Resumen

La investigación analiza la forma como se manifiesta la comprensión del concepto de función *en estudiantes de ingeniería, tomando como instrumento de comunicación el lenguaje verbal, y haciendo transferencia de este concepto a los otros tres lenguajes con que cuenta la matemática: algebraico, aritmético y geométrico.*

El análisis de la información recogida nos permitió concluir que no es prudente utilizar solo el lenguaje verbal para evaluar la comprensión, porque se estarían evaluando dos saberes en forma simultánea: los conocimientos matemáticos y la capacidad de redactar correctamente; esto haría que las deficiencias del estudiante en el segundo saber, que no es matemático, alteraran los resultados. Por ello se recomienda: primero, que se utilice el lenguaje oral, que le daría al estudiante la oportunidad de aclarar sus explicaciones y replicar objeciones, pero que se combine con otros lenguajes. Segundo, conviene involucrar un uso abundante del lenguaje verbal en el aula de matemáticas, como una poderosa herramienta para mejorar la comprensión, tanto matemática como lingüística.

Palabras clave: enseñanza matemática, didáctica especial, enseñanza universitaria, lenguaje verbal, lenguaje simbólico (fuente: Tesauro de la Unesco).

El lenguaje verbal como instrumento matemático

Verbal Language as a Mathematical Tool

A linguagem verbal como ferramenta matemática

Héctor Hernando Díaz

Magíster en Pedagogía.
Docente investigador, Universidad de Santo Tomás, Bucaramanga, Colombia.
heticor@gmail.com

Abstract

The study analyzes how an understanding of the concept of function *is manifest in engineering students, using verbal language as a communication tool and transferring this concept to the other three languages in mathematics: algebraic, arithmetic and geometric.*

In analyzing the information collected, the authors were able to conclude that it is unwise to use verbal language alone to assess comprehension, as doing so implies assessing two types of knowledge simultaneously: mathematical knowledge and the ability to write properly. This would result in the student's shortcomings with respect to writing, which is not mathematical knowledge, altering the outcome. The authors have two recommendations: First, that oral language be used, as it gives students an opportunity to clarify their explanations and to answer objections, but it should be combined with other languages. Second, an abundant use of verbal language in the mathematics classroom is convenient as a powerful tool for improving both mathematical and linguistic understanding.

Key words: teaching mathematics, special instruction, university education, verbal language, symbolic language (Source: Unesco Thesaurus).

Resumo

Esta pesquisa analisa a maneira como expressa o entendimento do conceito de função em estudantes de engenharia, tendo a linguagem verbal como ferramenta de comunicação, e transferindo esse conceito para as outras três línguas disponíveis para a matemática: algébrica, aritmética e geométrica.

A análise da informação recolhida permitiu-nos concluir que não é prudente a utilizar apenas a linguagem verbal para avaliar a compreensão, porque se estariam avaliando dois tipos de conhecimento, simultaneamente: o conhecimento matemático e a capacidade de escrever corretamente. Assim, as deficiências do aluno no segundo saber–que não é matemático–alterarão os resultados. Portanto, recomenda-se empregar a linguagem oral, o que daria ao estudante a oportunidade de esclarecer suas explicações e replicar objeções, mas combinada com outras linguagens. Em segundo lugar, se deve usar extensivamente a linguagem verbal na aula de matemática como uma ferramenta poderosa para melhorar a compreensão da matemática e da lingüística.

Palavras-chave: ensino da matemática, didática especial, ensino universitário, linguagem verbal, linguagem simbólica (fonte: Tesouro da Unesco).

Recibido: 2009-04-27 • **Aceptado:** 2009-11-11
ISSN 0123-1294. educ.educ., diciembre 2009, volumen 12, número 3, pp. 13-31

Introducción

Partiendo del criterio universal de que las matemáticas no sólo tienen su propio lenguaje sino que son en sí mismas un lenguaje, puesto que comprenden, entre otras cosas, un conjunto de símbolos semióticos de representación conceptual, la simbiosis entre dos lenguajes que se hizo en esta investigación, vale decir, entre el lenguaje verbal y el de las matemáticas, es de por sí un panorama intelectualmente atractivo, que incita a nuestra imaginación a intentar múltiples combinaciones y correlaciones simbólicas de muy variada significación y contenido.

