

## Métodos de balance de materia para la estimación dinámica del volumen original de aceite en yacimientos que comparten un acuífero común

*Julieta Álvarez Martínez*

[julalv.92@gmail.com](mailto:julalv.92@gmail.com)

*Fernando Samaniego Verduzco*

[fersamaniegov@hotmail.com](mailto:fersamaniegov@hotmail.com)

UNAM

Artículo recibido en marzo de 2017 y aceptado en mayo de 2017

### Resumen

Uno de los mecanismos de producción más importantes en los yacimientos es la entrada de agua, ya que ésta puede proporcionar factores de recuperación entre 15 y 60%, dependiendo de las propiedades del acuífero y del tamaño de éste, por lo tanto, la caracterización del acuífero resulta relevante. Muy poco se conoce normalmente sobre un acuífero, ya que se procura no alcanzar dicha zona durante el desarrollo de un pozo petrolero.

La entrada de agua a un yacimiento se puede ver alterada debido al efecto de otros campos que se localicen en el mismo acuífero. Esto se puede afirmar debido a que la entrada de agua está controlada por la caída de presión en los yacimientos, y la caída de presión se verá incrementada debido a la interferencia como se explicará más adelante.

La comunicación hidráulica entre yacimientos era poco estudiada hasta el descubrimiento del campo East Texas en Estados Unidos. En México, yacimientos importantes se encuentran localizados en un acuífero común; por lo que se comenzó a estudiar el efecto de interferencia entre campos debido a que algunos de ellos se han descubierto a una presión menor a la esperada.

El objetivo de este trabajo es estudiar y modificar los métodos de Hurst y Robinson para estimar el volumen original dinámico de aceite de un yacimiento A tomando en cuenta la interferencia que ejercen los campos B y C, localizados en un mismo acuífero.

**Palabras clave:** Balance de materia, acuífero común.

### Material balance methods for estimating the dynamic original oil in place for reservoirs located in a common aquifer

#### Abstract

One of the most important reservoir production mechanisms is water drive, which can contribute to achieve recovery factors in a range from 15 to 60%, depending on the aquifer properties and size, thus aquifer characterization is critical for these kind of reservoirs. Seldom broad data on the aquifer is acquired, since this zone is usually avoided during the development of an oil well.

Water influx into a reservoir may be impacted due to the effect of other oil reservoirs that are in contact with a common aquifer. Results of this analysis confirm that water influx is controlled by pressure drop in the reservoirs, and pressure drop will increase due to interference effect from other oil reservoirs.

Hydraulic communication between reservoirs was not subject for research until the discovery of the East Texas field located in the US during the 1910s. In Mexico, important reservoirs share a common aquifer; the interest in studying interference began when reservoirs were discovered at a minor pressure than expected.

The objective of this study is to analyze and modify Hurst and Robinson's methods to estimate dynamic original oil in place for a reservoir A, incorporating the interference exerted by 2 fields, B and C, located in a common aquifer.

**Keywords:** Material balance, common aquifer.

## Yacimientos localizados en un acuífero común

Existen métodos diversos para describir el comportamiento de campos localizados en un acuífero en común. Se han desarrollado varios modelos matemáticos por autores como: Bell y Shepherd (1951); Mortada (1955); Hurst (1960); Rodríguez, Samaniego y Cinco, (1996).

En este trabajo se modificarán para poder aplicarse a yacimientos reales los métodos de Hurst y Robinson, éste último basado en la teoría para la interferencia transitoria (comportamiento infinito) planteada por Mortada.

## Método de Robinson

Se analizó la ecuación de balance de materia (EBM) planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon (1953), incluye un término que contempla el efecto de interferencia, el cual se planteó partiendo de la teoría derivada por Mortada (1955), se basa en una aplicación transitoria (comportamiento infinito) para el principio de superposición, para analizar los efectos individuales que cada campo adicional que comparte el acuífero común tiene sobre el campo de interés.

La Ecuación 1 se divide entre el factor de expansión:  $B_o c_t \Delta p$ , obteniéndose:

$$\frac{N_p}{B_o c_t \Delta p} = N + \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w \sum_{t_D} \Delta p' Q_{wD}(t_D)}{5.615 B_o c_t \Delta p} \quad (2)$$

La ecuación planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon es la siguiente:

$$N_p = N B_o c_t \Delta p + \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w}{5.615} \sum_{t_D} \Delta p' Q_{wD}(t_D) \quad (1)$$

donde:

- $N_p$  = Producción acumulativa de aceite y agua, (barriles)
- $N$  = Volumen original de aceite, (barriles)
- $\Delta p'$  = Caída de la presión promedio en la zona de hidrocarburos, (psi)
- $Q_{wD}(t_D)$  = Entrada de agua adimensional
- $r_b$  = Radio del yacimiento (ft)
- $\phi$  = Porosidad del acuífero
- $h$  = Espesor del acuífero (ft)
- $c_w$  = Compresibilidad del agua ( $psi^{-1}$ )
- $B_o$  = Factor de volumen del aceite

Entonces la Ecuación 2 describe una relación lineal entre  $N_p/B_o c_t \Delta p$  y  $\sum \Delta p' Q_{wD}(t_D)/B_o c_t \Delta p$  donde la pendiente es la constante  $2\pi r_b^2 \phi h c_w / 5.615$  y la intersección con el eje de las ordenadas es el volumen original de aceite,  $N$ .

Para lograr el mejor ajuste del comportamiento del yacimiento con respecto a una línea recta, se debe calcular el valor para el intervalo de tiempo adimensional  $\Delta t_D$  correcto.

$$\Delta t_D = \frac{.0002367 k \Delta t}{\phi \mu_w c_w r_b^2} \quad (3)$$

donde:

$k$  = Permeabilidad del acuífero (*md*)

$\Delta t$  = Tiempo de producción (*horas*)

$\mu_w$  = Viscosidad del agua (*cp*)

Como se puede observar, las propiedades más importantes del acuífero se involucran en este término, por lo que para conocer este valor se requiere realizar la mejor caracterización posible para el acuífero, que permita estimar la constante de proporcionalidad entre el tiempo adimensional  $\Delta t_D$  y el tiempo real de explotación del yacimiento,  $\Delta t$ , para la cual se tiene la menor desviación del comportamiento del yacimiento con respecto a la línea recta descrita por la Ecuación 1. Se deben variar las propiedades del acuífero que presenten mayor incertidumbre, de acuerdo a los rangos físicos disponibles para los parámetros que intervienen en la constante de proporcionalidad.

La linealidad de la ecuación podría no satisfacerse debido a las causas siguientes:

- Efectos de la frontera de un acuífero finito, (la EBM expresada por la Ecuación 1 no especifica la dimensión del acuífero; es decir la entrada de agua  $Q(t_D)$  puede corresponder a un acuífero infinito o finito)

- Efecto de interferencia con otros campos localizados en un mismo acuífero

Se discutirá más adelante que los efectos anteriores pueden ser corregidos.

La presión de interferencia causada por otros yacimientos resulta en una caída adicional en la presión en el contacto original agua-aceite, y se representa como  $\Delta p'_{in}$ , la cual incrementará la caída de presión  $\Delta p'$  causada por la producción del yacimiento en estudio.

$$(\Delta p'_{in})_j = \left(\frac{\mu_w}{\theta kh}\right)_j \sum_1^n [\Delta W'_e p_D(r_D, t_D)]_j \quad (4)$$

donde:

$\theta$  = Ángulo a través del cual se presenta la entrada de agua

$\Delta W'_e$  = Cambio instantáneo en la entrada de agua al campo de interferencia

$p_D(r_D, t_D)$  = Función de gasto terminal constante

$j$  = Representa al yacimiento que ejerce interferencia

$n$  = Periodo de producción

La presión total de interferencia en el campo de interés ejercida por  $k$  campos considerando  $\theta=2\pi$  radianes, será entonces:

$$\sum_1^{j=k} (\Delta p'_{in})_j = \frac{\mu_w}{2\pi kh} \sum_1^{j=k} \sum_1^n [\Delta W'_e p_D(r_D, t_D)]_j \quad (5)$$

Para simplificar la expresión anterior, se define el parámetro  $\Delta I$  siguiente:

$$\Delta I = \sum_1^{j=k} \sum_1^n [\Delta W'_e p_D(r_D, t_D)]_j \quad (6)$$

Finalmente, la ecuación de balance de materia planteada inicialmente, corregida por los efectos de interferencia causados por los yacimientos vecinos que comparten el acuífero común, se expresa de la siguiente manera:

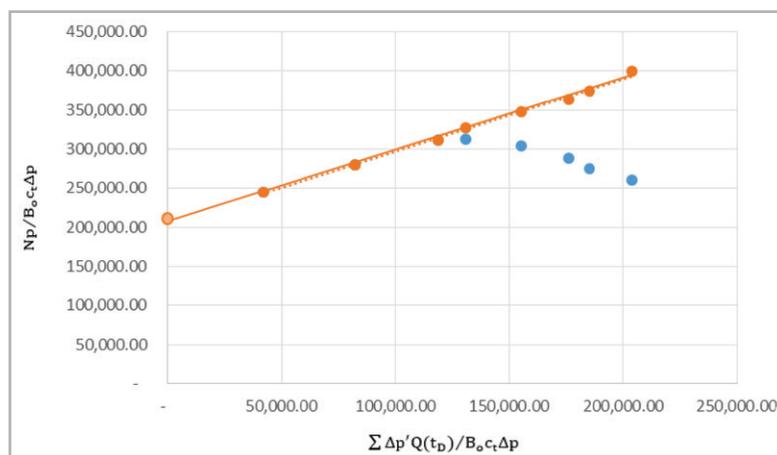
$$N_p = NB_o c_t \Delta p + \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w}{5.615} \sum_1^n \Delta p' Q_{wD}(t_D) - \frac{2\pi h r_b^2 \phi c_w \mu_w (.0002367)}{2\pi h k} \sum_1^n \Delta I' Q_{wD}(t_D) \quad (7)$$

