

Difusión anómala en yacimientos naturalmente fracturados con naturaleza fractal

Fernando Ascencio Cendejas
fernando.ascencio@pemex.com

Ricardo Posadas Mondragón
ricardo.posadas@pemex.com
Pemex

Artículo recibido en enero de 2018 y aceptado en abril de 2018

Resumen

Se presenta la solución en el espacio de Laplace para la ecuación de difusión generalizada para un yacimiento con naturaleza fractal, incluyendo la derivada fraccional en el tiempo. Se establecen las soluciones en el espacio de Laplace y se realiza la inversión numérica, obteniendo gráficas comparativas del comportamiento atendiendo a la difusión anómala (derivada fraccional en el tiempo). Una vez validado lo anterior, se introduce un término fuente representando la transferencia matriz-fractura en estado transitorio a través de la integral de convolución, para considerar el caso de un yacimiento naturalmente fracturado, tomando en cuenta diferentes geometrías de los bloques de matriz, desde el modelo de cubos Warren and Root (1963) para flujo pseudoestacionario matriz-fractura, hasta geometrías de esferas y eslabones para flujo transitorio matriz-fractura. Establecido lo anterior, se resuelve la ecuación de difusión resultante; la cual tiene las características siguientes: generalizada (fractal), anómala (derivada fraccional respecto al tiempo), yacimiento naturalmente fracturado con transferencia matriz-fractura transitoria, con diferentes bloques de matriz (Integral de Convolución). Se presentan los resultados gráficos validando las geometrías de flujo convencionales; radial, lineal, bilineal y esférico. Al ser una solución con naturaleza fractal se puede establecer un modelo analítico generalizado, además de considerar la difusión anómala para evaluar la memoria del yacimiento. Adicional a lo anterior se establecen soluciones analíticas en el espacio del tiempo, para el caso particular de yacimiento naturalmente fracturado con transferencia matriz-fractura en estado pseudoestacionario, pero atendiendo a los aspectos fractal y de difusión anómala.

Palabras clave: Naturaleza fractal, difusión anómala, naturalmente fracturado.

Anomalous diffusion in naturally fractured reservoirs with fractal behavior

Abstract

In this paper is obtained the generalized diffusion equation solution for fractal reservoir in Laplace domain, including the fractional derivative in time. The numerical inversion is applied to obtain comparative plots for anomalous diffusion (fractional derivative in time). A source was introduced in order to modeling the matrix-fracture transient transfer through the convolution integral, to consider a naturally fractured reservoir taking account different matrix block geometries including the Warren and Root cubes model, for pseudo-steady state, spherical and slabs geometries. The final solution obtained in this paper has the following characteristics: Generalized (fractal), anomalous (fractional derivative in time), Naturally Fracture Reservoir with matrix-fracture transient transfer for different matrix blocks (Convolution).

Several plots results are presented validating the conventional flow geometries; radial, linear, bilinear and spherical. A generalized analytical model was obtained considering fractal aspects, anomalous diffusion to evaluate the reservoir memory and naturally fractured reservoir

Keywords: Fractal nature, anomalous diffusion, naturally fractured.

Introducción

Barenblatt and Zheltov, (1960) fueron los primeros autores en abordar el tema de flujo radial de un fluido ligeramente compresible para un yacimiento naturalmente fracturado, asumiendo que el flujo solo ocurre a través de las fracturas; la matriz solo actúa como un medio de recarga hacia las fracturas, además de considerar flujo pseudoestacionario matriz-fractura.

Warren and Root, (1963) establecen la solución analítica para el mismo planteamiento de Barenblatt and Zheltov (1960), la cual es útil para el análisis de pruebas de presión en pozos de yacimientos naturalmente fracturados; determinaron que el comportamiento de presión de un pozo en una gráfica semilog respecto al tiempo presenta dos pendientes paralelas, características de la respuesta de presión de este tipo de pozos.

Kazemi, (1969) estableció a través de un modelo de simulación radial el comportamiento de presión considerando flujo transitorio matriz-fractura, con resultados similares a los de Warren and Root (1963), pero con diferente comportamiento durante el periodo de transición donde actúa la recarga de matriz.

Agarwal et al., (1970) definieron el comportamiento transitorio de la presión ante efectos de daño y almacenamiento en los pozos, estableciendo las soluciones en el espacio de Laplace.

De Swaan, (1976) establece la solución analítica para el comportamiento de presión de un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado, considerando flujo transitorio matriz-fractura y diferentes formas de bloque de matriz.

Mavor and Cinco-Ley, (1979) muestran la solución para un yacimiento naturalmente fracturado considerando efectos de daño y almacenamiento, dicha solución es en el espacio de Laplace, considerando un flujo pseudoestacionario matriz-fractura.

Cinco-Ley and Samaniego-V, (1982) Establecen el comportamiento de presión para un pozo en un yacimiento

naturalmente fracturado para flujo transitorio de la matriz tal como lo establece De Swaan (1976), demostrando que la diferencia del comportamiento entre un flujo transitorio, y flujo pseudoestacionario, Warren and Root (1963), matriz-fractura puede correlacionarse utilizando tres parámetros adimensionales.

Moench, (1984) considera la solución para un medio de doble porosidad con flujo a través de las fracturas, incluyendo el efecto de daño en las fracturas, determinando que el flujo transitorio matriz-fractura puede convertirse en un flujo pseudoestacionario dependiendo del daño presente en las fracturas.

Barker, (1988) define una solución generalizada para un flujo radial en un medio fracturado. Establece la primera solución generalizada en términos de funciones gamma incompletas, validando su solución con la solución previa de Theis (1935).

Chang and Yortsos, (1990) fueron los primeros en establecer la ecuación de difusión considerando un medio fractal, considerando dicha solución en función de la dimensión fractal del medio y la conectividad de las fracturas.

Metzler et al., (1994) establece la solución de la ecuación de difusión anómala, la cual considera derivada fraccional respecto al tiempo, que se traduce en la evaluación de la memoria del yacimiento.

Acuña et al., (1995) muestran la solución de un medio fractal definiendo que dicho comportamiento obedece a una ley de potencias, al establecer el medio fractal como una red de fracturas discretas.

Ascencio, (1994) y Ascencio (2006) establece una forma generalizada de la ecuación de difusión en función de un parámetro, que se relaciona directamente con el valor característico de la pendiente de cada uno de los diferentes tipos de flujo.

Caputo, (1999) define el comportamiento de presión en un medio poroso considerando efectos de memoria en el yacimiento a través de la consideración de la derivada fraccional respecto al tiempo.

Desarrollo de la ecuación de difusión generalizada

Considerando la ecuación de difusión generalizada, fractal, anómala para un yacimiento naturalmente fracturado, definida por la Ec.1, cuya ecuación es desarrollada en el Apéndice A del presente documento

$$\frac{1}{r_D^\theta} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{(1-2n)}{r_D^{\theta+1}} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - (1-\omega) \int_0^{t_D} \frac{\partial^\alpha p_{Df}(\tau)}{\partial \tau^\alpha} q_{D1}(t_D - \tau) d\tau = \omega \frac{\partial^\alpha p_{Df}}{\partial t_D^\alpha} \quad \dots(1)$$

donde

$$q_{D1}(t_D - \tau) = A_{fD} \nabla p_{D1m}(\eta_{mD}, t_D - \tau)$$

Resolviendo en el Espacio de Laplace la Ec.1 para un pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento infinito considerando daño y almacenamiento, las condiciones iniciales y de frontera en forma adimensional quedan definidas por las Ecs. 2, 4 y 3:

Condición inicial, (CI):

$$p_{Df}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad \dots(2)$$

Condición de Frontera Externa, (CFE):

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df}(r_D, t_D) = 0 \quad \dots(3)$$

Condición de Frontera Interna, (CFI):

$$C_D \frac{\partial p_{wDf}}{\partial t_D} - \left[r_D^{d_f - \theta - 1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = 1 \quad \dots(4)$$

$$p_{wDf} = \left[p_{Df} - S \left(r_D^{d_f - \theta - 1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1} \quad \dots(5)$$

Considerando las variables adimensionales:

$$r_D = r / r_w \quad \dots(6)$$

$$t_D = \frac{k_f t}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad \dots(7)$$