Esta investigación, que comenzó como una aproximación lingüística al discurso en el aula de matemáticas, pretendiendo medir su eficacia epistemológica y pedagógica, al observarse que era un logro de difícil comprobación, nos llevó a reorientar, por una parte, el objeto analizado, que era la comprensión de las matemáticas en general, y se limitó a la comprensión de un solo concepto: *la función*; por otra parte, también a utilizar como instrumento de análisis, no solamente el discurso del profesor sino los textos de los estudiantes. Quedó así estructurada la investigación que se materializó en su título:

"Análisis de la comprensión del concepto de función por estudiantes de ingeniería, partiendo de textos producidos por ellos"

Pero, no obstante que el discurso de aula del profesor dejó de ser el centro de atención cuando aplicamos el marco teórico, según el cual era pertinente analizar la comprensión desde y hacia las diferentes formas de representación matemática, involucramos el discurso de aula con el fin de indagar su influencia en las respuestas de los estudiantes.

Buscando ampliar la idea que acabamos de exponer, podemos agregar que el consenso pedagógico (o más que pedagógico, de representación semiótica de los conceptos matemáticos universalmente aceptados) dentro del cual "reina", por su importancia, el concepto de *función*, razón por la que fue escogido como blanco de nuestro análisis, tiene identificados cuatro lenguajes o representaciones semióticas de los objetos matemáticos: la representación algebraica, que se expresa a través de fórmulas; el lenguaje aritmético, que se expresa en tablas de duplas (o *n-uplas*) de valores; el lenguaje geométrico, del cual nos interesó en esta ocasión la representación cartesiana, sin que esto signifique despreciar para nada las demás: la recta real, la geometría euclidiana, el plano complejo y la geometría no euclidiana de Lobachevsky y Riemann. Finalmente ("last but not least") el lenguaje natural o lenguaje verbal, centro de atención de este experimento didáctico.

Objetivo general

Aunque el objetivo inicial sufrió algunos altibajos, el objetivo general definitivo consistió en analizar la comprensión del concepto de *función* en sus diferentes significaciones, haciendo que los estudiantes representaran una función en un determinado lenguaje, partiendo de su representación en otro.

Marco teórico

Puesto que el propósito de esta investigación es indagar sobre el proceso de comprensión matemática, es preciso saber qué entendemos por comprensión en el ámbito matemático, aunque mucho de lo que digamos acerca de este concepto podrá ser aplicable en otros campos.

Para la caracterización del concepto de comprensión se analizarán, entre otros, los planteamientos de Anna Sierpinska en su libro *Understanding in Mathematics* (La comprensión en matemáticas) y de James Hiebert y Thomas P. Carpenter (1992) en un texto titulado *Learning and Teaching with understanding* (Enseñanza y aprendizaje con comprensión).

En cuanto a la comprensión planteada en forma general, pero teniendo en cuenta que esta autora se mueve en el campo de las matemáticas, nos dice Sierpinska:

> *Muchos actos de comprensión pueden consistir no en representarse a sí mismo el objeto de comprensión sino en trasladarlo de una representación a otra. (Sierpinska, 1994, p. 52).*

De ahí la importancia de que el estudiante sea capaz de transferir un objeto matemático entre dos representaciones semióticas, destreza que fue puesta a prueba en la investigación, con los instrumentos que fueron diligenciados por los estudiantes.

Y en el ámbito propio de las matemáticas, Hiebert a su vez define la comprensión así:

> *Comencemos por definir "comprensión" en términos de la manera como es representada y estructurada la información. Una idea, un procedimiento o un hecho matemático ha sido comprendido, si forma parte de la red interna. En términos más específicos, la matemática es comprendida si su representación mental forma parte de la red mental de representaciones. El grado de comprensión está determinado por la cantidad de conexiones y por la fortaleza de ellas. Una idea, un procedimiento o un hecho matemático ha sido comprendido a cabalidad en la medida en que esté ligado de una manera más sólida y con una mayor cantidad de conexiones (Hiebert, 1992).*

Complementa luego Hiebert la idea ampliando el concepto de comprensión (*understanding*) referido a las matemáticas, con lo que él llama "representación interna y externa", conceptos que guardan estrecha relación con lo dicho por Sierpinska. Nos interesa la representación externa, que la explica así:

> *Para pensar y comunicar ideas matemáticas necesitamos representarlas de alguna manera. Y la comunicación nos exige que la representación sea externa, tomando la forma del lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. Una idea matemática particular casi siempre puede ser representada en alguna o en todas las formas de representación posibles (Hiebert, 1992).*