Dividiendo la Ecuación 7 entre el factor de expansión  $B_o c_t \Delta p$ :

$$\frac{N_p}{B_o c_t \Delta p} + \frac{\Delta t}{B_o c_t \Delta p \Delta t_D} \sum_1^n \Delta I' Q_{wD}(t_D) = N + \left[ \frac{2\pi r_b^2 \phi h c_w}{5.615} \sum_1^n \frac{\Delta p' Q_{wD}(t_D)}{B_o c_t \Delta p} \right]. \quad (8)$$

En la **Figura 1** se presentan las ecuaciones de balance de materia planteadas por Van Everdingen, Timmerman y McMahon; y Robinson en la forma de la ecuación de una línea recta para un yacimiento sujeto a la interferencia de otros campos. Se observan dos tendencias en la gráfica, una denotada por color naranja y otra por color azul; la línea naranja representa el método de balance de materia planteado por Robinson, (Ecuación 8) y la curva azul

representa la ecuación de balance de materia planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon (Ecuación 2); la diferencia radica en que la ecuación planteada por Van Everdingen, Timmerman y McMahon no contempla la interferencia, la cual, al presentarse realmente, se muestra como una desviación con respecto a la tendencia recta convencional, que no toma en cuenta la interferencia de yacimientos vecinos con los que comparte acuífero común.



**Figura 1.** Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson.

Como se mencionó previamente, este método considera un acuífero de dimensión infinita; entonces el comportamiento de los yacimientos no se verá afectado por la frontera externa del acuífero durante el periodo de análisis.

Lo anterior implícitamente incluye ciertos errores, por lo que ahora se considerará un acuífero de tamaño finito,

mediante el uso de las ecuaciones planteadas por Klins, Bouchard y Cable, (1988), para el caso de la presión adimensional  $p_D(r_D, t_D)$  para producción a gasto constante, las cuales se emplean para el cálculo de la caída de presión de interferencia  $\Delta p'_{in}$ , como se muestra en la Ecuación 5, así como para la entrada de agua acumulativa adimensional  $Q_{wD}(t_D)$  en el campo de interés:

- Condición de gasto constante  $p_D(r_D, t_D)$  para un acuífero de dimensión finita:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2}{(r_D^2 - 1)} \left( \frac{1}{4} + t_D \right) - \frac{(3r_D^4 - 4r_D^4 \log_e r_D - 2r_D^2 - 1)}{4(r_D^2 - 1)^2} + \frac{2e^{-\beta_1^2 t_D} J_1^2(\beta_1 r_D)}{\beta_1^2 [J_1^2(\beta_1 r_D) - J_1^2(\beta_1)]} + \frac{2e^{-\beta_2^2 t_D} J_1^2(\beta_2 r_D)}{\beta_2^2 [J_1^2(\beta_2 r_D) - J_1^2(\beta_2)]} \quad (9)$$

$$\beta_1 = b_0 + b_1[\operatorname{csch}(r_D)] + b_2(r_D)^{b_3} + b_4(r_D)^{b_5}$$

$$\beta_2 = b_0 + b_1[\operatorname{csch}(r_D)] + b_2(r_D)^{b_3} + b_4(r_D)^{b_5}$$

Entrada acumulativa de agua a condición de presión constante,  $Q_{wD}(t_D)$ , para un acuífero de dimensión finita:

$$Q_{wD}(t_D) = \frac{r_D^2 - 1}{2} - \frac{2e^{-\alpha_1^2 t_D} J_1^2(\alpha_1 r_D)}{\alpha_1^2 [J_0^2(\alpha_1) - J_1^2(\alpha_1 r_D)]} - \frac{2e^{-\alpha_2^2 t_D} J_1^2(\alpha_2 r_D)}{\alpha_2^2 [J_0^2(\alpha_2) - J_1^2(\alpha_2 r_D)]} \quad (10)$$

$$\alpha_1 = b_0 + b_1[\operatorname{csch}(r_D)] + b_2(r_D)^{b_3} + b_4(r_D)^{b_5}$$

$$\alpha_2 = b_0 + b_1[\operatorname{csch}(r_D)] + b_2(r_D)^{b_3} + b_4(r_D)^{b_5}$$

Los valores de las constantes  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  pueden encontrarse en la referencia (8).

## Método de Hurst

El trabajo de Hurst (1960), tuvo como objetivo simplificar la ecuación de balance de materia mediante el uso de la transformada de Laplace, de tal forma que se pueda expresar la presión promedio del yacimiento en forma explícita, que es un parámetro esencial en los estudios de ingeniería de yacimientos.

Para explicar el problema anteriormente descrito, primeramente se desarrollarán las ecuaciones para el caso de un yacimiento bajosaturado, con entrada de agua radial y considerando un acuífero de dimensión infinita.

La ecuación de balance de materia para un yacimiento bajosaturado es la siguiente:

$$N(B_o - B_{oi}) = N_p B_o - W_e \quad (11)$$

donde:

$N_p$  = Producción acumulativa de aceite y agua, (barriles)

$N$  = Volumen original de aceite, (barriles)

$W_e$  = Entrada de agua al campo, (barriles)

$B_o$  = Factor de volumen del aceite

$B_{oi}$  = Factor de volumen inicial del aceite

Se considera el cambio en el volumen de fluidos contenidos en el yacimiento como respuesta a la disminución en la presión causada por la producción de fluidos, (aceite y agua), se manifiesta como la producción de aceite.

Suponiendo que el aceite se comporta como un fluido ligeramente compresible, su factor de volumen puede expresarse por medio de la Ecuación 12:

$$B_o = B_{oi} [1 + c_o(p_i - p)] \quad (12)$$

donde:

$c_o$  = Compresibilidad del aceite ( $psi^{-1}$ )

$p_i$  = Presión inicial de yacimiento ( $psi$ )

$p$  = Presión promedio del yacimiento ( $psi$ )

Substituyendo la Ecuación 12 en la Ecuación 11:

$$N(B_{oi}c_o\Delta p) = N_p B_{oi} [1 + c_o(p_i - p)] - W_e \quad (13)$$

donde:

$$\Delta p = p_i - p$$

Si se supone que la expansión del aceite producido  $[N_p B_{oi} c_o (p_i - p)]$  es pequeña en comparación con la expansión del volumen original de aceite ( $N$ ) del yacimiento (Hurst, 1960), la Ecuación 13 puede expresarse en la forma siguiente:

$$N(B_{oi}c_o\Delta p) = N_p B_{oi} - W_e \quad (14)$$

La entrada de agua en forma radial  $W_e$  a un yacimiento, definida por Van Everdingen y Hurst, se expresa por medio de la Ecuación 15:

$$W_e = 2\pi\phi c_w h r_b^2 \int_0^{t_D} \frac{d\Delta p}{dt'_D} Q_{wD}(t_D - t'_D) dt'_D \quad (15)$$

Considerando a diferencia de Hurst (1960), un gasto de producción del yacimiento real variable  $Q_o(t)$ , y expresando al tiempo real  $t$  en forma adimensional:

$$N_p = \frac{\phi\mu_w c_w r_b^2}{k} \int_0^{t_D} Q_o dt_D \quad (16)$$

donde:

$\mu_w$  = Viscosidad del agua

$k$  = Permeabilidad del acuífero

$Q_o$  = Gasto de producción del campo

Substituyendo las Ecs. 15 y 16 en la Ecuación 14, resulta:

$$N(B_{oi}c_o\Delta p) = B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_b^2}{k} \int_0^{t_D} Q_o dt_D - 2\pi\phi c_w h r_b^2 \int_0^{t_D} \frac{d\Delta p}{dt'_D} Q_{wD}(t_D - t'_D) dt'_D \quad (17)$$

Transformando al plano de Laplace la Ecuación 17:

$$N(B_{oi}c_o\overline{\Delta p}) = B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_b^2 Q_o}{k s} - 2\pi\phi c_w h r_b^2 s \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD} \quad (18)$$

Dividiendo la Ecuación 18 entre  $NB_{oi}c_o$ :

$$\overline{\Delta p} = \frac{2\pi h B_{oi} \phi \mu_w c_w r_b^2 Q_o}{2\pi h k N B_{oi} c_o s} - \frac{2\pi\phi c_w h r_b^2}{N B_{oi} c_o} s \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD} \quad (19)$$

Si se define el término siguiente para simplificar la ecuación anterior:

$$\sigma = \left( \frac{2\pi}{5.615} \right) \frac{\phi c_w h r_b^2}{N B_{oi} c_o} \quad (20)$$

$$\overline{\Delta p} = \sigma \frac{B_{oi} \mu_w Q_o}{2k\pi h s} - \sigma s \overline{\Delta p} \overline{Q}_{wD} \quad (21)$$

Finalmente, despejando la caída de presión en el plano de Laplace  $\overline{\Delta p}$  de la ecuación anterior, y realizando un análisis de unidades para poder obtener la caída de presión en psi, resulta la ecuación siguiente:

$$\overline{\Delta p} = \sigma \frac{887.026 B_{oi} \mu_w Q_o}{2k\pi h s (1 + s\sigma \overline{Q}_{wD})} \quad (22)$$

La entrada de agua adimensional acumulativa al campo puede expresarse, (Van Everdingen y Hurst, 1949):

$$Q_{wD}(t_D) = \int_0^t \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} dt_D \quad (23)$$

La transformada de Laplace de la entrada acumulativa adimensional de agua para un acuífero de dimensión infinita, se dedujo por Van Everdingen y Hurst (1949):

$$\bar{Q}_{wD}(s) = \frac{K_1(\sqrt{s})}{s^{3/2} K_0(\sqrt{s})} \quad (24)$$

Sustituyendo la Ecuación 24 en la Ecuación 22:

$$\bar{\Delta p} = \sigma \frac{887.026 B_{oi} \mu_w}{2k\pi h} \frac{Q_o}{s(1+s\sigma \frac{K_1(\sqrt{s})}{s^{3/2} K_0(\sqrt{s})})} \quad (25)$$

Esta ecuación representa la caída de presión total en el yacimiento debido a su producción. Para obtener la inversión numérica de la Ecuación 25, se puede emplear el algoritmo de Stehfest.