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h}{qB\mu} r_w^{d_r - \theta_r - 2} (p_i - p_f(t)) \quad \dots(8)$$

$$\omega = \frac{\phi_f c_{tf}}{\phi_f c_{tf} + \phi_m c_{tm}} \quad \dots(9)$$

La solución de la Ec.1 para las condiciones de frontera expresadas por las Ecs. 3 a 5; desarrollada también en el Apéndice A, es la Ec.10

$$\bar{p}_{wDf}(s) = \frac{K_v \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] + S \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right]}{s \left[C_D \cdot s \left(K_v \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] + S \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] \right) + \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] \right]} \quad \dots(10)$$

donde;

$$n = 1 + \frac{\theta - d_f}{2}$$

$$v = \frac{2(n + \theta)}{\theta + 2}$$

$$f(s) = [\omega + (1 - \omega)\bar{q}_{D1}]$$

$$A_{fD} = \frac{A_f h_m V_b}{V_m}$$

Para el caso de flujo pseudoestacionario matriz-fractura, de acuerdo al modelo Warren and Root, (1963) la función F(s) se expresa en la forma siguiente:

$$f(s) = \frac{\lambda + s\omega(1 - \omega)}{\lambda + s(1 - \omega)}$$

Para estratos:

$$\bar{q}_{D1}(\eta_{mD}, s) = A_{fD} \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{str}}{s}} \tanh \left(\frac{\sqrt{\frac{s}{(\eta_{mD})_{str}}}}{2} \right)$$

$$(\eta_{mD})_{str} = \frac{k_m (\phi c_t)_t r_w^2}{k_f (\phi c_t)_m h_w^2}$$

Para esferas:

$$\bar{q}_{D1}(\eta_{mD}, s) = A_{fD} \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{sph}}{s}} \left[\coth \left(\frac{\sqrt{\frac{s}{(\eta_{mD})_{sph}}}}{2} \right) - 2 \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{sph}}{s}} \right]$$

$$(\eta_{mD})_{sph} = \frac{k_m (\phi c_t)_t r_w^2}{k_f (\phi c_t)_m d_w^2}$$

La aproximación de la Ec.10 para tiempos donde el efecto de almacenamiento en el pozo es despreciable y para el caso de un pozo sin daño $S = 0$, se obtiene la Ec.11:

$$\bar{p}_{wDf}(s) = \frac{K_v \left[\left(\frac{2}{\theta + 2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right]}{s \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta + 2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right]} \quad \dots(11)$$

A partir de la Ec.10 se pueden obtener soluciones presentadas previamente por los autores mencionados en la introducción, en la **Tabla 1** se presenta un resumen de las soluciones obtenidas para los casos previamente

publicados considerando aspectos fractales y también aquellos que no lo consideran con la finalidad de validar la solución propuesta:

Tabla 1. Soluciones obtenidas a partir del modelo propuesto.

Autor	S	C _D	n	f(s)	α	θ	d _f
Theis (1935)	0	0	0	1	1	0	2
Nabor (1964)	0	0	1/2	1	1	0	1
Van Everdingen and Hurst (1949)	0	≠0	0	1	1	0	2
Chatas (1966)	0	0	-1/2	1	1	0	3
Cinco-Samaniego (1981)	≠0	≠0	1/4	1	1	0	1.5
Warren and Root (1963)	≠0	0	0	≠1	1	0	2
Ascencio (2006)	0	≠0	-1/2 ≤ n ≤ 1/2	1	1	0	2
De Swaan (1986)	≠0	0	0	≠1	1	0	2
Moench (1984)*	≠0	0	0	≠1	1	0	2
O’Shaughnessy & Procaccia (1985)	0	≠0	-1/2 ≤ n ≤ 1/2	1	1	≥ 0	1 ≤ d _f ≤ 3
Chang and Yortsos (1990)	≠0	0	-1/2 ≤ n ≤ 1/2	1	1	≥ 0	1 ≤ d _f ≤ 3
Barker (1988)	0	0	-1/2 ≤ n ≤ 1/2	1	1	0	1 ≤ d _f ≤ 3
Metzler et al (1994)	0	0	-1/2 ≤ n ≤ 1/2	1	≠1	≥ 0	1 ≤ d _f ≤ 3
Ascencio-Posadas (2017)*	≠0	≠0	-1/2 ≤ n ≤ 1/2	≠1	≠1	≥ 0	1 ≤ d_f ≤ 3

* Como parte de la continuación del presente trabajo se encuentra en proceso la inclusión del pseudo-daño en la matriz de la roca.

Aproximación de la solución general para tiempos largos

Realizando inversión para flujo pseudoestacionario matriz-fractura a partir de la Ec.11:

$$p_{wD} = 2^{n-1} \left(\frac{2}{\theta + 2} \right) \left[\Gamma \left(-n, \frac{1}{4 \left(\frac{\theta + 2}{2} \right)^2 t_D^\alpha} \right) - \Gamma \left(-n, \frac{\left(\frac{\theta + 2}{2} \right)^2 \lambda t_D^\alpha}{\omega(1-\omega)} \right) + \Gamma \left(-n, \frac{\left(\frac{\theta + 2}{2} \right)^2 \lambda t_D^\alpha}{(1-\omega)} \right) \right] \dots(12)$$

Donde G (a, x) es la función gamma incompleta:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \dots(13)$$

La solución gráfica de la Ec.12 se muestra en la **Figura 1**, en la que se incluye la solución particular de Warren and Root (1963), para el caso de $n = 0$.

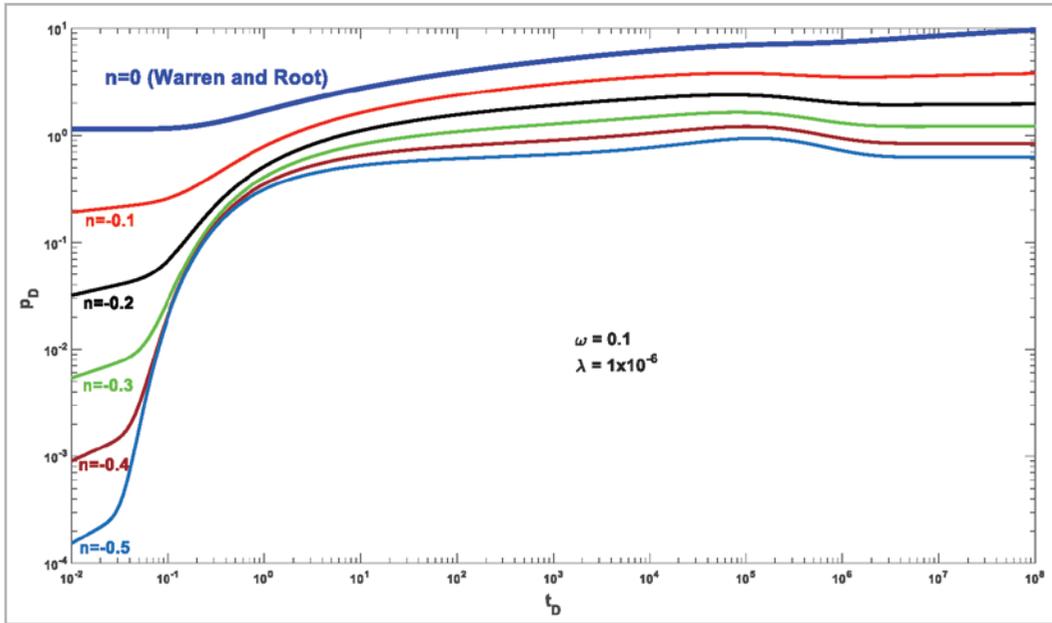


Figura 1. Solución de la Ec.12, sensibilidad a la variable del aspecto fractal n .

La derivada de la Ec.12 se expresa en la forma siguiente:

$$\frac{d[\Gamma(a, x)]}{dx} = \frac{d\left[\int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt\right]}{dx} = -x^{a-1} e^{-x} \quad \dots(14)$$

Por lo cual, aplicando la derivada de la función gamma incompleta:

$$\frac{d(p_{wD})}{dt_D} = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2^n \left(\frac{2}{\theta + 2}\right) \left[\frac{1}{4\left(\frac{\theta + 2}{2}\right)^2 t_D^\alpha} e^{-\left(\frac{1}{4\left(\frac{\theta + 2}{2}\right)^2} t_D^\alpha\right)} + \left(\frac{(\theta + 2)^2 \lambda t_D^\alpha}{\omega(1 - \omega)}\right)^{-n} e^{-\left(\frac{(\theta + 2)^2 \lambda t_D^\alpha}{\omega(1 - \omega)}\right)} - \left(\frac{(\theta + 2)^2 \lambda t_D^\alpha}{(1 - \omega)}\right)^{-n} e^{-\left(\frac{(\theta + 2)^2 \lambda t_D^\alpha}{(1 - \omega)}\right)} \right] \quad \dots(15)$$

El comportamiento gráfico de la Ec.15 se muestra en las Figuras 2 a 5.