Tomemos ahora la definición de comprensión que da Juan Godino, en la que hace referencia a las competencias, muy propio de la pedagogía, que es hacia donde está orientada esta investigación. Dice así (subrayamos los dos conceptos relevantes):

> *Veremos la conveniencia de atribuir un significado distinto y complementario a las nociones de* **competencia** *y* **comprensión** *matemática, relacionado con los componentes operatorio (praxémico) y discursivo del conocimiento, respectivamente. (...) existe una relación estrecha entre la* **competencia** *y la* **comprensión** *matemática, entre la práctica y la teoría (Godino, 2002, p. 2).*

Sierpinska profundiza en el tema y entra a tocar el punto que más nos interesa en esta investigación, y que se refiere exactamente al procedimiento de pedirles a los estudiantes que expliquen *con sus palabras* un concepto matemático. Se trata de diferenciar entre la "representación conceptual" en filosofía y lo que ella llama la "concepción" (*conception*) en matemáticas. Hemos subrayado la idea que se relaciona de modo específico con esta investigación:

> *La "representación conceptual" en Educación Matemática se usa en un sentido que está más cerca de "verlo como si fuera" que de "verlo realmente como es". (...) Mientras la "representación conceptual" se define como* **lo que es expresable totalmente en palabras;** *una concepción, en cambio, "puede ser muy intuitiva, parcialmente visualizable y no necesariamen-*

> *te consistente o completa" (Sierpinska, 1994, p. 10).*

Y, por último, sobre las estrategias desde la docencia para buscar la comprensión de los conceptos matemáticos, pensando en que la investigación la hicimos dirigida a estudiantes de ingeniería y no de matemática pura, en el diseño de los instrumentos utilizados tuvimos muy presente lo que dice José Ismael Arcos:

> *Si se enseña a futuros profesionales de la matemática, debe hacerse énfasis en el rigor; pero si se enseña a personas para quienes el cálculo será una herramienta (en las escuelas de ingeniería, por ejemplo) o un elemento más bien cultural (como ocurre en el bachillerato), debe procurarse que los estudiantes entiendan lo más claramente posible los conceptos, aun si eso significa renunciar a cierto nivel de rigor (Arcos Quezada, 2004, p. 105.)*

Explica Sierpinska abordando el tema en dirección opuesta, cuando nos dice qué *no es* comprensión, planeando la diferencia entre *comprender* un concepto y conocer el procedimiento para llegar a determinado resultado.

> *Entender cómo hacer algo, cómo desarrollar una acción práctica, qué hacer para obtener determinados resultados, de ninguna manera es comprender. (...) La comprensión no se orienta ni a los logros que se esperan de la acción ni a los medios que deban emplearse para obtenerlos (Sierpinska, 1994, p. 5).*

Conviene matizar un poco en los efectos de esta idea sobre la didáctica matemática. La capacidad de ejecutar lo que podríamos denominar la "mecánica matemática" no demuestra que el estudiante haya comprendido el concepto. De acuerdo. Simplemente ha aprendido un procedimiento. Pero dentro del proceso de aprendizaje, los procedimientos algorítmicos para solucionar problemas matemáticos (resolver un sistema de ecuaciones, despejar una variable, etc.) son de gran utilidad para los estudiantes de ingeniería que aprenden la matemática como herramienta y no debemos despreciar su importancia práctica. Saber cómo resolver una ecuación, por ejemplo, no implica necesariamente haber comprendido el significado de esa ecuación, pero aun así, el estudiante necesita aprenderlo y es un conocimiento útil para manejar los temas de su carrera.

Y en cuanto al acto mismo de comprender, sólo es posible, nos dice Duval, por medio de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos que se desarrollan a través de tres funciones fundamentales: una que guarda relación con el carácter social de los objetos matemáticos, que es la *comunicación*. Otra que es el *tratamiento,* relacionada con el desarrollo mismo de las matemáticas, en el que se producen nuevas ideas alrededor del objeto analizado. Y finalmente la *objetivación,* que es el acto de toma de conciencia del sujeto pensante sobre el objeto matemático pensado. La función de tratamiento se realiza a través de las *transformaciones de la información* que nos permiten obtener nuevas ideas no detectadas en la representación semiótica original (Duval, 1999). De ahí que en esta investigación indagamos la comprensión de las transformaciones aplicadas a una función.