Para considerar un acuífero de dimensión finita, primero es establecer que no existe flujo a través de la frontera externa del acuífero, R:

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=R} = 0 \quad (26)$$

La ecuación de difusión en forma radial se tratará mediante el uso de la transformada de Laplace de la manera siguiente:

$$-\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (27)$$

$$\int_0^\infty e^{-st_D} \left(\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right) dt_D = \int_0^\infty e^{-st_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} dt_D \quad (28)$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_D(s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{p}_D(s)}{dr_D} = \int_0^\infty e^{-st_D} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} dt_D \quad (29)$$

El término del lado derecho de la Ecuación 29 se transformará al plano de Laplace mediante la Ecuación 30:

$$\int_0^\infty e^{-st_D} \frac{dp_D}{dt_D} dt_D = e^{-st_D} p_{D(t_D)} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st_D} p_{D(t_D)} dt_D = s\bar{p}_D(s) - p_{D(t_D=0)} \quad (30)$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_D(s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{p}_D(s)}{dr_D} = s\bar{p}_D(s) - p_{D(t_D=0)} \quad (31)$$

Karman y Biot (1940), demuestran que la solución general para la Ecuación 29 está dada por:

$$\bar{p}(r_D, s) = A I_0(r_D \sqrt{s}) + B K_0(r_D \sqrt{s}) \quad (32)$$

Para cumplir con las condiciones de frontera, se determinarán los valores para las constantes A y B correspondientes.

La transformada para la condición de frontera a un radio  $r_D=1$ , correspondiente al radio exterior equivalente del yacimiento:

$$\frac{1}{s} = A I_0(\sqrt{s}) + B K_0(\sqrt{s}) \quad (33)$$

y para la condición  $r_D=R$ :

$$0 = A I_0(R\sqrt{s}) + B K_0(R\sqrt{s}) \quad (34)$$

La solución para las constantes  $A$  y  $B$  resolviendo simultáneamente las Ecs. 2.23 y 2.24:

$$A = K_1(\sqrt{s} R) / s [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + K_o(\sqrt{s}) I_1(\sqrt{s} R)] \quad (35)$$

$$B = I_1(\sqrt{s} R) / s [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + K_o(\sqrt{s}) I_1(\sqrt{s} R)] \quad (36)$$

Sustituyendo las constantes  $A$  y  $B$  en la Ecuación 32:

$$\bar{p}(r_D, s) = \frac{[K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s} r_D) + I_1(\sqrt{s} R) K_o(\sqrt{s} r_D)]}{s [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s} R) K_o(\sqrt{s})]} \quad (37)$$

Para calcular la entrada de agua acumulativa adimensional para una caída de presión unitaria  $\bar{Q}_{wD}(s)$ , se obtendrá la transformada para el gradiente de presión para  $r_D=1$ :

$$-\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{[I_1(\sqrt{s} R) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s} R) I_1(\sqrt{s})]}{s^{1/2} [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s} R) K_o(\sqrt{s})]} \quad (38)$$

Transformando la Ecuación 23 al plano de Laplace y posteriormente sustituyendo en la Ecuación 38, se obtiene la ecuación resultante siguiente:

$$\bar{Q}_{wD}(s) = \frac{[I_1(\sqrt{s} R) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s} R) I_1(\sqrt{s})]}{s^{3/2} [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s} R) K_o(\sqrt{s})]} \quad (39)$$

Un operador  $s$  adicional aparece del lado derecho de la ecuación debido a la transformación al plano de Laplace.

Finalmente, la entrada de agua acumulativa adimensional considerando el tamaño del acuífero, está representada por la Ecuación 39, donde  $R$  es la relación entre el tamaño del acuífero con respecto al tamaño del yacimiento.

Sustituyendo la Ecuación 39 en la Ecuación 22, se calcula la caída de presión total contemplando un acuífero de dimensión finita:

$$\bar{\Delta p} = \sigma \frac{887.026 B_{oi} \mu_w}{2\pi kh} \frac{Q_o}{s \left(1 + s \sigma \frac{[I_1(\sqrt{s} R) K_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s} R) I_1(\sqrt{s})]}{s^{3/2} [K_1(\sqrt{s} R) I_0(\sqrt{s}) + I_1(\sqrt{s} R) K_o(\sqrt{s})]}\right)} \quad (40)$$

La inversión numérica de la Ecuación 40 se obtiene mediante el algoritmo de Stehfest.

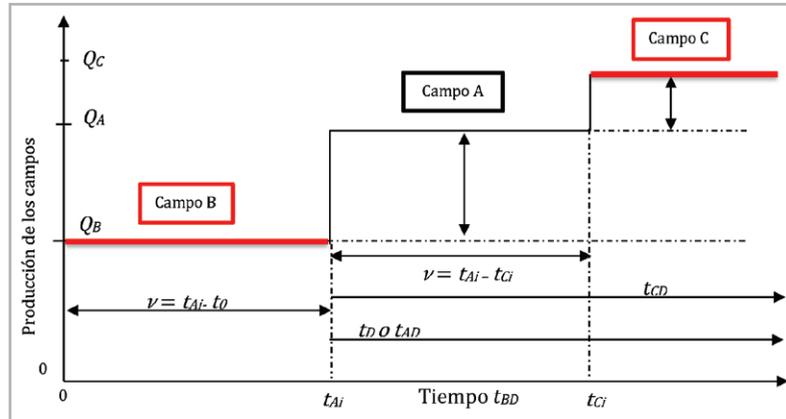
## Efecto de interferencia empleando el método de Hurst

Una vez que se ha discutido cómo se puede manipular la ecuación de balance de materia utilizando la transformada de Laplace para un caso simplificado, como lo es un yacimiento bajosaturado, se incluirá el efecto de interferencia entre yacimientos a través de un acuífero común de dimensión finita.

Se explicará con mayor detenimiento la forma en que se considera la interferencia, realizando el desarrollo de las ecuaciones para tres campos localizados en un acuífero común, aunque podría tratarse con “ $n$ ” números de campos.

Se denominará campo B al yacimiento que comenzó su producción primero y por ello en su etapa inicial la caída de presión sólo es causada por su producción; cuando se abre el campo A, a partir de este momento los campos A y B estarán sujetos al efecto de interferencia, de la misma

forma cuando el campo C entra a producción. El campo C al igual que el A tendrán una caída de presión adicional a lo largo de su vida productiva causada por los campos con los que comparten acuífero, como se puede observar en la **Figura 2**.



**Figura 2.** Gráfica donde se muestra el inicio de producción de los campos A, B y C, (tAi, tCi) en la secuencia de tiempo total, (tBD).

Con este método desarrollado originalmente en una versión simplificada por Hurst, se puede realizar al modificarse apropiadamente el análisis de cualquier campo en la Figura 2, es decir, se pueden desarrollar las ecuaciones para establecer la interferencia que los campos A y C ejercen sobre el campo B, también el efecto que tienen los yacimientos B y C sobre el campo A, o la influencia de los yacimientos B y A sobre el campo C. Cualquiera de los casos

anteriores puede desarrollarse, incluso ampliarse el análisis para incluir más campos de interferencia.

En este artículo se desarrollará el análisis del campo A, tomando en cuenta la interferencia generada por los campos B y C, siendo este análisis el más completo, ya que incluye un campo que se abrió a producción antes que el campo A (campo B) y uno después, campo C.

### Análisis del campo A, contemplando la interferencia de los campos B y C

Para realizar el análisis del campo A considerando el efecto de los campos B y C, se modificará la Ecuación 17 en el término que involucra la entrada de agua al yacimiento A. El efecto del campo B, como se puede observar en la Figura 2, afectará al yacimiento A durante toda su vida productiva y el campo C a partir de su apertura. Con base en este razonamiento:

$$\begin{aligned}
 N(B_{oi}c_o\Delta p) &= B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_A^2}{k} \int_0^{t_{AD}} Q_o dt_{AD} \\
 &- 2\pi\phi c_w h r_A^2 \int_0^{t_{AD}} \frac{d(\Delta p - \Delta p^{AB} - \Delta p^{AC})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

La caída de presión total  $\Delta p$ , es la diferencia entre la presión inicial del yacimiento y las presiones a partir del inicio de la producción del campo de interferencia y presiones subsecuentes; la caída de presión de interferencia adicional debida a la producción de los yacimientos B y C, se denotará como  $\Delta p^{AB}$  y  $\Delta p^{AC}$ , respectivamente. Más adelante se demostrará analíticamente cómo la caída de presión total ( $\Delta p$ ) toma en cuenta la caída de presión debida al efecto de interferencia, ( $\Delta p^{AB}$ ,  $\Delta p^{AC}$ ).