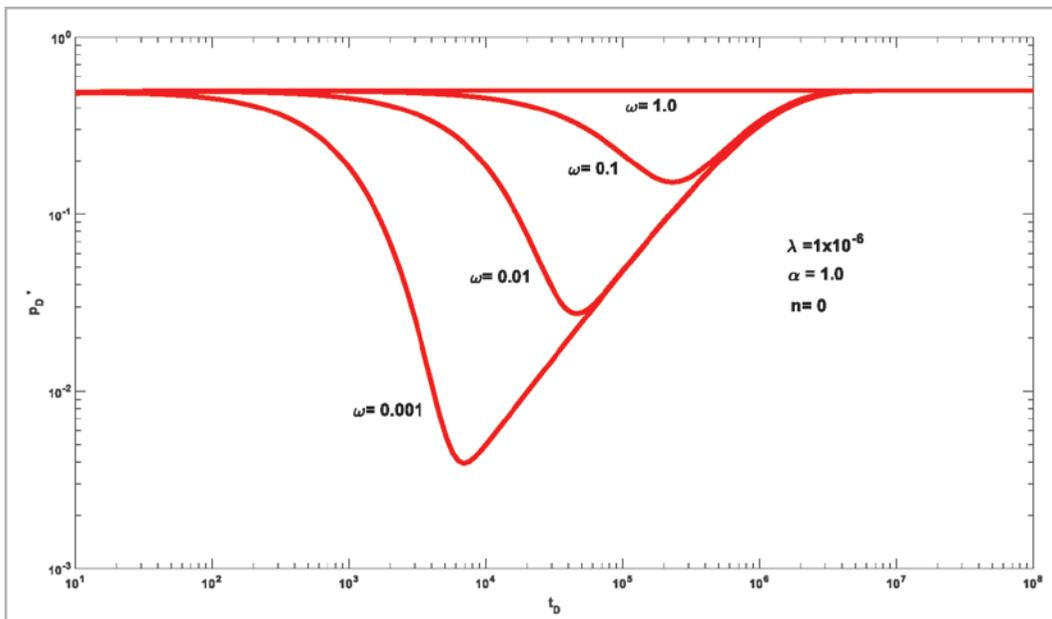


Figura 2. Sensibilidad de la función derivada de la presión a la capacidad de almacenamiento de la fractura ω .

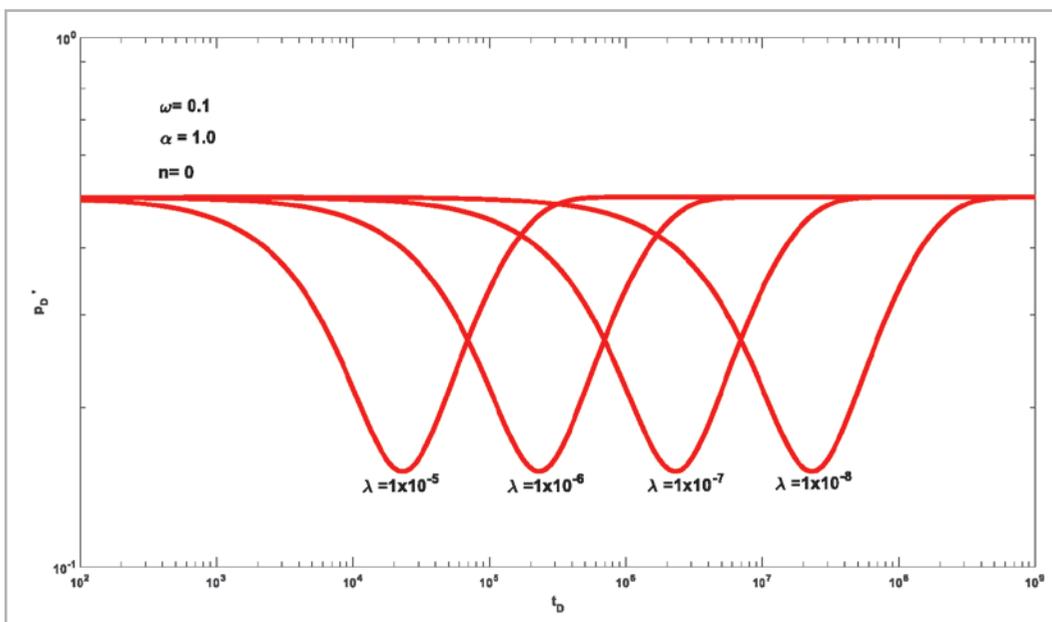


Figura 3. Sensibilidad de la función derivada de la presión al coeficiente de flujo interporoso matriz-fractura λ .

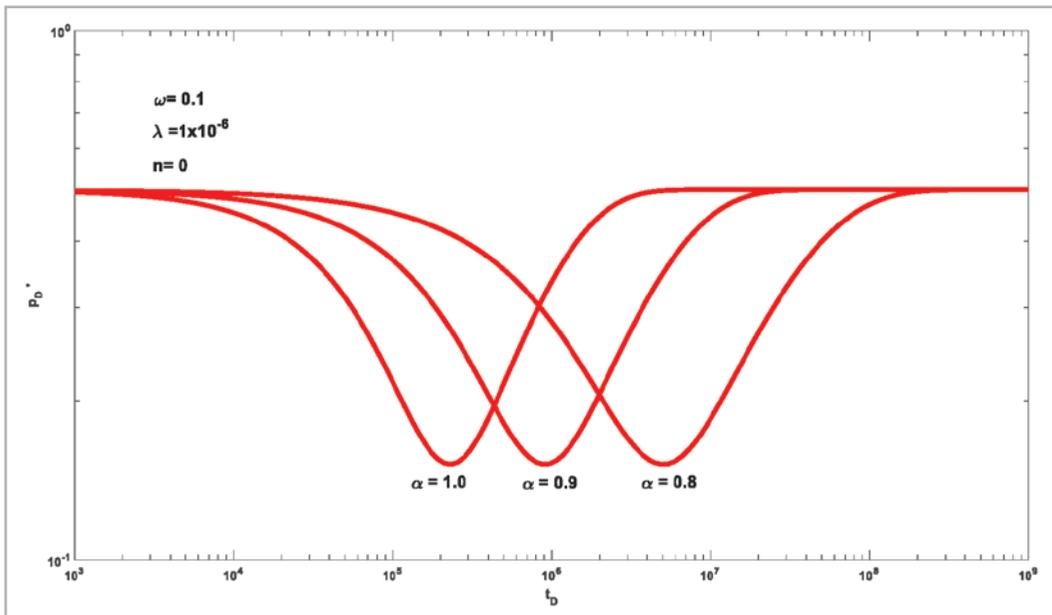


Figura 4. Sensibilidad de la función derivada de la presión al coeficiente de difusión anómala α .

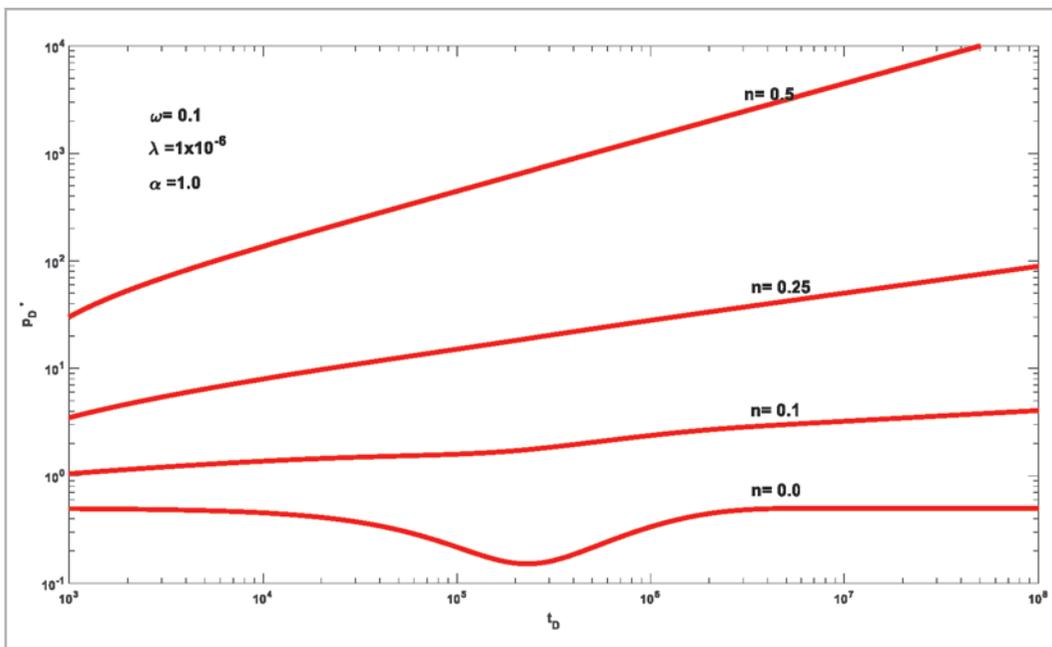


Figura 5. Sensibilidad de la función derivada de la presión a aspectos fractales y de flujo, en función del parámetro n .