Este concepto de comprensión, consistente en ser capaz de representar de diferentes maneras (diferentes lenguajes) un mismo objeto matemático, fue el que aplicamos en esta investigación. En este sentido, la utilización en clase de una sola representación de los objetos matemáticos no capacita al estudiante para diferenciar el significante del significado, ni para aplicar un mismo objeto matemático en situaciones reales diferentes a los ejemplos utilizados en la clase. Por eso dice Duval: "la comprensión de matemáticas requiere la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica" (Duval, 1999, p.2).

Finalmente debemos reconocer que aunque habría sido interesante evaluar la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos matemáticos en la resolución de problemas (competencia), teniendo en cuenta –repetimos– que se trataba de estudiantes de ingeniería, sólo evaluamos la capacidad de exponer un concepto en lenguaje natural, que es lo que Godino denomina *componente discursivo de la comprensión*, con el fin de no dispersarnos demasiado. Con estas bases hemos buscado analizar la comprensión conceptual no sólo a través de lo expresado por los estudiantes en "los textos escritos por ellos", como reza el título de la investigación, sino por la capacidad de *leer* conceptos; y no sólo transmitidos en lenguaje verbal sino en cualquiera de los cuatro lenguajes que utiliza la matemática para representarlos y que fueron enumerados en párrafo anterior.

Metodología

En cuanto a la metodología, el "itinerario" semiótico recorrido por los estudiantes sometidos a la investigación, que cursaban primer semestre de ingeniería en la Universidad de Santo Tomás de Bucaramanga Colombia[1], lo desarrollamos en dos grupos: el primero, que fue denominado *Muestra A*, atendió una exposición de aula sobre las funciones *constante* e *identidad,* en la que el profesor utilizó una plantilla (véase anexo 1). La exposición fue grabada y un estudiante tomó fotografías de lo escrito por el profesor en el tablero (véase anexo 2). Acto seguido les suministramos a los estudiantes (16 en total) la misma plantilla que había utilizado el profesor para su exposición, con el fin de que representaran, en el salón de clase, cada uno en forma independiente y utilizando los mismos cuatro lenguajes ya enumerados, la función potencia de exponente *2*, o sea, la función cuadrática [$f(x) = x^2$].

Tratemos de describir las transferencias lingüísticas realizadas por los estudiantes en este ejercicio. Habiendo recibido una exposición en la que el profesor representó las funciones en los cuatro lenguajes, ellos debían, por su parte, repetir el ejercicio con otra función (la cuadrática), muy diferente en varios aspectos a las que habían visto representar. Se trataba de que tomaran sólo lo pertinente del discurso de aula y aportaran nuevas consideraciones a esta función. En sí, el trabajo de los estudiantes consistió en que, partiendo del nombre de la función (lenguaje verbal) y de la fórmula (lenguaje algebraico) que les escribimos en el tablero, utilizando la misma plantilla del profesor, debían calcular la tabla de valores (lenguaje aritmético), dibujar la gráfica (lenguaje geométrico) y escribir las conclusiones (lenguaje verbal) que surgieran de observar las tres representaciones, como lo había hecho el profesor, interactuando con ellos en la exposición. Las partes fundamentales del análisis de las respuestas las expondremos al final.

Se armó un segundo grupo de 19 estudiantes, que denominamos *Muestra B*, a quienes no les hicimos exposición previa, sino que recibieron todas las instrucciones por escrito y ni siquiera atendimos sus preguntas... que las hubo. Tampoco habían recibido antes ninguna explicación sobre el tema, que en este caso fue: *transformación de funciones*. Escogimos igualmente la función potencia cuadrática [$f(x) = x^2$]. En ambos casos escogimos esta función, por considerar que es bastante conocida para los estudiantes, y su gráfica (la parábola) les resulta familiar, no sólo en matemáticas sino en física, en donde se estudia el muy mentado "movimiento parabólico". Esta presunción de la familiaridad de los estudiantes con la parábola resultó confirmada por sus respuestas: un número

1 El investigador obtuvo permiso expreso por escrito de la propia institución para mencionar su nombre.

significativo, por su propia iniciativa (porque en el texto de instrucciones no lo pedíamos) dijo, palabras más, palabras menos: "la gráfica es una parábola".