En la Ecuación 41, basada en la Ecuación 17, se establece que el cambio en el volumen de los fluidos está controlado por la caída de presión total ( $\Delta p$ ) en el campo. Sin embargo, el gradiente de presión que causa la entrada de agua al yacimiento, resulta de la caída de presión total, menos el cambio de presión debido a la producción del campo B,  $\Delta p^{AB}$  y posteriormente del campo C,  $\Delta p^{AC}$ .

Algunos de los trabajos que se han realizado en el pasado en cuanto a interferencia entre yacimientos que producen de un acuífero común, constituyen básicamente una aplicación del principio de superposición para considerar el efecto del comportamiento de un campo en el otro. Este concepto sigue teniendo validez; en este estudio se incorpora el mecanismo de entrada de agua modificando la caída de presión total  $\Delta p$ , por el efecto de interferencia causada por otro(s) campo(s) en un yacimiento.

En este trabajo se amplían los resultados de Hurst (1960), expresando de manera explícita la caída de

presión ( $\Delta p$ ), relacionada con todos los factores que contribuyen a su variación. El ajuste para la expansión de los fluidos en el yacimiento se toma en cuenta de manera automática (implícita) en estas ecuaciones, sin recurrir a procedimientos de ensaye y error.

Se realizará, como se mostró en la sección anterior, el despeje e igualación de la caída de presión ( $\Delta p$ ) mediante el uso de la transformada de Laplace. Sin embargo, las condiciones de frontera deben considerarse al aplicar esta transformada para los diferentes cambios en la presión y variables asociadas en la Ecuación 41.

La caída de presión es cero antes de abrir el yacimiento B, presente en la Figura 2, a producción al tiempo cero, por lo que la transformada de  $d\Delta p/(dt_{AD})$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d\Delta p(t)}{dt} dt = e^{-st} \Delta p(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \Delta p(t) dt = s\bar{p}(s) - \Delta p(t=0) \quad (42)$$

Con respecto a la transformada de  $\Delta p^{AB}$  lo anterior no aplica. Se sabe que desde antes del inicio de la producción del campo A, el yacimiento B ya ejercía una caída de presión inicial  $\Delta p_0^{AB}$  en el campo A; de la misma forma cualquier yacimiento que haya entrado a producción antes que el campo A.

Ahora transformando al plano de Laplace la Ecuación 41:

$$\begin{aligned} NB_{oi}c_o\bar{\Delta p} = & B_{oi} \frac{\phi\mu_w c_w r_A^2 Q_o}{k} \frac{1}{s} - 2\pi\phi c_w h r_A^2 s_A \bar{\Delta p} \bar{Q}_{wD} \\ & + 2\pi\phi c_w h r_A^2 \int_0^{\infty} e^{-s_A t_{AD}} \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AB}}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} dt_{AD} + \\ & 2\pi\phi c_w h r_A^2 \int_0^{\infty} e^{-s_A t_{AD}} \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AC}}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} dt_{AD} \end{aligned} \quad (43)$$

Primero se realizará el análisis de la integral indefinida involucrada con la caída de presión debida a la producción del campo B,  $\Delta p^{AB}$  y se denotará como lo muestra la Ecuación 44:

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{AD})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} \quad (44)$$

Más adelante se realizará el procedimiento análogo para la integral indefinida incluyendo a la caída de presión:  $\Delta p^{AC}$ .

A continuación, se definen los parámetros importantes siguientes:

$$\Delta p^{AB} = \Delta p^{AB}(r_{AB}', t_{BD}) \quad (45)$$

$$\Delta p^{AC} = \Delta p^{AC}(r_{AC}', t_{CD}) \quad (46)$$

donde:

$$r_{AB}' = r_{AB} / r_B \quad (47)$$

- $r_{AB}$  = Distancia entre los campos A y B
- $r_B$  = Radio equivalente del campo B
- $t_{BD}$  = Tiempo adimensional referido en específico al campo B

$$r_{AC}' = r_{AC} / r_C \quad (48)$$

- $r_{AC}$  = Distancia entre los campos A y C
- $r_C$  = Radio equivalente del campo C
- $t_{CD}$  = Tiempo adimensional referido en específico al campo C

$$t_{BD} = (kt / \phi \mu_w c_w r^2)_B \quad (49)$$

$$t_{CD} = (kt / \phi \mu_w c_w r^2)_C \quad (50)$$

Las transformadas de Laplace de las Ecs. 45 y 46 se muestran a continuación:

$$\overline{\Delta p}^{AB} = \overline{\Delta p}^{AB}(r_{AB}', s_B) \quad (51)$$

$$\overline{\Delta p}^{AC} = \overline{\Delta p}^{AC}(r_{AC}', s_C) \quad (52)$$

donde:

$s_B$  = Operador para el tiempo  $t_{BD}$

$s_C$  = Operador para el tiempo  $t_{CD}$

Como se puede observar en este trabajo, al tenerse tres campos que comparten el acuífero común, se requieren tres operadores y la conversión de uno a otro no presenta dificultad, porque la transformada de Laplace muestra que un operador es inversamente proporcional a los parámetros físicos asociados con su tiempo absoluto, en una relación de tiempo adimensional.

$$s_A \sim (\phi \mu_w c_w r^2 / k)_A ; s_B \sim (\phi \mu_w c_w r^2 / k)_B ; s_C \sim (\phi \mu_w c_w r^2 / k)_C \quad (53)$$

donde:

$s_A$  = Operador para el yacimiento A

$$s_B = \eta_{AB}^2 s_A \quad (54)$$

$$s_C = \eta_{AC}^2 s_A \quad (55)$$

donde:

$$\eta_{AB}^2 = \eta'_A / \eta'_B \quad (56)$$

$$\eta_{AC}^2 = \eta'_A / \eta'_C \quad (57)$$

también es importante definir:

$$\eta_{BA}^2 = \eta'_B / \eta'_A \quad (58)$$

$$\eta_{CA}^2 = \eta'_C / \eta'_A \quad (59)$$

donde:

$$\eta \eta'_A = (k / \phi \mu_w c_w r^2)_A ; \eta'_B = (k / \phi \mu_w c_w r^2)_B ; \eta'_C = (k / \phi \mu_w c_w r^2)_C \quad (60)$$

La identificación de  $\Delta p^{AB}$  con respecto al tiempo adimensional  $t_{AD}$  indica que, aunque este cambio de presión existe antes del descubrimiento del campo A, Hurst solamente lo incorporó a partir del inicio de su producción, afectando el cálculo para la entrada de agua.

El considerar que el efecto del campo B sobre el campo A inicia a partir que éste abre a producción es una de las limitaciones más importantes de este método, ya que no considera la expansión de los fluidos del campo A cuando se encuentra cerrado, la cual involucra una aportación de fluidos del campo A al acuífero.

Como se mencionó anteriormente la caída de presión  $\Delta p^{AB}$  en las ecuaciones anteriores se refiere al tiempo  $t_{AD}$ ; sin embargo, es necesario relacionar  $\Delta p^{AB}$  con el campo que la origina (campo B) y referirla a la escala del tiempo total; es decir, desde el inicio de la producción del campo B, Figura 2.

$$t_{BD} = \frac{\eta'_B}{\eta'_A} t_{AD} + \eta'_B v \quad (61)$$

donde:

$$v = t_{Ai} - t_0$$

$t_{Ai}$  = Tiempo adimensional del inicio de la producción del campo A

$t_0$  = Tiempo adimensional del inicio de la producción del campo B

Por medio de la Ecuación 61 se puede escribir la Ecuación 44 en términos del tiempo adimensional  $t_{BD}$  y expresarla en función de la escala de tiempo total. Para ello, primero se realizará el cambio en la caída de

presión adicional  $\Delta p^{AB}$  a la secuencia de tiempo total ( $t_{BD}$ ), con la ayuda de la Figura 2 y de la Ecuación 61; considerando que empieza a actuar con el inicio de la producción del campo A, se tiene que:

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AB}(\frac{\eta'_B}{\eta'_A} t'_{AD})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} \quad (62)$$

En el límite inferior de integración se indica que desde el tiempo cero en la escala de tiempo  $t_{AD}$  se tiene el efecto del campo B.