Si $n=0$ (flujo radial), $\theta=0$ (conectividad total entre fracturas, no fractal) y $\alpha = 1$ (difusión no anómala), la Ec.12, se simplifica a la solución para yacimientos naturalmente fracturados para tiempos largos establecida por (Warren and Root, 1963).

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \left[E_1 \left(\frac{1}{4t_D} \right) - E_1 \left(\frac{\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right) + E_1 \left(\frac{\lambda t_D}{(1-\omega)} \right) \right] \quad \dots(16)$$

Simplificación para un yacimiento homogéneo

La Ec.12 se simplifica al no considerar el flujo matriz-fractura, daño, condición fractal ni ser anómalo obteniendo la Ec.17 que representa la solución de Barker, (1988).

$$P_{wD} = 2^{n-1} \Gamma \left(-n, \frac{1}{4t_D} \right) \quad \dots(17)$$

La solución gráfica de la Ec.17 se presenta en la **Figura 6**, mostrando la solución particular de línea fuente de Theis (1935), para el caso de $n = 0$.

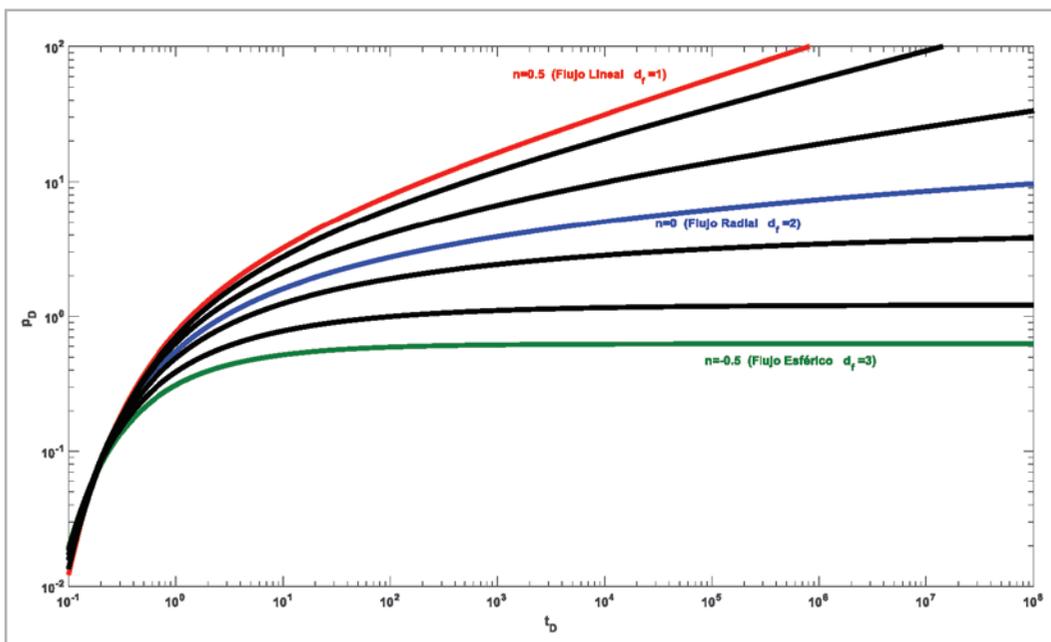


Figura 6. Solución de la Ec.17, sensibilidad a n , $\theta=0$.

Simplificación para un yacimiento fractal y anómalo

La Ec.12 se reduce al no considerar el flujo matriz-fractura, obteniéndose la Ec.18:

$$p_{wD} = 2^{n-1} \left(\frac{2}{\theta + 2} \right) \Gamma \left(-n, \frac{1}{4 \left(\frac{\theta + 2}{2} \right)^2 t_D^\alpha} \right) + S \quad \dots(18)$$

En la **Figura 7**, se muestra el comportamiento gráfico de la Ec.10 para diferentes valores de daño del pozo, S , considerando el caso de un yacimiento radial homogéneo: $n = 0$, $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $\theta = 0$, $A_{fd} = 1$, Estratos $\eta_{mD} = 1e-7$, $C_D = 10$.

También si el medio no es fractal ni anómalo:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} (\ln(t_D) + 0.80907) + S,$$

y su función derivada es:

$$\frac{d(p_{wD})}{d \ln(t_D)} = \frac{1}{2},$$

Por lo cual:

$$\frac{p_{wD}}{t_D p'_{wD}} = \ln(t_D) + 0.80907 + 2S$$

De donde se podrá obtener el daño del pozo, si se considera la solución para $t_D=1$:

$$S = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{p_{wD}}{t_D p'_{wD}} \right]_{t_D=1} - 0.80907 \right]$$

Gráficamente mediante la relación de Chow (1952), se puede extrapolar este comportamiento para determinar el daño, tal como se muestra en la **Figura 7**.

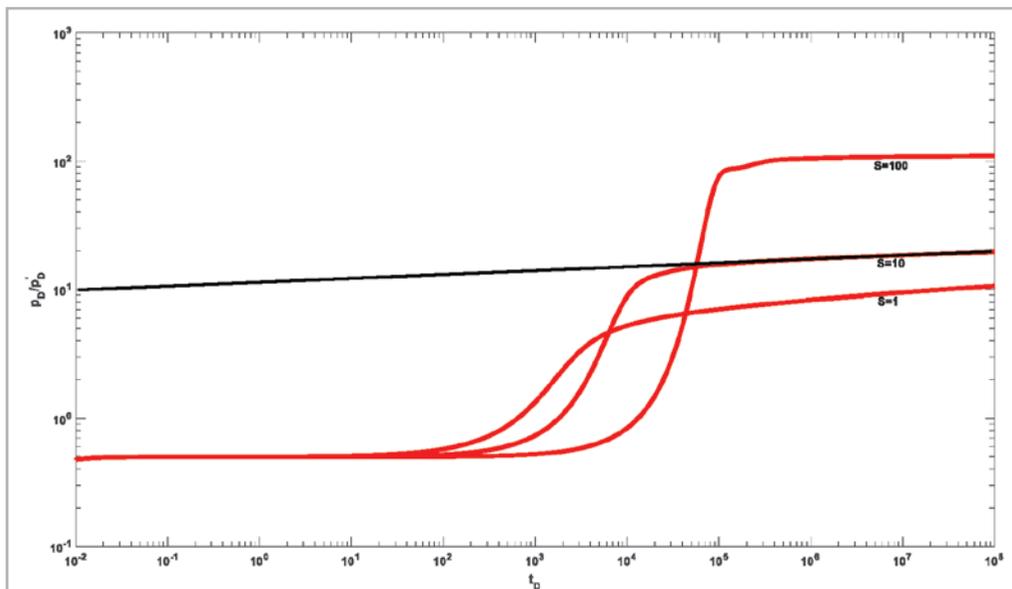


Figura 7. Gráfica relación p_D/p'_D , sensibilidad al daño del pozo S .

Para el caso donde ya existen aspectos fractales y anómalos, el comportamiento de la gráfica $p_D/(d(p_D)/d[\ln(t_D)])$ tiene diferentes pendientes, en la forma mostrada en la Figura 8, siendo un reflejo de la respuesta mostrada en la Figura 9.

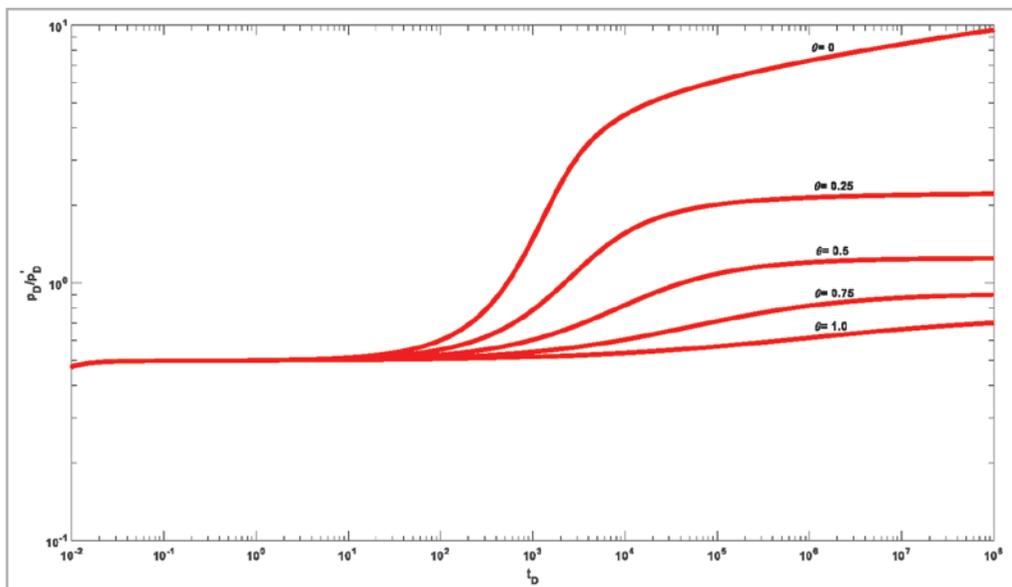


Figura 8. Gráfica relación p_D/p'_D , sensibilidad a la conectividad de fracturas θ .