A la función potencia [$f(x) = x^2$] le aplicamos las siguientes transformaciones:

$$f(x) + b \quad f(x + c) \quad af(x) \quad f(kx)$$

En el texto de instrucciones (véase el instrumento en el anexo 3), estas transformaciones las escribimos exactamente de esta manera, porque se trataba de evaluar también la comprensión de los estudiantes a ese tipo de notación genérica de una función. Es posible anticipar que los estudiantes cometieron notorios errores de interpretación de esta notación, a pesar de que en el instrumento explicamos su significado, que, a propósito, a los profesores nos parece evidente. "Nadie sabe con la sed que el otro bebe".

Las representaciones semióticas fueron, en este caso, mucho más variadas. De cada transformación, el estudiante debía realizar las siguientes actividades:

Actividad 1. Elaborar la fórmula.
(Ejemplo: $f(x) = x^2 + b$)
Actividad 2. Calcular la tabla de valores, dándole a la variable x los valores enteros comprendidos en el intervalo [-3, 3].
Actividad 3. Dibujar la gráfica de la función original y de cada transformación.
Actividad 4. Comentar en palabras los cambios producidos en la gráfica por efecto de cada transformación.
Esquematizando el proceso paso por paso, las transferencias de representación fueron así:

Del lenguaje verbal
(las instrucciones generales escritas)
– Al lenguaje algebraico
(elaborar la fórmula)

Del lenguaje algebraico
(la fórmula elaborada)
–Al lenguaje aritmético
(calcular la tabla de valores)

Del lenguaje aritmético
(la tabla de valores calculada)
– Al lenguaje geométrico
(la gráfica)

Del lenguaje geométrico
(la gráfica)
– (regresa) Al lenguaje verbal
(las explicaciones)

Este esfuerzo de "traducir" un objeto matemático de un lenguaje a otro es la base del adiestramiento matemático cuando buscamos lograr una comprensión, como lo expresa Duval.

En otras palabras, la forma de saber si una persona ha comprendido un objeto matemático es que tenga la destreza de representarlo al menos en dos lenguajes diferentes. Ejemplo:

$$1/2 \rightarrow 0.5$$

Análisis de la información

Para el análisis de los resultados pensamos que era conveniente crear (porque no existe específicamente) una correlación entre los objetos matemáticos y las palabras que los representan; las clasificamos, a la vez, de manera independiente y paralela. Las definiciones gramaticales ya existen de antemano y están en los diccionarios, a los que tuvimos que acudir en su momento y en los que –a propósito– hemos encontrado interesantes "sorpresas", que comentaremos en las conclusiones. Las definiciones de objetos matemáticos, en el Informe de la investigación las denominamos *definiciones gramático-matemáticas,* para consignar en su denominación su doble condición, puesto que estamos definiendo una palabra (que tiene carácter gramatical) pero que representa un objeto matemático. No es novedad que una palabra represente un objeto matemático, porque los diccionarios hacen referencia a que las palabras suelen tener diferentes acepciones (o significados contextuales) y uno de ellos puede ser matemático, como sucede en muchos casos. La novedad de nuestra propuesta consiste en que esa palabra, a la que los diccionarios le dan una definición gramatical (que suele llamarse *definición literal*), la hemos clasificado además en el universo conceptual de las matemáticas para crear una correlación entre el papel gramatical y el papel matemático de cada palabra. A continuación, cuando hagamos la ejemplificación de las palabras con su doble definición y su doble clasificación, esclareceremos la idea.

Haciendo un paralelo entre la gramática y la matemática, partimos de la *oración gramatical*, que es como el "módulo unitario" y lo fraccionamos en sus componentes, que son:

sujeto + verbo + complementos

Dice la gramática:

- El *sujeto* está constituido por sustantivos (personas, animales o cosas) que ejercen la acción del verbo.
- El *verbo* es el centro de la oración. Si no hay verbo, no hay oración, sino una simple frase que no describe acciones.
- *Los complementos* pueden ser:
  - *Directos o indirectos*: que reciben directa o indirectamente la acción del verbo (personas, animales o cosas).
  - *Circunstanciales*: pueden corresponder a lugares (*el niño está en* ***su casa***) o a otras circunstancias, o pueden ser adverbios, que modifican la acción del verbo (Ej.: *lentamente, rápidamente,* etc.)

Hasta aquí es un simple recordatorio de la gramática escolar. Lo interesante, en términos matemáticos, es la construcción de la correlación entre la gramática y la matemática. Pero como veremos en el cuadro 1, hay conceptos y situaciones gramaticales que la matemática no tiene previstos y hemos tenido que crearlos para esta investigación. Es el caso del *sustantivo* (que corresponde al *objeto matemático*), que puede hacer en la oración el papel de *sujeto* o de *complemento directo o indirecto,* y no existe una clasificación de los objetos matemáticos para discriminar estas dos situaciones. Expliquémoslo antes de transcribirlo en el cuadro.