Ahora sustituyendo  $t'_{AD}$  en términos de  $t'_{BD}$ , la Ecuación 62 puede expresarse:

$$S(t_{AD}) = \int_{\frac{\eta'_A}{\eta'_B} v}^{\frac{\eta'_B}{\eta'_A} t_{AD} + \eta'_B v} \frac{\eta'_B}{\eta'_A} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{BD} - \eta'_B v)}{dt'_{BD}} Q' \left( t_{AD} - \frac{\eta'_A}{\eta'_B} (t'_{BD} - \eta'_B v) \right) \frac{\eta'_A}{\eta'_B} dt'_{BD} \quad (63)$$

seguido de  $t_{AD}$  en términos de  $t_{BD}$ :

$$S(t_{BD}) = \int_{\eta'_B v}^{t_{BD}} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{BD} - \eta'_B v)}{dt'_{BD}} \frac{\eta'_B}{\eta'_A} Q' \left( \frac{\eta'_A}{\eta'_B} (t_{BD} - \eta'_B v) - \frac{\eta'_A}{\eta'_B} (t'_{BD} - \eta'_B v) \right) dt'_{BD} \quad (64)$$

Finalmente resulta la Ecuación 62 en términos del tiempo adimensional  $t_{BD}$ :

$$S(t_{BD}) = \frac{\eta'_B}{\eta'_A} \int_{\eta'_B v}^{t_{BD}} \frac{d\Delta p^{AB}(t'_{BD} - \eta'_B v)}{dt'_{BD}} Q' \left( \frac{\eta'_A}{\eta'_B} (t_{BD} - t'_{BD}) \right) dt'_{BD} \quad (65)$$

Para realizar la inversión de la Ecuación 65 se utilizan algunos teoremas incluidos en el Apéndice D de la referencia 2, se observa que dicha ecuación tiene la forma de la Ecuación D.10 del teorema II:

$$\bar{G}(s_B) = \int_0^\infty e^{-s_B u} \frac{d\Delta p^{AB}(u)}{du} = s_B \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \Delta p_0^{AB} \quad (66)$$

Utilizando la Ecuación D.2 del teorema I ubicada en el Apéndice D de la referencia (2), evaluando con  $a$  igual a cero, resulta:

$$\bar{F}(s_B) = \int_0^\infty e^{-s_B t_{BD}} \frac{dQ\left(\frac{\eta'_A t_{BD}}{\eta'_B}\right)}{du} = \frac{\eta'_B}{\eta'_A} \bar{Q}_{WD}\left(\frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_B\right) \quad (67)$$

entonces:

$$\bar{S}(s_B) = e^{-s_B \eta'_B \nu} \left( \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_B} \right) s_B \left( \frac{\eta'_B}{\eta'_A} \right)^2 \bar{Q}_{WD}\left(\frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_B\right) \quad (68)$$

La Ecuación 68 no es la solución que se busca todavía; es necesario obtener la transformada de Laplace para cada término

en la Ecuación 43 con respecto a  $s_A$  en la secuencia de tiempo  $t_{AD}$ . Sin embargo, la Ecuación 68 se utilizará para determinar la transformada como lo requiere la Ecuación 43 mediante el uso de la fórmula de inversión de Mellin, que se muestra en la ecuación siguiente:

$$P(t_D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda \quad (69)$$

El parámetro  $\lambda$  puede ser el operador  $s_A$  y  $s_B$ ; sin embargo, como la transformada de Laplace mostrada en la Ecuación 68 está basada en la secuencia de tiempo total para el sistema, la inversión debe estar por tanto expresada en el tiempo  $t_{BD}$  y en su operador asociado  $s_B$ . Para este problema no se tendrá que realizar la integración de contorno; bastará con trabajar integrando la Ecuación 69:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{s_B t_{BD}} \bar{S}(s_B) ds_B \quad (70)$$

Sustituyendo la Ecuación 68 en la Ecuación 70:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{-s_B(t_{BD} - \eta'_B \nu)} \left( \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_B} \right) \frac{\eta'_B}{\eta'_A} \frac{\eta'_B s_B}{\eta'_A} \bar{Q}_{WD}\left(\frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_B\right) ds_B \quad (71)$$

Una vez que se estableció mediante la fórmula de Mellin la Ecuación 70, se cambiará la Ecuación 71 a la secuencia de tiempo del campo A ( $t_{AD}$ ) y a su operador correspondiente ( $s_A$ ) utilizando las Ecs. 54 y 61, y así la Ecuación 43 se encuentre completamente en los términos correspondientes al campo A:

$$e^{\lambda t_D} \bar{P}(\lambda) d\lambda = e^{s_A t_{AD}} \left( \frac{\eta'_A}{\eta'_B} \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_A} \right) \frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_A \bar{Q}_{WD}(s_A) ds_A \quad (72)$$

Se realizó hasta el momento la sustitución de los valores respecto a la inversión; entonces lo que resulta de la Ecuación 73 es comparable con la Ecuación 68, por lo que se ha encontrado la solución de la integral infinita de la Ecuación 44:

$$\bar{S}(s_A) = \left( \frac{\eta'_A}{\eta'_B} \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_A} \right) \frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_A \bar{Q}_{WD}(s_A) \quad (73)$$

Se continúa con la integral indefinida que involucra a la caída de presión  $\Delta p^{AC}$  en la Ecuación 43, la cual se expresa mediante la Ecuación 74, de manera similar a lo previamente establecido para la integral indefinida involucrando  $\Delta p^{AB}$ .

$$S(t_{AD}) = \int_0^{t_{AD}} \frac{d\Delta p^{AC}(t'_{AD})}{dt'_{AD}} Q'(t_{AD} - t'_{AD}) dt'_{AD} \quad (74)$$

La caída de presión  $\Delta p^{AC}$  en las ecuaciones anteriores está referida al tiempo  $t_{AD}$ , pero se debe considerar que el efecto del campo C actúa hasta que éste entra a producción, como lo establece Hurst, por lo que la caída de presión por interferencia actuará en el tiempo:  $t'_{AD} - \eta'_A v$ .

La ecuación que permitirá realizar el cambio de la escala  $t_{AD}$  a la correspondiente para el campo C:  $t_{CD}$  y viceversa es la ecuación siguiente:

$$t_{AD} = \frac{\eta'_A}{\eta'_C} t_{CD} \quad (75)$$

El procedimiento para obtener la expresión para esta caída de presión será similar al proceso seguido anteriormente. Resulta entonces la Ecuación 76:

$$\bar{S}(s_C) = e^{-s_C \eta'_C v} \frac{\eta'_C s_C}{\eta'_A} \bar{\Delta p}^{AC}(s_C) \bar{Q}_{wD} \left( \frac{\eta'_C}{\eta'_A} s_C \right) \quad (76)$$

Incorporando las Ecs. 73 y 76 a la Ecuación 43:

$$\begin{aligned} NB_{oi} c_o \bar{\Delta p} &= B_{oi} \frac{\phi \mu_w c_w r_A^2 Q_o}{k s_A} - 2\pi \phi c_w h r_A^2 s_A \bar{\Delta p} \bar{Q}_{wD} \\ &+ 2\pi \phi c_w h r_A^2 \left( \frac{\eta'_A}{\eta'_B} \bar{\Delta p}^{AB}(s_B) - \frac{\Delta p_0^{AB}}{s_A} \right) \frac{\eta'_B}{\eta'_A} s_A \bar{Q}_{wD}(s_A) + \\ &2\pi \phi c_w h r_A^2 e^{-s_A \eta'_A v} \frac{s_A \eta'_A}{\eta'_C} \bar{\Delta p}^{AC}(s_C) \bar{Q}_{wD}(s_C) \end{aligned} \quad (77)$$

Despejando la caída de presión en el plano de Laplace  $\bar{\Delta p}$  de la ecuación anterior y realizando un análisis de unidades para poder obtener la caída de presión en psi, resulta la ecuación siguiente:

$$\bar{\Delta p} = \frac{887.026 \sigma B_{oi} \mu_w Q_o}{2\pi k h s_A (1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma s_A \bar{\Delta p}^{AB} \bar{Q}_{wD}}{(1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} - \frac{\sigma \eta_{BA}^2 \Delta p_0^{AB} \bar{Q}_{wD}}{(1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma e^{-s_A \eta'_A v} \eta_{AC}^2 s_A \bar{\Delta p}^{AC} \bar{Q}_{wD}}{(1 + \sigma s_A \bar{Q}_{wD})} \quad (78)$$

Hasta ahora se ha tratado la caída de presión en el campo A debido a la interferencia del campo B,  $\bar{\Delta p}^{AB}$  y del campo C,  $\bar{\Delta p}^{AC}$  de manera simbólica.

Para conocer la caída de presión por interferencia  $\bar{\Delta p}^{AB}$ , se estudiará el campo B y el acuífero en común únicamente, es decir, se realizará un balance de la producción del campo y la entrada de agua del acuífero al campo necesaria para reemplazar el espacio que han dejado los fluidos producidos, y de esta manera obtener la caída de presión efectiva en el acuífero (lo mismo se realizará para el campo C):

$$\bar{\Delta p} = \sigma_B \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w Q_o}{k h} \right)_B \frac{1}{s_B (1 + s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD})} \quad (22)$$

Con la Ecuación 22 se puede calcular la caída de presión efectiva en el yacimiento B debido a su producción sin contemplar interferencia, expresando la entrada de agua a este campo. La caída de presión antes mencionada debe considerarse en el campo A para así establecer la interferencia.