La Figura 9 muestra la solución de la Ec.10 para el caso de un flujo radial homogéneo, sin considerar aspectos fractales ni difusión anómala; es decir: $n = 0$, $f(s) = 1$, $\alpha = 1$, $\theta =$

0 , $d_f = 2$, y realizando sensibilidad al conjunto de variables $C_D e^{2S}$. Observando que para la interpretación de pruebas de presión sirve como una gráfica más de diagnóstico.

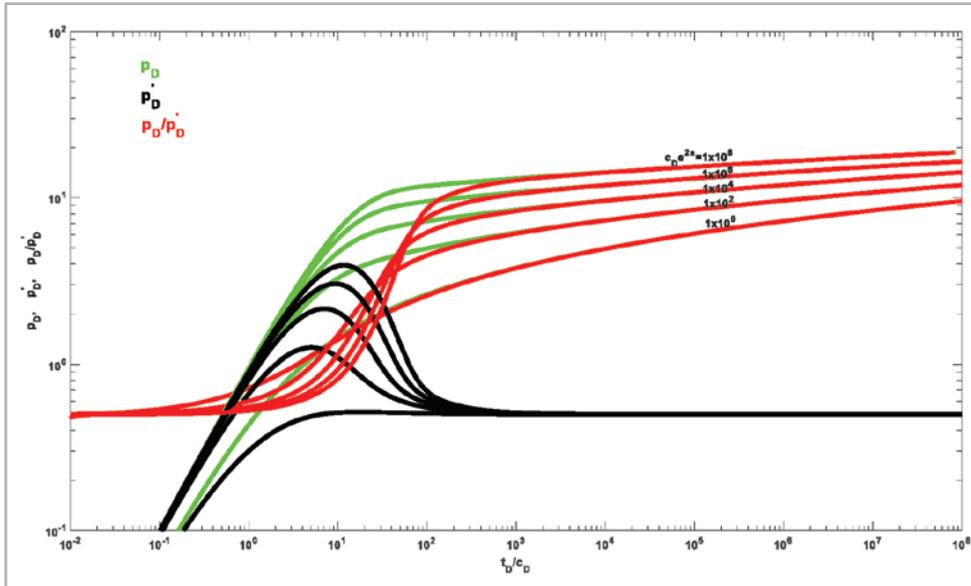


Figura 9. Gráfica adicional de diagnóstico, con sensibilidad a $C_D e^{2S}$.

Solución gráfica de ecuación generalizada

La Figura 10 muestra la solución de la Ec.10 para el caso de variación a la capacidad de almacenamiento de la fractura, parámetro ω .

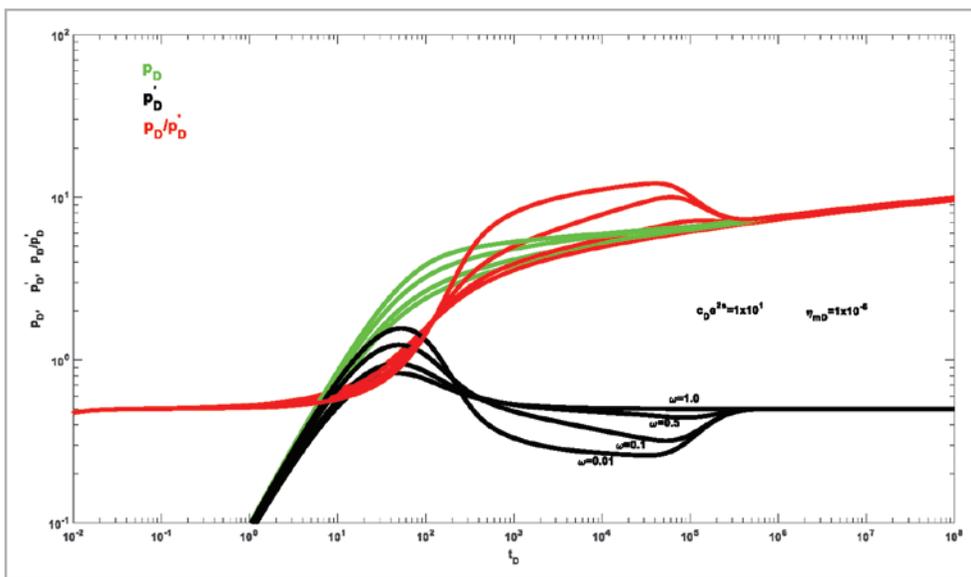


Figura 10. Gráfica de sensibilidad a la capacidad de almacenamiento de la fractura, ω .

La **Figura 11** muestra la solución de la Ec.10 para el caso de variación del flujo de la matriz hacia la fractura mediante el parámetro η_{mD} .

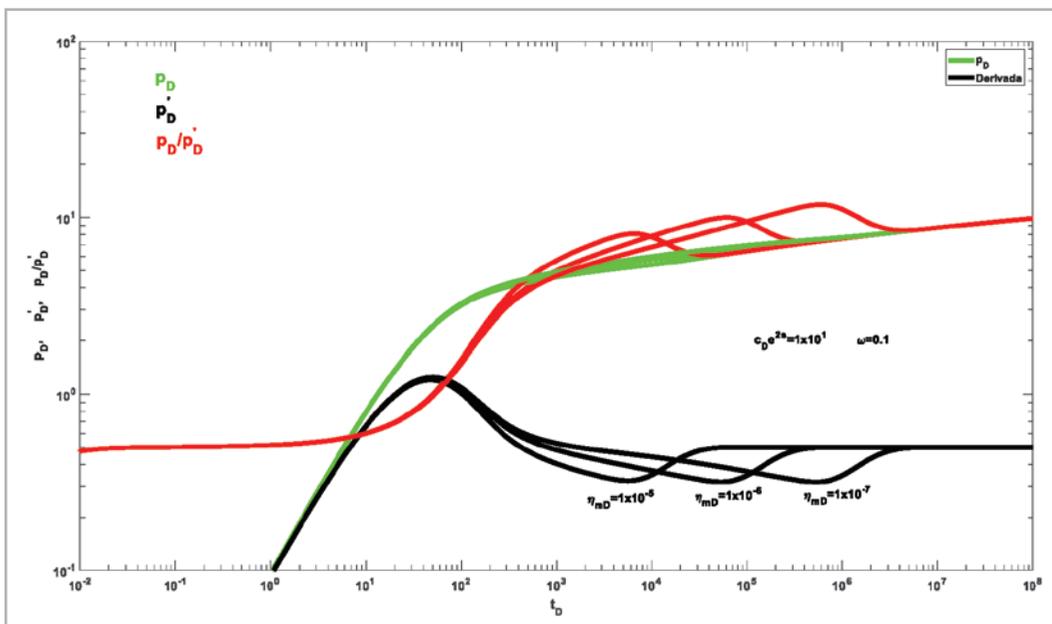


Figura 11. Gráfica de sensibilidad a transferencia matriz-fractura, η_{mD} .

La **Figura 12** muestra la solución de la Ec.10 sensibilizando la conectividad de las fracturas, θ .

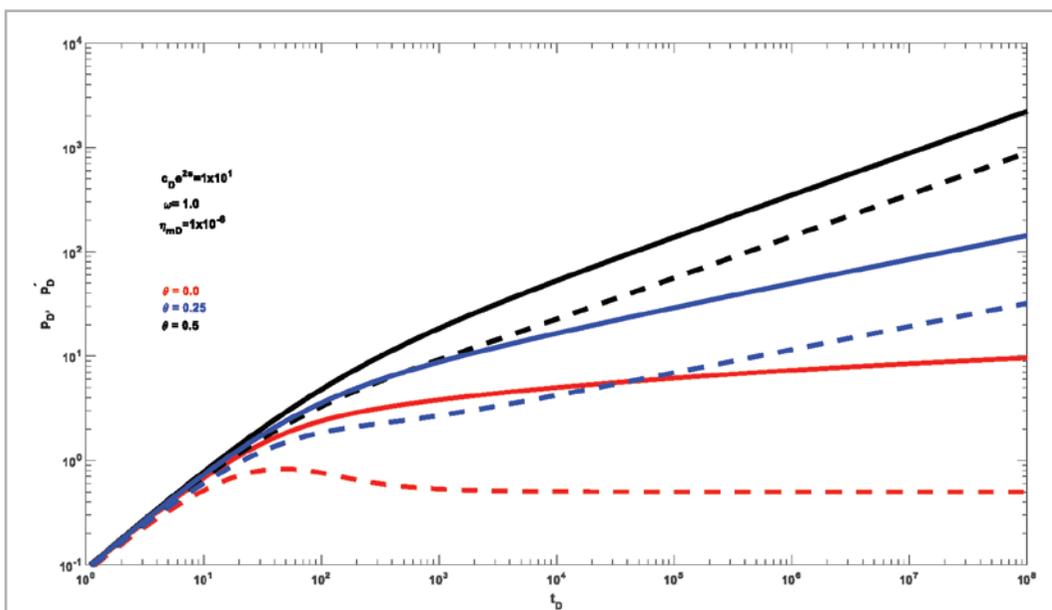


Figura 12. Gráfica de sensibilidad a la conectividad de las fracturas, θ .