Un objeto matemático (que necesariamente representa valores, ya sea explícitos o implícitos, que a su vez pueden ser conocidos, conocibles o desconocidos) puede generarse de dos únicas posibles formas: por un axioma, postulado, definición, teorema, corolario, etc., o como resultado de una operación.

El *número* 7, por ejemplo, que forma parte del conjunto de los números reales y a la vez del "subconjunto" de los números naturales, puede ser, por otra parte, el resultado de dividir 14 entre 2, y en este caso se llamaría *cociente*, o de restarle 2 a 9, y se llamaría *diferencia*. Para darle denominación distinta a estos conceptos, en la investigación creamos los dos tipos de objetos matemáticos, que se explican a continuación.

Objeto matemático autónomo: generado por un axioma, postulado, definición, teorema, corolario, etc. (Ej.: el número *7*, que pertenece a la Teoría de los números[2]).

Objeto matemático resultado: cuando es el resultado de una operación. (Ej.: diferencia, cociente, residuo, producto, derivada, área, etc.)

Esta esquematización, aunque fue un ejercicio teórico que nos parece (modestia aparte) novedoso e interesante, no tuvo una estricta aplicación

2 Naturalmente que los números existen antes de que se creara la teoría de los números, pero una vez sentada esta, se establece el sometimiento de todos los números a la teoría.

Cuadro 1. Conceptos gramaticales no previstos por la matemática

<table>
<tr><th colspan="2">DENOMINACIÓN MATEMÁTICA</th><th colspan="2">DENOMINACIÓN GRAMATICAL</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Objeto matemático</td><td rowspan="2">Objeto matemático autónomo
(Ej.: un número, una variable, una función, un parámetro, etc.)</td><td rowspan="3">Sustantivo</td><td>Sujeto</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Complementos
Directo
Indirecto</td></tr>
<tr><td>Objeto matemático resultado
(Ej.: diferencia, cociente, residuo, producto, etc.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Operador matemático
Ej.:
$\pm \; ; \div ; \sqrt{\ } ; \, {}^{dy}\!/_{dx} \; ; \int$</td><td colspan="2">Verbo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grado de precisión
[Ej.: la cantidad de cifras decimales, el instrumento de medida utilizado; el margen de error en la medida o en el cálculo, el método de cálculo, el método de solución (analítico, numérico)].</td><td>Adverbio</td><td>Complemento circunstancial</td></tr>
</table>

directa en el análisis de los resultados de la investigación, pero en las conclusiones la hemos puesto a consideración de la comunidad académica para que sea evaluado. La importancia que le vemos a esta propuesta y sobre lo cual volveremos más adelante, es que consideramos, en buena parte, como resultado de esta investigación, que la epistemología de la ciencia matemática ha construido con encomiable rigor las definiciones de los objetos matemáticos en lenguaje algebraico ***pero ha descuidado su definición verbal*** y, lo que es más reprochable, ha repudiado y/o tratado de ocultar el origen geométrico de muchos de esos objetos, como la derivada, por ejemplo, desaprovechando el potencial del lenguaje geométrico que nos permite "ver" el comportamiento de las funciones. Es verdad que una definición algebraica es matemáticamente suficiente y más autónoma para esa ciencia; y que muchos conceptos que nacieron en la geometría fueron redefinidos tiempo después en términos algebraicos más universales. Como es el caso de las funciones trigonométricas, que nacieron del triángulo rectángulo, pero hoy los matemáticos prefieren definirlas como series infinitas. Todo eso es verdad, pero en términos epistemológicos y didácticos, una explicación dada en lenguaje algebraico, aparentemente tan precisa, puede resultar por completo oscura para un estudiante que la aborde por primera vez. Muestra de ello es que hemos comprobado en la investigación que los estudiantes obtienen mejores respuestas cuando parten de analizar representaciones en lenguaje geométrico.

En resumen, planteamos la idea de implementar una "matemática axiomática verbal", que determine la definición de todos los conceptos matemáticos, pero estructurados de una forma tan rigurosa como la axiomática de Peano. Estoy preparando un libro que he denominado "Matemática hablada", en el que intento armar este "andamiaje".