A diferencia de la producción de un yacimiento constante, la caída de presión total considerando un gasto variable de producción en el campo, se determina mediante la ecuación siguiente:

$$\Delta p = Q_{o(0)} p(t_D) + \int_0^{t_D} \frac{dQ_o(t'_D)}{dt'_D} p(t_D - t'_D) dt'_D \quad (79)$$

donde:

$Q_o$  = Gasto variable del campo

$p_{(td)}$  = Caída de presión para el caso de gasto constante

La transformada de Laplace de la Ecuación 79:

$$\overline{\Delta p} = s \bar{Q}_o \bar{P}_{(s)} \quad (80)$$

donde:

$$\bar{P}_{(r,s)} = \frac{K_o(r\sqrt{s})}{s^{3/2} K_1(\sqrt{s})} \quad (81)$$

Se igualan las Ecs. 22 y 80, y se sustituye la Ecuación 81 en la ecuación resultante:

$$\bar{Q}_o = \sigma_B \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w Q_o}{kh} \right)_B \frac{K_1(\sqrt{s_B})}{\sqrt{s_B} K_o(\sqrt{s_B}) [1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD}]} \quad (82)$$

Sustituyendo las Ecs. 81 y 82 en la Ecuación 80:

$$\overline{\Delta p}^{AB} = \sigma_B \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w Q_o}{kh} \right)_B \frac{K_o(r'_{AB} \sqrt{s_B})}{s_B K_o(\sqrt{s_B}) [1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD}]} \quad (83)$$

De manera similar se obtiene la caída de presión en el campo A causada por la producción del campo C,  $\overline{\Delta p}^{AC}$ :

$$\overline{\Delta p}^{AC} = \sigma_C \left( \frac{141.17 B_{oi} \mu_w Q_o}{kh} \right)_C \frac{K_o(r'_{AC} \sqrt{s_C})}{s_C K_o(\sqrt{s_C}) [1+s_C \sigma_C \bar{Q}_{wD}]} \quad (84)$$

Finalmente introduciendo las Ecs. 83 y 84 en la Ecuación 78:

$$\overline{\Delta p} = \frac{141.17 \sigma_B B_{oi} \mu_w Q_o}{khs(1+\sigma_s \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma_s A \bar{Q}_{wD}}{(1+\sigma_s \bar{Q}_{wD})} \left( \frac{141.17 \sigma B_{oi} \mu_w Q_o}{kh} \right)_B \frac{K_o(r'_{AB} \sqrt{s_B})}{s_B K_o(\sqrt{s_B}) [1+s_B \sigma_B \bar{Q}_{wD}]} - \frac{\sigma \Delta p_o^{AB} \eta^2_{BA} \bar{Q}_{wD}}{(1+\sigma_s \bar{Q}_{wD})} + \frac{\sigma e^{-sA\eta^1} A^v \eta^2_{AC} s_A \bar{Q}_{wD}}{(1+\sigma_s A \bar{Q}_{wD})} \left( \frac{141.17 \sigma B_{oi} \mu_w Q_o}{kh} \right)_C \frac{K_o(r'_{AC} \sqrt{s_C})}{s_C K_o(\sqrt{s_C}) [1+s_C \sigma_C \bar{Q}_{wD}]} \quad (85)$$

Esta ecuación representa la caída de presión total en el yacimiento A debido a su producción y a la interferencia de los campos B y C. Para realizar la inversión numérica de esta ecuación se ocupará el algoritmo de Stehfest.

De la misma forma puede realizarse el análisis del campo B considerando como yacimientos de interferencia a los campos A y C, así como para el campo C tomando en cuenta el efecto de los yacimientos A y B.

## Método de Robinson aplicado al campo A y campos de interferencia: B y C

Se elaboró un programa, el cual comienza con el cálculo del intervalo de tiempo adimensional  $\Delta t_D$ , en el que se involucran todas las propiedades relevantes del acuífero; este valor se puede variar sistemáticamente considerando los rangos físicos para las propiedades del acuífero disponibles, hasta lograr el mejor ajuste posible; para este cálculo se empleó un valor de difusividad del acuífero hidráulica ( $\eta = k_a / (\phi \mu_a c_p)$ ) de  $3.75 \times 10^8$  (lb/pg<sup>2</sup> \*md)/cp, un delta de tiempo real igual a seis meses, y el radio del campo de interés: A, que es de 12278.249 ft, obteniéndose como resultado un intervalo de tiempo adimensional igual a 3.

EL valor óptimo del intervalo de tiempo adimensional se determina empleando la mejor información para las propiedades del acuífero involucradas en el cálculo de  $\Delta t_D$ . Empleando el intervalo de tiempo adimensional calculado, se obtiene el valor de la entrada de agua adimensional al yacimiento A,  $Q_{WD}(t_D)$ ; es decir, para el caso de presión constante en el contacto original agua-aceite para un acuífero infinito, con una aproximación polinomial planteada por Klins, Bouchard y Cable, (1988).

Ahora, empleando el principio de superposición se calculará la entrada de agua al campo A, por el momento sin contemplar el efecto de interferencia  $\Delta p' Q_{WD}(t_D)$ , empleándose los datos de producción y las presiones promedio del yacimiento.

Similarmente para cada uno de los campos que generan efectos de interferencia, se debe calcular su entrada de agua.

Se calcula un intervalo de tiempo adimensional para cada campo que ejerce interferencia en el yacimiento A; para ello se necesita conocer el radio equivalente de hidrocarburos de cada uno de estos yacimientos.

Una vez que se cuenta con la estimación para el tiempo adimensional  $t_D$ , se obtiene la presión adimensional  $p_D$  ( $r_D, t_D$ ) correspondiente al caso de gasto de entrada de agua constante; este valor al igual que la entrada de agua adimensional  $Q_{WD}(t_D)$ , se calcularon utilizando una aproximación polinomial.

Ahora bien, con los datos anteriores se obtiene la caída de presión en el yacimiento causada por los cambios de interferencia, ( $\Delta p_{in}$ ).

Finalmente se procede a corregir por el efecto de interferencia, y ajustar mediante el método de mínimos cuadrados la ecuación de balance de materia, considerando el término de interferencia para así poder obtener la intersección con el eje de las ordenadas, el cual indica el volumen original de hidrocarburos en el campo de interés, N.

Los cálculos de balance de materia son válidos una vez que se han alcanzado condiciones de flujo pseudo-estacionario (representado por: pss, "pseudo steady state") en el sistema yacimientos - acuífero común, por lo que se estimó este tiempo de interés  $t_{Dpss}$  para así seleccionar los datos que sean apropiados para estimar el volumen original de aceite del yacimiento de interés, ya que si se emplearan todos se calcularía un valor incorrecto de aceite del yacimiento de interés; en particular para el yacimiento A. La expresión a emplearse es la siguiente, (Earlougher, 1974):

$$t_{Dpss} = \frac{2.367 \times 10^{-4} \eta_a t_{pss \text{ Bloque II}}}{r^2_{\text{Bloque II}}} = \frac{1}{4} \quad (86)$$

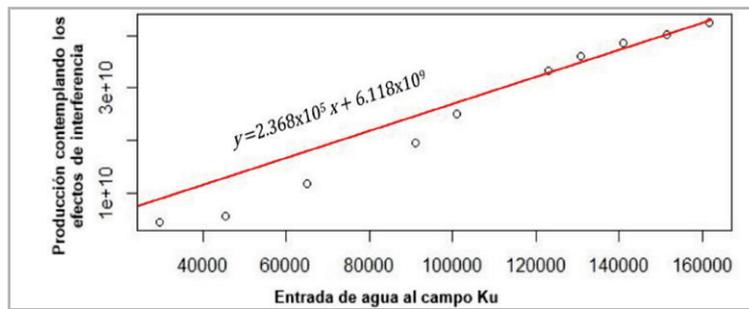
Sustituyendo los valores para la constante de difusión del acuífero y del radio exterior equivalente del acuífero,  $r_{\text{acuífero}} = 26.87 \text{ km}$  se obtiene un resultado  $t_{pss \text{ acuífero}}$  igual a 1173.54 días; entonces a partir de este tiempo concluye el comportamiento infinito del sistema acuífero-yacimientos.

Empleando regresión lineal con respecto a los valores a partir de donde comienza el periodo pseudo-estacionario, se obtiene el cruce con el eje de las ordenadas, el cual corresponde al valor del volumen original de 16280 MM  $B_{ce}$  de aceite para el campo A, el cual es un valor demasiado grande en comparación con la estimación volumétrica,  $N = 5728 \text{ MM } B_{ce}$ .

Para continuar el análisis, se consideró un radio del acuífero de 88,156 ft, estimado con base en los resultados de Ortuño M. (2012) para el área del bloque II que se tiene en la Región Marina.

Con las modificaciones realizadas se obtiene un mejor ajuste de los datos para el comportamiento del

yacimiento A, considerando todos los datos a excepción de los primeros cinco, **Figura 3**, resulta un valor para la intersección al origen “b” o cruce con el eje de las ordenadas, de  $6118 \times 10^8$  barriles, el cual se compara con la estimación para el volumen original volumétrico de aceite del yacimiento A de 5728 MM  $B_{ce}$ .

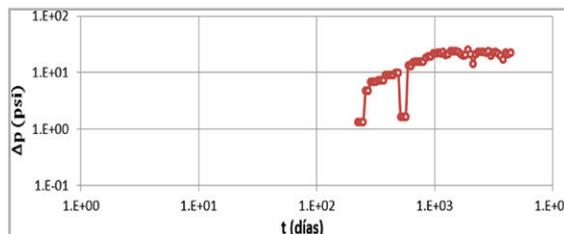


**Figura 3.** Gráfica del método de balance de materia planteado por Robinson, modificado para el campo A, acuífero de dimensión finita e incorporando al campo B.

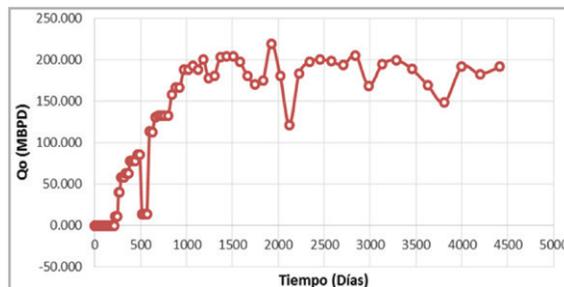
### Método de Hurst aplicado al campo A, sin considerar campos de interferencia, contemplando un acuífero de dimensión finita

Para observar la respuesta de presión  $\Delta p(t)$  que se calcula mediante la Ecuación 40, se obtiene su inversión numérica

mostrada en la **Figura 4**, la cual considera un acuífero de dimensión finita para aplicar este método de Hurst al campo de interés A, se tiene una variación en el gasto acumulado  $Q_o$  en la forma mostrada en la **Figura 5**, y un volumen original de aceite  $N = 5728$  MM  $B_{ce}$ , basado en la estimación estática de Ortuño M., (2012).