La **Figura 13** muestra la solución de la Ec.10 sensibilizando el parámetro n , el cual agrupa los aspectos dimensión fractal y conectividad de fracturas.

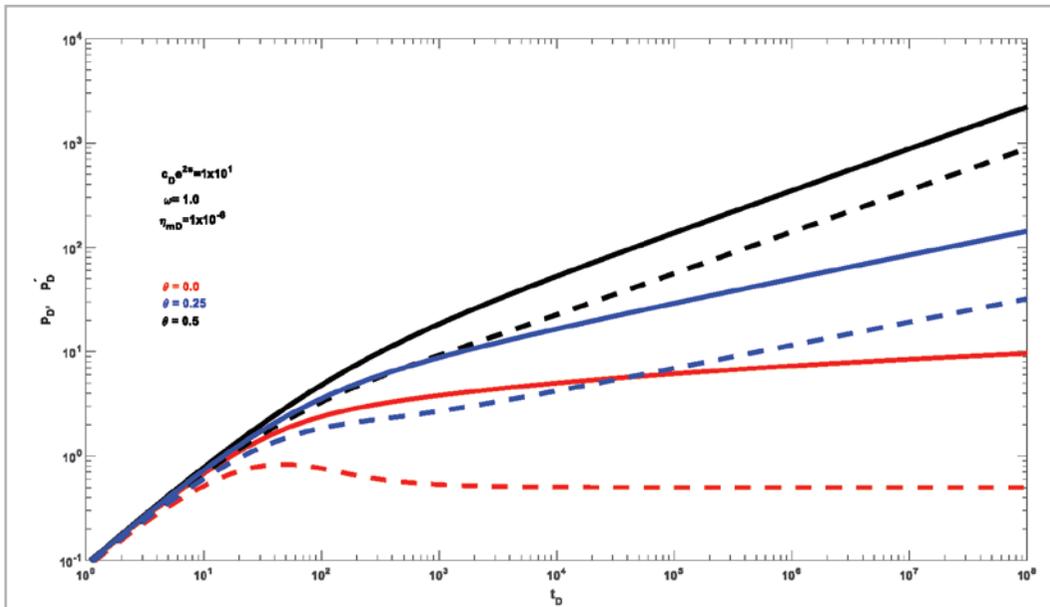


Figura 13. Sensibilidad a dimensión fractal y conectividad de fracturas, parámetro n .

Conclusiones

En el artículo presente se discute una propuesta de la solución en el Espacio de Laplace para la ecuación de difusión generalizada para un yacimiento naturalmente fracturado con naturaleza fractal considerando flujo transitorio matriz-fractura, incluyendo la derivada fraccional en el tiempo como difusión anómala, además del daño y almacenamiento en el pozo.

A partir de la solución generalizada se pueden obtener soluciones previamente publicadas por diferentes autores.

Con la finalidad de obtener soluciones en el espacio del tiempo, se realizó una aproximación de la solución anterior para tiempos largos, para el caso de un YNF con flujo pseudoestacionario matriz-fractura, con naturaleza fractal y difusión anómala, validando la solución obtenida para cualquier tipo de geometría de flujo; lineal, bilineal, radial y esférica. También se incluye el uso de la relación de Chow(1952) de p_d/p_d' como gráfica adicional de diagnóstico.

Nomenclatura

p_D	Presión adimensional en el espacio de Laplace [adim]
A_{fD}	Área característica adimensional del flujo matriz-fractura [adim]
B	Factor de volumen del aceite [bls/stb]
C_D	Almacenamiento adimensional [adim]
c_{tf}	Compresibilidad total en fracturas [psi-1]
c_{tm}	Compresibilidad total en matriz [psi-1]
d_f	Dimensión fractal [adim]
$E_i[x]$	Integral exponencial
$f(s)$	Función de transferencia matriz fractura en el Espacio de Laplace
h	Espesor del yacimiento [ft]
h_m	Tamaño del bloque de matriz [ft]
$I_\nu(x)$	Función Bessel modificada de primera clase de orden ν

k_f	Permeabilidad en fracturas [mD]
$K_v(x)$	Función Bessel modificada de segunda clase de orden v
N	Variable del aspecto fractal que define la geometría de flujo [adim]
p_D	Presión adimensional [adim]
p_f	Presión en las fracturas [psi]
p_i	Presión inicial [psi]
p_{Df}	Presión adimensional de las fracturas [adim]
p_{Dm}	Presión adimensional de la matriz [adim]
p_{wDf}	Presión adimensional de las fracturas en el pozo [adim]
p_{wD}	Presión adimensional en el pozo [adim]
q	Gasto [bpd]
q_{D1}	Término de flujo en integral de convolución [adim]
r	Radio [ft]
r_D	Radio adimensional [adim]
r_w	Radio del pozo [ft]
S	Daño [adim]
s	Variable de transformación al espacio de Laplace
t	Tiempo [hrs]
t_D	Tiempo adimensional [adim]

Símbolos griegos

α	Difusión anómala [adim]
η_{mD}	Difusividad adimensional de la matriz [adim]
$\Gamma[n, x]$	Función gamma incompleta
λ	Parámetro de flujo interporoso matriz-fractura para flujo pseudoestacionario [adim]
μ	Viscosidad [cp]
∇p_{D1m}	Función de presión adimensional de transferencia matriz-fractura
ω	Coefficiente de capacidad de almacenamiento de las fracturas [adim]
ϕ_f	Porosidad de fracturas [frac]
ϕ_m	Porosidad de matriz [frac]
τ	Variable de integración en la integral de convolución
θ	Conectividad entre fracturas [adim]

Agradecimientos

Los autores agradecen a Pemex Exploración y Producción y a la Universidad Nacional Autónoma de México, por proporcionar el tiempo y las facilidades para este trabajo de investigación.

Apéndice A

Solución para YNF con naturaleza fractal considerando difusión anómala

Partiendo de la ecuación fractal, nómala, para YNF:

$$\frac{r_w^{\theta+2}}{r^\theta} \frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{(1-2n)r_w^{\theta+2}}{r^{\theta+1}} \frac{\partial p_f}{\partial r} - \frac{\mu r_w^2}{k_f} \int_0^t \frac{\partial^\alpha p_f(\tau)}{\partial \tau^\alpha} \frac{k_m}{\mu} q_1(t-\tau) d\tau = \omega \frac{\phi \mu c_t r_w^2}{k_f} \frac{\partial^\alpha p_f}{\partial t^\alpha} \quad \dots(A.1)$$

Introduciendo las variables adimensionales:

$$r_D = r / r_w \quad \dots(A.2)$$

$$t_D = \frac{k_f t}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad \dots(A.3)$$

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h}{qB\mu} r_w^{d_r - \theta_r - 2} (p_i - p_f(t)) \quad \dots(A.4)$$

$$\omega = \frac{\phi_f c_{tf}}{\phi_f c_{tf} + \phi_m c_{tm}} \quad \dots(A.5)$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{r_D^\theta} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{(1-2n)}{r_D^{\theta+1}} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - \frac{k_m}{k_f} r_w^2 \int_0^{t_D} \frac{\partial^\alpha p_{Df}(\tau)}{\partial \tau^\alpha} q_{D1}(t_D - \tau) d\tau = \omega \frac{\partial^\alpha p_{Df}}{\partial t_D^\alpha} \quad \dots(A.6)$$

Para determinar el comportamiento transitorio de la matriz $\nabla_{p_{D1m}}$, dependiendo de la forma del bloque de la matriz se hace referencia a las soluciones establecidas por De Swaan, (1976):

$$q_{D1}(t_D - \tau) = A_{jD} \nabla p_{D1m}(\eta_{mD}, t_D - \tau)$$

Para estratos:

$$\nabla p_{D1m} = \frac{4}{h_m} \sum_{z=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k_m(\phi c_t)_t r_w^2 (2z+1)^2 \pi^2 t_D}{k_f(\phi c_t)_m h_w^2}\right) \quad \dots(A.7)$$