Resultados y conclusiones

Hemos descrito, aunque de manera resumida, los procedimientos ejecutados en la investigación, porque nos parece engorroso y poco útil detallar los aspectos mecánicos de los análisis, y pasaremos a describir los resultados obtenidos y las conclusiones, algunas de las cuales han surgido con posterioridad a la elaboración del Informe final, como consecuencia de las exposiciones informales a que hemos sometido los resultados de la investigación, y al esfuerzo de síntesis que nos exigió la redacción de este artículo.

La claridad que suelen tener para las personas las explicaciones verbales, por encima de todas las demás, debido a que las palabras son la forma universal de comunicación del ser humano, las convierten en una poderosa herramienta didáctica, pero podría resultar engañosa si intentáramos utilizarla como instrumento *único* de evaluación de la comprensión de conceptos matemáticos, porque su adecuado uso implica, aparte de los conocimientos matemáticos de sus contenidos, la capacidad para redactar de manera aceptable. Tal vez si acudiéramos a evaluaciones orales de matemáticas, como se hacía antiguamente en los colegios con las famosas *concertaciones*, en las que un estudiante se enfrentaba en público (los padres de familia) con un *par* y podía dar explicaciones a sus afirmaciones, contestarle preguntas aclaratorias a su oponente o al profesor y ripostar sus objeciones, de esta manera podría obviarse este inconveniente y generarse un proceso argumentativo muy provechoso, pero es posible que los exámenes orales de matemáticas resulten hoy inviables. En otras palabras: el lenguaje verbal es muy esclarecedor como instrumento de comunicación de los conceptos matemáticos, pero como instrumento único de evaluación resulta insuficiente y equívoco.

Reforzando lo dicho, no obstante las ventajas del lenguaje algebraico, puesto que es el único que nos permite realizar demostraciones y cálculos matemáticos, como lo destaca Condillac en *El lenguaje de los cálculos*, citado por Duval, cuando habla de "la imposibilidad de efectuar cálculos en el registro de la lengua natural" (Duval 1994, p. 34.) y, a su vez, las limitaciones del lenguaje verbal que hemos venido mencionando, es pedagógicamente equivocada la excesiva preferencia del lenguaje algebraico de los matemáticos, con la desafortunada exclusión de todos los demás y sobre lo cual en el Informe final transcribimos citas de autores (por fortuna de otras épocas) que lo manifiestan de un modo abierto. Un botón de muestra: "Un buen (riguroso) aprendizaje de las matemáticas, incluso de la geometría, debería prescindir de las figuras", dice Arcos Quezada, citando autores del siglo pasado, sin mencionar sus nombres (Arcos Quezada, 2004, p. 79).

Varias de las conclusiones que pudimos extraer de la investigación se refieren a errores cometidos por los estudiantes sobre conceptos que los profesores consideramos muy claros y, en cierto grado, sencillos. Téngase en cuenta que escogimos como objeto de comprensión el concepto de *función*, pero el objetivo no era solamente la comprensión de este concepto, sino de los demás objetos matemáticos que surgieran en el proceso; los errores detectados nos dan información sobre el grado de comprensión logrado. Esta decisión de los profesores de omitir una explicación por considerarla obvia –lo comprobamos en la investigación– es un error en la enseñanza de las matemáticas. Se preguntarán los lectores cómo hicimos para saber qué explican y qué no explican los profesores. El investigador es profesor y está haciendo una confesión sobre sus propias experiencias, pero, además, lo que sí es fácil comprobar es si los libros de texto, que en buena medida orientan los contenidos y las explicaciones de aula de los profesores, los explican o no.

Uno de esos conceptos no explicados en los textos es el significado de la frase "(el objeto) es de la forma...", referida a un objeto matemático cualquiera y cuya incomprensión generó errores en las respuestas de los estudiantes. Un ejemplo nos ayudará a aclarar la idea.

Podemos decir: la ecuación general de las curvas cónicas es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Ey + F = 0 \text{ *3 } [1]$$

Invitamos al lector a que, antes de leer la definición que le daremos a la expresión "de la forma...", redacte su propia definición, para que luego la confronte con la nuestra.