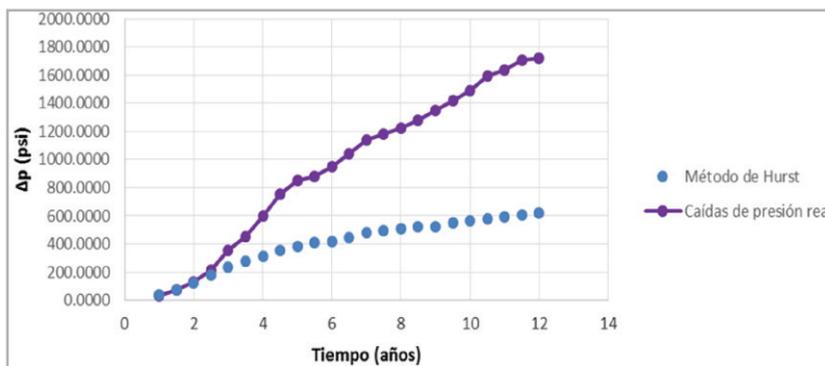
**Figura 4.** Inversión numérica de la Ecuación 3.41 considerando la variación del gasto  $Q_o$  propuesto en la Figura 5.



**Figura 5.** Comportamiento del gasto de producción ( $Q_o$ ) del yacimiento A.

El comportamiento creciente obtenido mediante la inversión numérica mostrado en la Figura 4, puede compararse con respecto a las caídas de presión acumulativas reales correspondientes al campo A, **Figura 6**.

Hasta este momento solo se ha considerado el comportamiento del campo A con su acuífero asociado de dimensión finita, por lo que aún no se logra el ajuste apropiado en la Figura 6; hace falta que se considere el efecto de interferencia de los otros campos con los cuales el yacimiento A comparte acuífero.



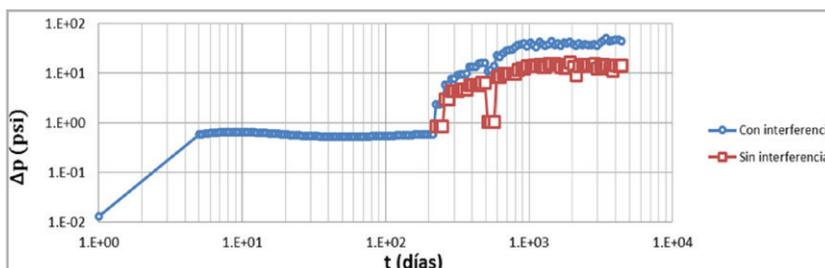
**Figura 6.** Comparación entre las caídas de presión obtenidas mediante el método de Hurst y las caídas de presión reales considerando un volumen original de aceite,  $N = 5728 \text{ MM } B_{ce}$ .

### Efecto de interferencia empleando el método de Hurst aplicado al campo A y campos de interferencia: B y C, contemplando un acuífero de dimensión finita

La inversión numérica de la Ecuación 85 se puede observar en la **Figura 7**, donde también se incorpora la inversión obtenida con la Ecuación 40, (Figura 4), para demostrar como la interferencia entre los campos que comparten

un acuífero común genera una caída de presión adicional, incrementando la caída de presión total en un yacimiento.

Se emplearán los gastos mostrados en la **Figura 8** y se utiliza un volumen original de aceite,  $N = 5728 \text{ MM } B_{ce}$  para el campo A estimado por Ortuño M. (2012),  $N = 9958.74 \text{ MM } B_{ce}$  para el campo B y  $N = 6034 \text{ MM } B_{ce}$  para el campo C. Las propiedades del acuífero necesarias para realizar la inversión de la Ecuación 85, serán las estimadas por Ortuño M. (2012) y en el reporte de la compañía NSAI (2002).



**Figura 7.** Inversión numérica de la Ecuación 85 contemplando los efectos de interferencia en el campo A ejercidos por los campos B y C, así como la inversión de la Ecuación 40 (sin incorporar la interferencia), considerando la producción  $Q_o$  de los yacimientos A, B y C, (Figura 8).

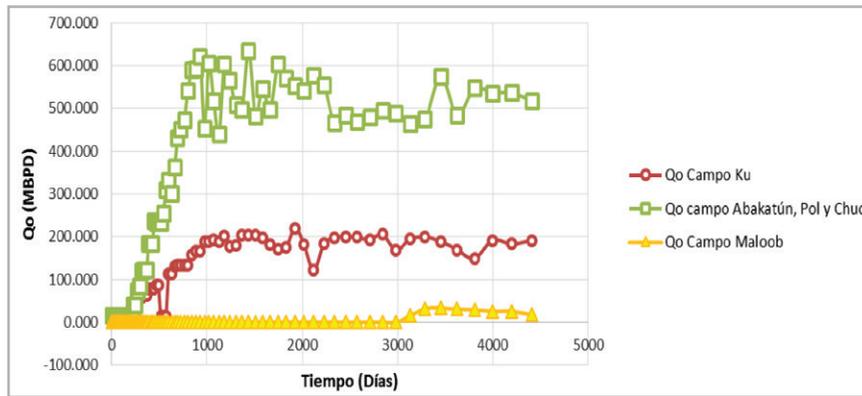


Figura 8. Gastos acumulativos  $Q_o$  de los campos A, B y C utilizados para realizar la inversión numérica de la Ecuación 85.

Se presenta en la Figura 9 la comparación entre las caídas de presión acumulativas reales para el campo A y las obtenidas mediante el método de Hurst.

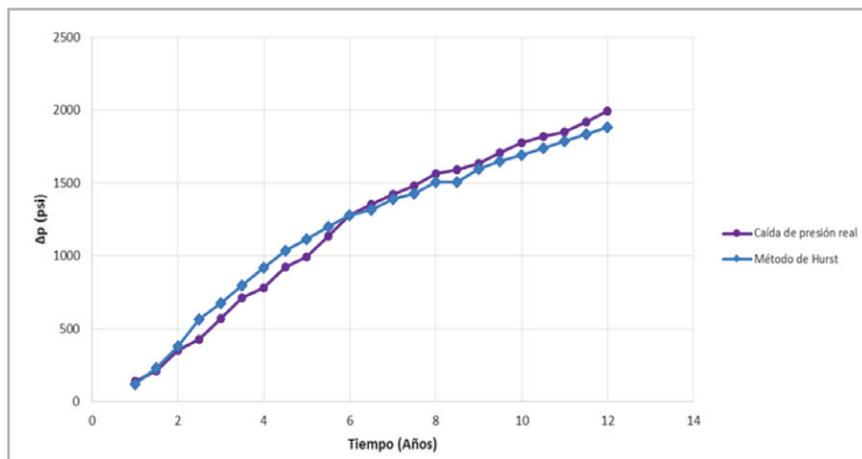


Figura 9. Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo A y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento A, considerando un volumen original de aceite,  $N = 5728 \text{ MM } B_{ce}$ .

Se observa en la Figura 9 que existe una diferencia entre el comportamiento real y el obtenido por el método de Hurst; a pesar de que ya se han incluido todos los campos de producciones importantes y se han ajustado los parámetros del acuífero y de los yacimientos sin exceder los límites de su variación: como la dimensión del acuífero y los radios de los yacimientos.

A continuación, se procede a realizar el ajuste mediante la variación del volumen original del campo de interés (A), como se ha mencionado con anterioridad, se ha empleado hasta el momento un valor volumétrico estimado por Ortuño M., el trabajo presente busca determinar un volumen original

dinámico para el campo A. Se generarán algunas curvas de caída de presión que corresponderán a diferentes valores de volumen original cercanos a  $5728 \text{ MM } B_{ce}$ .

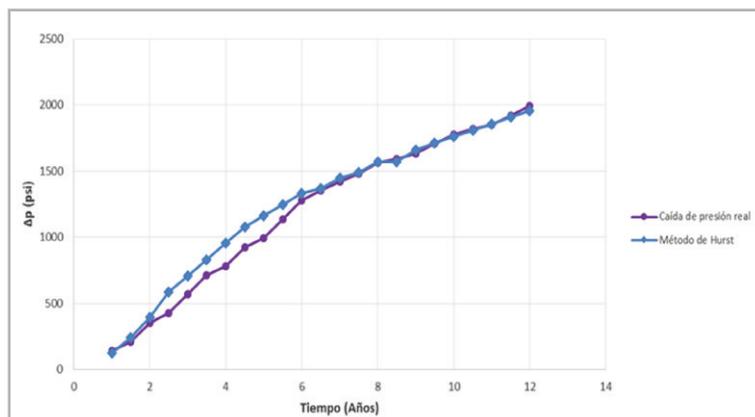
Como ya se estableció, el mejor ajuste se realiza contemplando los campos de interferencia de mayor importancia, proponiendo estimaciones para los volúmenes originales del campo A y para los campos de interferencia (principales) que mejoren el ajuste, los cuales pueden obtenerse mediante cálculos volumétricos y dinámicos disponibles.

Es importante mencionar que aún con todos los ajustes que se han realizado, puede existir cierto error en la determinación del  $N$  para el yacimiento A, ya que algunos de los volúmenes originales de los campos de interferencia empleados son estimaciones volumétricas.

Se realiza la comparación entre las curvas correspondientes a diferentes valores de volumen original para el campo A empleando las estimaciones para los campos de interferencia siguientes: B = 9958.74 MM  $B_{ce}$  y C = 6034 MM  $B_{ce}$ , así también la caída de presión real.