Para esferas:

$$\nabla p_{D1m} = \frac{4}{d_m} \sum_{z=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{4k_m(\phi c_t)_t r_w^2 z^2 \pi^2 t_D}{k_f(\phi c_t)_m d_w^2}\right) \quad \dots(A.8)$$

(Cinco-Ley y Samaniego-V, 1982), definieron las siguientes variables adimensionales:

Para estratos:

$$(\eta_{mD})_{str} = \frac{k_m(\phi c_t)_t r_w^2}{k_f(\phi c_t)_m h_w^2} \quad \dots(A.9)$$

Para esferas:

$$(\eta_{mD})_{sph} = \frac{k_m(\phi c_t)_t r_w^2}{k_f(\phi c_t)_m d_w^2} \quad \dots(A.10)$$

De acuerdo a Warren and Root, (1963) combinando las Ecs.A.6 a A.10, considerando la definición de ω y las sumatorias de las Ecs. A.7 y A.8 a partir de $z = 0$;

$$\frac{1}{r_D^\theta} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{(1-2n)}{r_D^{\theta+1}} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - (1-\omega) \int_0^{t_D} \frac{\partial^\alpha p_{Df}(\tau)}{\partial \tau^\alpha} q_{D1}(t_D - \tau) d\tau = \omega \frac{\partial^\alpha p_{Df}}{\partial t_D^\alpha} \quad \dots(A.11)$$

donde;

$$q_{D1}(t_D - \tau) = A_{fD} \nabla p_{D1m}(\eta_{mD}, t_D - \tau)$$

$$A_{fD} = \frac{A_f h_m V_b}{V_m} \quad \dots(A.12)$$

Resolviendo en el Espacio de Laplace la Ec.A.11 para un pozo produciendo a gasto constante y yacimiento infinito, las condiciones iniciales y de frontera en forma adimensional quedan definidas por las Ecs.A.13, A.14 y A.15.

La condición inicial (CI):

$$p_{Df}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad \dots(A.13)$$

Condición de Frontera Externa (CFE), yacimiento infinito:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df}(r_D, t_D) = 0 \quad \dots(A.14)$$

Condición de Frontera Interna (CFI), pozo produciendo a gasto constante con daño, S , y almacenamiento C_D :

$$C_D \frac{\partial p_{wDf}}{\partial t_D} - \left[r_D^{d_f - \theta - 1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = 1 \quad \dots(A.15)$$

$$p_{wDf} = \left[p_{Df} - S \left(r_D^{d_f - \theta - 1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1} \quad \dots(A.16)$$

En el Espacio de Laplace:

$$C_D s \bar{p}_{wDf} - \left[r_D^{d_f - \theta - 1} \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = \frac{1}{s} \quad \dots(A.17)$$

$$\bar{p}_{wDf} = \left[\bar{p}_{Df} - S \left(r_D^{d_f - \theta - 1} \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1} \quad \dots(A.18)$$

Realizando la transformación al espacio de Laplace de la variable del tiempo adimensional t_D , haciendo uso de la solución de Caputo, (1999) para derivadas fraccionales en el tiempo:

$$\frac{1}{r_D^\theta} \frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{(1-2n)}{r_D^{\theta+1}} \frac{d \bar{p}_{Df}}{dr_D} - [\omega + (1-\omega)\bar{q}_{D1}] s^\alpha \bar{p}_{Df} = 0 \quad \dots(A.19)$$

La Ec.A.19 puede resolverse a través del planteamiento de la solución de (Lebedev, 1965) como el producto de dos funciones:

$$p_D = r_D^x u(r_D, s)$$

La solución general para la Ec.A.19 es:

$$\bar{p}_{Df} = r_D^n \left[C_1 I_\nu \left(r_D^{\frac{\theta+2}{2}} \left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha [\omega + (1-\omega)\bar{q}_{D1}]^{\frac{1}{2}}} \right) + C_2 K_\nu \left(r_D^{\frac{\theta+2}{2}} \left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha [\omega + (1-\omega)\bar{q}_{D1}]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \quad \dots(A.20)$$

donde:

$$v = \frac{2(n+\theta)}{\theta+2} \quad \dots(A.21)$$

De acuerdo a De Swaan, (1976)

$$\bar{q}_{D1} = A_{fD} \nabla \bar{p}_{D1m}(\eta_{mD}, s)$$

Para estratos:

$$\nabla \bar{p}_{D1m}(\eta_{mD}, s) = \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{str}}{s}} \tanh \left(\sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{str}}{2}} \right) \quad \dots(A.22)$$

Para esferas:

$$\nabla \bar{p}_{D1m}(\eta_{mD}, s) = \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{sph}}{s}} \left[\coth \left(\frac{\sqrt{\frac{s}{(\eta_{mD})_{sph}}}}{2} \right) - 2 \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{sph}}{s}} \right] \quad \dots(A.23)$$

Para evaluar las constantes C_1 y C_2 que intervienen en la Ec. A.20, se emplean las CFI y CFE, obteniendo una solución en términos únicamente de la función Bessel K_v :

$$\bar{p}_{Df}(r_D, s) = \frac{r_D^n K_v \left[r_D^{\left(\frac{\theta+2}{2}\right)} \left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right]}{s \left[C_D \cdot s \left(K_v \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] + S \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] \right) + \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] \right]} \quad \dots(A.24)$$

En el pozo, se obtiene p_{wDf} evaluando A.18 a partir de A.24:

$$\bar{p}_{wDf}(s) = \frac{K_v \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] + S \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right]}{s \left[C_D \cdot s \left(K_v \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] + S \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] \right) + \sqrt{s^\alpha f(s)} K_{v-1} \left[\left(\frac{2}{\theta+2} \right) \sqrt{s^\alpha f(s)} \right] \right]} \quad \dots(A.25)$$

donde:

$$n = 1 + \frac{\theta - d_f}{2}$$

$$\omega = \frac{\phi_f c_{tf}}{\phi_f c_{tf} + \phi_m c_{tm}}$$

$$v = \frac{2(n + \theta)}{\theta + 2}$$

$$\bar{q}_{D1} = A_{fD} \nabla \bar{p}_{D1m}(\eta_{mD}, s)$$

$$A_{fD} = \frac{A_f h_m V_b}{V_m}$$

Para el caso de flujo pseudoestacionario matriz-fractura, (Warren y Root):

$$f(s) = \frac{\lambda + s\omega(1-\omega)}{\lambda + s(1-\omega)}$$

Para estratos:

$$(\eta_{mD})_{str} = \frac{k_m(\phi c_t)_t r_w^2}{k_f(\phi c_t)_m h_w^2}$$

$$\nabla \bar{p}_{D1m}(\eta_{mD}, s) = \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{str}}{s}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\frac{s}{(\eta_{mD})_{str}}}}{2}\right)$$

Para esferas:

$$(\eta_{mD})_{sph} = \frac{k_m(\phi c_t)_t r_w^2}{k_f(\phi c_t)_m d_w^2}$$

$$\nabla \bar{p}_{D1m}(\eta_{mD}, s) = \sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{sph}}{s}} \left[\coth\left(\frac{\sqrt{\frac{s}{(\eta_{mD})_{sph}}}}{2}\right) - 2\sqrt{\frac{(\eta_{mD})_{sph}}{s}} \right]$$

Referencias

- 1) Acuña, J., Ershaghi, I. y Yortsos, Y. 1995. Practical Application of Fractal Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs. *SPE Form Eval* **10** (3): 173-179. SPE-24705-PA. <https://doi.org/10.2118/24705-PA>.
- 2) Agarwal, R., Al-Hussainy, R. y Ramey, H. 1970. An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow: I. Analytical Treatment. *SPE J.* **10** (3): 279-290. SPE-2466-PA. <https://doi.org/10.2118/2466-PA>.
- 3) Aguilera, R. 1980. *Naturally Fractured Reservoirs*. Tulsa, Oklahoma: PennWell Books.
- 4) Ascencio C., F., Samaniego-V., F. y Rivera Rodríguez, J. 1994. A Method for the Flow Diagnosis and Interpretation of a Well Test Through the Use of the Pressure Derivative Function. Proceedings, Nineteenth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering Stanford University, Stanford, California, enero 18-20.
- 5) Ascencio C., F., Samaniego-V., F., Cinco-Ley, H. et al. 2006. A General Method for the Flow Diagnostics and Interpretation of Well Test. Artículo presentado en SPE International Oil Conference and Exhibition, Cancún, México, agosto 31 – septiembre 2. SPE-104036-MS. <https://doi.org/10.2118/104036-MS>.
- 6) Barenblatt, G. y Zheltov, Y. P. 1960. Fundamental Equations of Filtration of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. *Soviet Physics Doklady* **5**: 522.

