary QAM.

En un canal de características variantes en el tiempo, como el analizado, la medida de desempeño de la probabilidad de error no puede ser mejorada siguiendo la estrategia tradicional de incremento de la energía por símbolo en el transmisor, ya que las curvas de desempeño encontradas muestran una mejora ínfima comparada con la de dicha medida de desempeño ante un canal AWGN limitado en banda. Este resultado implica que se deben buscar estrategias alternativas para incrementar la potencia si se desea tener un mejor trabajo por parte del sistema de comunicaciones.

La técnica de análisis por medio de la envolvente compleja presenta una ventaja frente a la simulación directa de los fenómenos de banda pasante, ya que disminuye la cantidad de muestras requeridas a cambio de una mayor complejidad analítica y de implementación; requiere un análisis e implementación de diversos modelos en variable compleja.

## 5. Prospectiva

La literatura indica que las modulaciones M-ary QAM son esquemas eficientes espectralmente, característica que se puede explotar en canales con una alta variabilidad de la relación señal a ruido para adaptar el esquema de modulación de forma dinámica y aumentar su eficiencia de esa manera. Esta característica será explorada para analizar un esquema de modulación adaptable y reconfigurable ante la presencia de un canal con desvanecimientos plano y lento tipo Rayleigh, que permita enviar información de fuentes de tráfico disímiles, como lo son las fuentes de voz y datos, sin perder eficiencia y eficacia en la transmisión (Torres, 2007).

## 6. Nomenclaturas y símbolos

$x(t)$ : Señal original de banda angosta.

$x_H(t)$ : Transformada de Hilbert de la señal original de banda angosta.

$x_a(t)$ : Preenvolvente compleja de la señal original de banda angosta.

$\tilde{x}(t)$ : Envolvente compleja de la señal original de banda angosta.

$\text{Re}\{\cdot\}$  Parte real.

$s_k(t)$ : Señal analógica asociada al símbolo k-ésimo en el transmisor.

$\hat{s}_k(t)$ : Envolvente compleja asociada al símbolo k-ésimo en el transmisor.

$\cos(\cdot)$ : Función trigonométrica coseno.

$\sin(\cdot)$ : Función trigonométrica seno.

$\mathbf{r}_k = [r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kL}]$ : Vector analógico de dimensión  $L$ .

$r_k(t)$ : Señal analógica asociada al símbolo  $k$ -ésimo en el receptor.

$\hat{r}_k(t)$ : Envoltente compleja asociada al símbolo  $k$ -ésimo en el receptor.

$n(t)$ : Señal analógica que representa un ruido blanco gaussiano.

$\hat{n}(t)$ : Envoltente compleja que representa un ruido blanco gaussiano.

M-ary QAM: Modulación de amplitud en cuadratura de  $M$  símbolos por constelación.

$P_{b,M}$ -QAM: Probabilidad de error por bit en una modulación M-ary QAM.

$P_{e,M}$ -QAM: Probabilidad de error en una modulación M-ary QAM.

$E_{av}$ : Energía promedio asociada a la modulación M-ary QAM.

$E(R^2)$ : Segundo momento de la variable aleatoria  $R$ .

## Referencias

- BENEDETTO, S. and BIGLIERI, E. *Principles of Digital Transmission. With Wireless Applications*. New York: Kluwer Academic, 1999.
- BIGLIERI, E.; PROAKIS, J., and SHAMANI, S. Fading Channels. Information-Theoretic and Communications Aspects. *IEEE Trans. on Information Theory*. 1998, vol. 44, núm. 6, pp. 2619-2692.
- CHEN, S. *ELEC6014 (EZ412/612) Radio Communications Networks and Systems Lectures*. Southampton: School of Electronics and Computer Science University of Southampton, 2008.
- GIBSON, D. J. *The Communications Handbook*. 2 ed. Boca Ratón: CRC Press, 2002.
- GOLDSMITH, A. *Wireless Communications*. New York: Cambridge University Press, 2005.
- HANZO, L.; WEBB, W., and KELLER, T. *Single and Multi-Carrier Quadrature Amplitude Modulation. Principles and Applications for Personal Communications, WLANs and Broadcasting*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- HAYKIN, S. *Communications Systems*. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- PROAKIS, J. *Digital Communications*. New York: McGraw Hill, 2004.
- SHANMUGAN K. S. Simulation and Implementation Tools for Signal Processing and Communication Systems. *IEEE Communications Magazine*. 1994, vol. 32, núm. 7, pp. 36-40.
- SKLAR, B. Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems I. Characterization. *IEEE Communications Magazine*. 1997, vol. 35, núm. 9, pp. 90-100.
- TANG, X.; ALOUINI, M., and GOLDSMITH, A. Effect of Channel Estimation Error on M-QAM BER Performance in Rayleigh Fading. *IEEE Trans. on Communication*. 1999, vol. 47, núm. 12, pp. 1856-1864.
- TRANter, W.; SHANMUGAN, K. S.; RAPPAPORT, T., and KOSBAR, K. *Principles of Communication Systems Simulation with Wireless Applications*. New York: Prentice Hall, 2004.
- TORRES, C. *Modulación adaptable para voz y datos en canales variantes con el tiempo*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana, 2007.

- TRANTER, W. H. and KOSBAR, K. L. Simulation of Communication Systems. *IEEE Communications Magazine*. 1994, vol. 32, núm. 7, pp. 26-35.
- WOERNER, B.; REED, J. H., and RAPPAPORT, T. Simulation Issues for Future Wireless Modems. *IEEE Communications Magazine*. 1994, vol. 32, núm. 7, pp. 42-53.