El error menor se tiene para un volumen original de 6000 MM  $B_{ce}$  al evaluar mediante desviación porcentual. Se realizaron más iteraciones con volúmenes cercanos a 6000 millones y se obtuvo un error de 4.5% para un volumen original de 6150 MM  $B_{ce}$ , por lo que el mejor ajuste corresponderá a dicho volumen original.

La **Figura 10** presenta la gráfica comparativa para observar el ajuste correspondiente al volumen original de 6150 MM  $B_{ce}$  y el comportamiento real.



**Figura 10.** Comparación entre las caídas de presión ( $\Delta p$ ) reales para el campo A y las caídas de presión obtenidas con el método de Hurst para el yacimiento A, considerando  $N = 6150$  MM  $B_{ce}$ .

## Conclusiones

### Método de Robinson

1. Se modificó la entrada de agua adimensional y presión adimensional para un yacimiento infinito mediante las ecuaciones de Klins, Cable y Bouchard, para considerar un acuífero de dimensión finita.
2. Se determinó el tiempo en el que termina el comportamiento infinito del bloque II y comienza el flujo pseudo-estacionario,  $t_{D_{pssBloqueII}} = 1173.54$  días, para seleccionar los puntos en los que son válidos los cálculos de balance de materia.
3. Se determinó un volumen original de 6118 MM  $B_{ce}$  para el yacimiento A, el cual es un valor muy cercano al valor volumétrico de 5728 MM  $B_{ce}$ .

### Método de Hurst

1. Se modificaron las ecuaciones planteadas por Hurst, para considerar un gasto variable de producción de los campos y el cálculo para la entrada de agua acumulativa considerando un acuífero de dimensión finita.
2. Se realizó la inversión numérica de las ecuaciones mediante el algoritmo de Stehfest, la cual ayudó a verificar que las ecuaciones desarrolladas fueran correctas al observar el comportamiento de los resultados obtenidos.
3. Se realizó una comparación entre la caída de presión del yacimiento A obtenidas mediante este método con y sin considerar los campos de interferencia, observándose que los campos de interferencia causan una caída de presión adicional, incrementando la caída de presión total.

4. Considerando como campos de interferencia a los yacimientos B y C, se estimó el volumen original del campo A por medio de un ajuste de la caída de presión que se obtiene con este método con respecto a la caída de presión real basado en el porcentaje de error, obteniéndose un valor igual a 6150 MM  $B_{ce}$ .

## Nomenclatura

$B_o$	=	Factor de volumen del aceite
$B_{oi}$	=	Factor de volumen inicial del aceite
$c_t$	=	Compresibilidad total ( $psi^{-1}$ )
$c_w$	=	Compresibilidad del agua ( $psi^{-1}$ )
$h$	=	Espesor del acuífero ( $ft$ )
$j$	=	Representa al yacimiento que ejerce interferencia
$k$	=	Permeabilidad del acuífero ( $md$ )
$n$	=	Periodo de producción
$N$	=	Volumen original de aceite (barriles)
$N_p$	=	Producción acumulativa de aceite y agua (barriles)
$p$	=	Presión promedio del yacimiento ( $psi$ )
$p_D(r_D, t_D)$	=	Presión adimensional para el caso de producción
$p_i$	=	Presión inicial de yacimiento ( $psi$ )
$Q_o$	=	Gasto de producción del campo
$Q_{wD}(t_D)$	=	Entrada adimensional de agua
$r_{AB}$	=	Distancia entre los campos A y B
$r_{AC}$	=	Distancia entre los campos A y C
$r_{AE}$	=	Distancia entre los campos A y E
$r_B$	=	Radio equivalente del campo B
$r_C$	=	Radio equivalente del campo C
$r_b$	=	Radio del yacimiento ( $ft$ )
$S_A$ ó $s$	=	Operador referido al campo A
$S_B$	=	Operador referido al campo B
$S_C$	=	Operador referido al campo C
$S_E$	=	Operador referido al campo E
$t_{AD}$ ó $t_D$	=	Tiempo adimensional referido al campo A
$t_{BD}$	=	Tiempo adimensional referido al campo B
$t_{CD}$	=	Tiempo adimensional referido al campo C
$\Delta p$	=	Caída de presión ( $p_i - p$ )

$\Delta p'$	=	Presión promedio en la zona de hidrocarburos ( $psi$ )
$\Delta p^{AB}$	=	Caída de presión en el campo A debido a la producción del campo B
$\Delta p^{AC}$	=	Caída de presión en el campo A debido a la producción del campo C
$\Delta p^{AE}$	=	Caída de presión en el campo A debido a la producción del campo E
$\Delta t$	=	Tiempo de producción (horas)
$\Delta t_D$	=	Intervalo de tiempo adimensional
$\Delta t_{Dpss}$	=	Tiempo en el que se alcanza el periodo pseudoestacionario en el sistema yacimientos acuífero común
$\Delta W_e'$	=	Cambio instantáneo en la entrada de agua al campo de interferencia
$\phi$	=	Porosidad del acuífero
$\mu_w$	=	Viscosidad del agua (cp)
$\theta$	=	Ángulo en el que se presenta la entrada de agua
$\eta$	=	Difusividad hidráulica
$\eta'$	=	Pseudo difusividad hidráulica

## Referencias

1. Abramowitz, M. y Stegun I. A. 1968. Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications.
2. Álvarez Martínez, J. 2015. Método de Balance de Materia para Yacimientos Localizados en un Acuífero Común. Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ingeniería, México, D.F.
3. Bell, J. S. y Shepherd, J. M. 1951. Pressure Behavior in the Woodbine Sand. J Pet Tech 3 (1): 19-28. SPE-951019-G. <https://doi.org/10.2118/951019-G>
4. Chierici, G.L., Pizzi G. y Ciucci G.M. 1967. Water Drive Gas Reservoirs: Uncertainty in Reserves Evaluation from Past History. J Pet Tech 19 (2) 237-244. <https://doi.org/10.2118/1480-PA>.
5. Craft, B. C. y Hawkins, M. F. 1991. Applied Petroleum Reservoir Engineering, second edition revised. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

6. Carslaw, H. S. y Jaeger J. C. 1959. Conduction of Heat in Solids, second edition revised. London: Oxford University Press.
7. Hurst, W. 1958. The Simplification of the Material Balance Formulas by the Laplace Transformation. Trans., AIME 213: 292-303.
8. Hurst, W. 1960. Interference between Oil Fields. Trans., AIME 219: 175-192.
9. Klins, M. A., Bouchard, A. J. y Cable C. L. 1988. A Polynomial Approach to the Van Everdingen-Hurst Dimensionless Variables for Water Encroachment. SPE Res Eng3 (1): 320-326. <https://doi.org/10.2118/15433-PA>.
10. Matthews, C. S. y Russell D. G. 1967. Pressure Buildup and Flow Tests in Wells. New York: Society of Petroleum Engineers of AIME.
11. Mortada, M. 1955. A Practical Method for Treating Oilfield Interference in Water-Drive Reservoirs. Trans., AIME 204: 217-226.
12. Netherland, Sewell & Associates, Inc. 2002. Estudio para Determinar la Interacción Entre Campos A Través de su Acuífero Común Localizados en la Sonda de Campeche.
13. Ortuño Maldonado, E. 2012. Estudio de Distribución, Comportamiento y Magnitud de los Acuíferos del Cretácico en los Campos de la SPRMNE, APAPCh de la SPRMSO. Artículo presentado en el Congreso Mexicano del Petróleo, Ciudad de México, septiembre 9-14.
14. Parra Pérez, J. 2014. Interferencia Entre Campos Localizados en un Acuífero Común. Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ingeniería, México D.F.
15. Robinson, M. P. 1958. Pressure Interference Correction to the Material Balance Equation for Water-Drive Reservoirs Using a Digital Computer. Trans., AIME 213: 418-422.
16. Rodríguez, F., Samaniego-V., F. y Cinco-Ley, H. 1996. A Model for the Production Interference of Multiple Reservoirs Sharing a Common Aquifer. SPE Advanced Technology Series 4 (1): 38-43. SPE-26975-PA. <https://doi.org/10.2118/26975-PA>.
17. Van Everdingen, A. F. y Hurst, W. 1949. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. J Pet Tech 1 (12): 305-324. <https://doi.org/10.2118/949305-G>.
18. Van Everdingen, A. F., Timmerman, A. F. y McMahon, J. J. 1953. Application of the Material Balance Equation to a Partial Water-Drive Reservoir. J Pet Tech 5 (2): 51-60. <https://doi.org/10.2118/229-G>.

## Semblanza de los autores

### Julieta Álvarez Martínez

Ingeniera Petrolera egresada de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, 2º lugar de la carrera de Ingeniería Petrolera generación 2011. Actualmente Ingeniera de Producción para SIS en Schlumberger Limited.

### Fernando Samaniego Verduzco

Estudió la licenciatura y maestría en Ingeniería Petrolera en la UNAM, y se doctoró en esta área en la Universidad de Stanford, California. Actualmente es profesor titular en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores.

Ha recibido diversos reconocimientos, entre los que destacan el Premio Nacional de Ciencias y Artes; el "Juan Hefferan"; el Premio Instituto Mexicano del Petróleo; el de Ingenieros Petroleros Formation Evaluation. Ha recibido las distinciones "The Rapitsa Gold Medal of Honor", de la Academia de Ciencias Naturales de Rusia, de la que es miembro distinguido. Otra es la "Section Service Award", de la Academia de Ingeniería Petrolera de Estados Unidos.