- 7) Barker, J. 1988. A Generalized Radial Flow Model for Hydraulic Test in Fractured Rock. *Water Resources Research* **24** (10): 1796-1804. <https://doi.org/10.1029/WR024i010p01796>.
- 8) Caputo, M. 1999. Diffusion of Fluids in Porous Media with Memory. *Geothermic* **28** (1): 113-130. [https://doi.org/10.1016/S0375-6505\(98\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S0375-6505(98)00047-9).
- 9) Carslaw, H. y Jaeger, J. 1959. *Conduction of Heat in Solids*, second edition. London: Oxford University Press.
- 10) Chang, J. y Yortsos, Y. 1990. Pressure Transient Analysis of Fractal Reservoirs. *SPE Form Eval* **5** (1): 31-38. SPE-18170-PA. <https://doi.org/10.2118/18170-PA>.
- 11) Chatas, A. T. 1966. Unsteady Spherical Flow in Petroleum Reservoirs, *SPE J.* **6** (2): 102-114. SPE-1305-PA. <https://doi.org/10.2118/1305-PA>.
- 12) Cinco-Ley, H. y Samaniego-V., F. 1982. Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs. Artículo presentado en SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, septiembre 26-29. SPE-11026-MS. <https://doi.org/10.2118/11026-MS>.
- 13) Cooper, H. H. Jr. y Jacob, C. E. 1946. A Generalized Graphical Method for Evaluating Formation Constants and Summarizing Well-Field History. *Eos Trans. AGU* **27** (4): 526-534. <https://doi.org/10.1029/TR027i004p00526>.
- 14) De Swaan, A. 1976. Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoirs Properties by Well Testing. *SPE J.* **16** (3): 117-122. SPE-5346-PA. <https://doi.org/10.2118/5346-PA>.
- 15) De Swaan, A. 1984. *Pruebas de Variación de Presión en Yacimientos Naturalmente Fracturados*. México: IMP.
- 16) De Swaan, A. 1986. Influence of Shape and Skin of Matrix-Rocks Blocks on Pressure Transients in Fractured Reservoirs. *SPE Form Eval* **5** (4): 344-352. SPE-15637-PA. <https://doi.org/10.2118/15637-PA>.
- 17) De Swaan, A., Camacho-Velázquez, R. y Vásquez-Cruz, M. 2011. Interference Test Analysis in Fractured Formations With a Time-Fractional Equation. Artículo presentado en SPE Latin America and Caribbean Petroleum Engineering Conference, Mexico City, Mexico, abril 16-18. SPE-153615-MS. <https://doi.org/10.2118/153615-MS>.
- 18) Earlougher, R. J. 1977. *Advances in Well Test Analysis*, Vol. 5. Richardson, Texas: SPE, Monograph Series.
- 19) Gringarten, A. C., Bourdet, D. P., Landel, P. A. et.al. 1979. A Comparison Between Different Skin and Wellbore Storage Type-Curves for Early-Time Transient Analysis. Artículo presentado en SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, Nevada, septiembre 23-26. SPE-8205-MS. <https://doi.org/10.2118/8205-MS>.
- 20) Kazemi, H. 1969. Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs With Uniform Fracture Distribution. *SPE J.* **9** (4): 451-462. SPE-2156-A. <https://doi.org/10.2118/2156-A>.
- 21) Lebedev, N. N. 1965. *Special Functions and their Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- 22) Mavor, M. y Cinco-Ley, H. 1979. Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. Artículo presentado en SPE California Regional Meeting, Ventura, California, EUA, abril 18-20. SPE-7977-MS. <https://doi.org/10.2118/7977-MS>.
- 23) Metzler, R., Glöckle, W. G. y Nonnemacher, T. F. 1994. Fractional Model Equation for Anomalous Diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **211** (1): 13-24. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(94)90064-7).
- 24) Metzler, R. y Klafter, J. 2000. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports* **339** (1): 1-77. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3).
- 25) Moench, A. 1984. Double-Porosity Models for a Fissured Groundwater Reservoir With Fracture Skin. *Water Resources Research* **20** (7): 831-846. <https://doi.org/10.1029/WR020i007p00831>.
- 26) Nabor, G. W. y Barham, R. H. 1964. Linear Aquifer Behavior. *J Pet Technol* **16** (5): 561-563. SPE-791-PA. <https://doi.org/10.2118/791-PA>.
- 27) Najurieta, H. 1980. A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs. *J Pet Technol* **32** (7): 1241-1250. SPE-6017-PA. <https://doi.org/10.2118/6017-PA>.
- 28) O'Shaughnessy, B. y Procaccia, I. 1985. Analytical Solutions for Diffusion on Fractal Objects. *Phys. Rev. Lett.* **54** (5): 455-458. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.455>.

- 29) Shchelkachev, V. N. 1971. A General Solution for the Differential Equations of One-Dimensional Nonstationary Flow in a Multidimensional Space. *Fluid Dynamics* **6** (3): 481-487. <https://doi.org/10.1007%2Fbf01014002>.
- 30) Stehfest, H. 1970. Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms. *Communications ACM* **13** (1): 47-49. <https://dx.doi.org/10.1145/361953.361969>.
- 31) Theis, C. 1935. The Relations Between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Groundwater Storage. *Eos Trans. AGU* **16** (2): 519-524. <https://doi.org/10.1029/TR016i002p00519>.
- 32) Van Everdingen, A. F. y Hurst, W. 1949. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *J Pet Technol* **1** (12): 305-324. SPE-949305-G. <https://dx.doi.org/10.2118/949305-G>.
- 33) Warren, J. E. y Root, P. J. 1963. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *SPE J.* **3** (3): 245-255. SPE-426-PA. <https://doi.org/10.2118/426-PA>.

Semblanza de los autores

Fernando Ascencio Cendejas

Graduado en 1981 de Ingeniero en Energía en la Universidad Autónoma Metropolitana. En 1990 graduado como Maestro en Ingeniería Petrolera en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, y en 1996, en la misma institución, obtuvo el grado de Doctor en Ingeniería. Su proyecto de investigación doctoral versó sobre procesos de transferencia de calor en medios naturalmente fracturados, por el cual obtuvo mención honorífica. En 1977 obtuvo el premio "El mejor Estudiante de México" otorgado por comité CONACYT-DIARIO DE MEXICO-ANUIES. Fue miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel I en el periodo 1994-2010, e integrante del catálogo de investigadores del Atlas de la Ciencia Mexicana.

Inició en 1981 su experiencia profesional como investigador en el departamento de Termodinámica de la División de Investigación Básica de Procesos del Instituto Mexicano del Petróleo. Posteriormente; de 1982-1994, colaboró en la Gerencia de Proyectos Geotermo Eléctricos de la Comisión Federal de Electricidad, realizando actividades de ingeniería de yacimientos, particularmente, de caracterización y simulación numérica. De 1994-1997 se desempeñó como investigador en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana, en donde impartió diversas cátedras, entre otras, Termodinámica, Fenómenos de Transporte, Variable Compleja, Mecánica de los Fluidos. En esta institución fue responsable del diseño del plan de estudios de la Maestría en Ingeniería Mecánica, opción en Termociencias. Actualmente es profesor por asignatura en el Posgrado de Ingeniería Petrolera de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, donde imparte la asignatura de Fenómenos de Transporte, Matemáticas Aplicadas y Modelación Matemática con Aplicaciones a las Geociencias y Termociencias

Ha publicado más de 40 artículos técnicos en diversos foros nacionales e internacionales. Los temas principales han sido en ingeniería de yacimientos, pruebas de transitorios de presión en pozos, medios naturalmente fracturados, productividad de pozos y procesos de transferencia de calor en sistemas hidrotermales. Coautor, con personal técnico del IMP, de 5 patentes, dos de ellas en Estados Unidos y Canadá [Downhole shut-in device for pressure variation testing in gas lift Wells CA, US2819808A1; Flow pattern enhancer system for gas wells with liquid load problems, US20130048293A1]. Recibió en forma conjunta el Premio Innova 2006 de la Presidencia de la República, por el proyecto de Productividad de Pozos en Región Sur de PEP.

Desde 1997 colabora en Pemex Exploración y Producción, laborando inicialmente en la Subdirección de Tecnología y Desarrollo Profesional, y actualmente es Subgerente en la Gerencia de Dictamen Técnico de Proyectos de la Subdirección Planeación y Evaluación.

Ricardo Posadas Mondragón

Experiencia de 14 años como Ingeniero Petrolero en el área de Productividad de Pozos y Yacimientos, estudió la licenciatura (2004) y Maestría en Ingeniería Petrolera, Yacimientos (2015), ambas en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Durante este tiempo ha realizado análisis e interpretación de datos de Presión-Producción, en el Activo Integral de Producción Cantarell. Actualmente es Líder de Caracterización Dinámica de Yacimientos Akal-Sihil. También se ha desempeñado como docente en la UNAM y UNACAR, así como instructor de Cursos de Análisis de Pruebas de Presión a través del CIPM Sección Carmen.