Intentemos una definición: se dice que una expresión matemática es de una forma determinada, para dar a entender que los valores numéricos y las variables de la expresión deben mantenerse sin alteraciones y solamente se les puede dar valores arbitrarios a los parámetros. En la ecuación [1], las variables son '*x*' y '*y*' y los parámetros son *A, B, C, E* y *F*. Para que una expresión matemática sea de *esa forma,* las variables y sus exponentes (que son numéricos) deberán permanecer sin alteraciones, mientras que a los parámetros se les puede dar cualquier valor (incluido el 0 – cero).

$$Ej.: -3x^2 + 5y^2 - 7x + 2y + 13 = 0$$
es la ecuación de una cónica

Sospechamos que los profesores tampoco explicamos la diferencia entre variables y parámetros...

Nos atrevemos a asegurar lo anterior, porque en la investigación comprobamos que incluso estudiantes que aportaron ideas muy valiosas y originales en las respuestas que dieron en la investigación y que tuvieron además un destacado desempeño en el curso de cálculo diferencial, cometieron errores supuestamente "tontos" sobre los temas mencionados: la forma de una ecuación y la diferencia entre variables y parámetros en una fórmula. El caso se presentó cuando los estudiantes hicieron referencia a "la forma de la ecuación de la función potencia". El profesor en su exposición había dicho que las fórmulas de las funciones *constante* e *identidad* eran ambas de la forma $f(x) = mx + b$. Varios estudiantes repitieron esa afirmación con respecto a la fórmula de la función potencia [$f(x) = x^2$], lo cual es un error.

Otro concepto que no manejan bien los estudiantes es en qué casos, cuando dos letras están juntas, indican multiplicación y en qué casos no[4]. Si escribimos $2x$ y $f(x)$, comprobamos, por las respuestas que dieron, que para varios estudiantes no es claro que el primero es una multiplicación y el segundo es la representación de una función, y los profesores tampoco se lo decimos con claridad. Simplemente lo escribimos y damos por hecho que se entiende esa diferencia.

Y en cuanto al tema de los conceptos matemáticos, las definiciones literales de los diccionarios y que en el proyecto inicial habíamos denominado *vocabulario institucional*, iban a ocupar un puesto privilegiado en la investigación, como referente

*3 Se ha respetado la costumbre de los libros de texto de no utilizar la letra D mayúscula combinada con variables, para que no se confunda con el operador derivada D_x.

4 Sierpinska se refiere también a este tema, pero no queremos saturar de citas el texto.

conceptual en el análisis de la significación del concepto de *función* y de todos los demás que se mueven a su alrededor (dominio, codominio, variable, continuidad, etc.) y así iniciamos nuestro trabajo. Pero al ir a aplicar esas definiciones, encontramos que en muy escasas oportunidades el profesor en su discurso de aula o los estudiantes en sus respuestas daban una definición que fuera medianamente comparable con las que da el diccionario. Los profesores damos explicaciones, ponemos ejemplos, hacemos comparaciones, inventamos analogías, hasta echamos chistes... pero no damos definiciones ceñidas a la manera de los diccionarios. Por ese motivo, la idea de confrontar el discurso de aula o los textos de los estudiantes con los diccionarios la desechamos. Volveremos más adelante sobre este tema.

Un caso interesante, aunque en apariencia sea más de carácter gramatical que matemático (o tal vez tenga el doble carácter), fue el hecho de que cuando a los estudiantes de la *Muestra B* les pedimos explicar en palabras las transformaciones de la función, seleccionamos las respuestas matemáticamente correctas e incorrectas y, unas y otras, coincidieron con las frases gramaticalmente correctas e incorrectas, en el orden respectivo. La respuesta matemáticamente correcta, era gramaticalmente correcta, y viceversa. No hemos profundizado demasiado en este punto, pero, posinvestigación, pensamos que puede haber una correlación entre la gramática y la matemática, en cuanto a su lógica interna. Sugiere también alguna interdependencia entre las argumentaciones retórica y matemática. Será tema de otras investigaciones más de carácter lingüístico.

Recomendaciones

Habíamos anunciado comentar las "sorpresas" que encontramos en los diccionarios consultados (el de la Real Academia Española –RAE–, el Larousse y el Diccionario Enciclopédico Espasa). Debemos confesar que antes de consultarlos, sentimos cierto escepticismo de que pudiera ayudarnos en nuestra tarea, puesto que son todo, menos textos matemáticos. Pues la sorpresa, especialmente en cuanto se refiere al de la RAE, fue la abundante cantidad de definiciones y acepciones matemáticas que encontramos en este diccionario. Por esa razón, en las recomendaciones del Informe final planteamos la conveniencia de utilizar los diccionarios, y en particular el de la RAE, como instrumento didáctico en el aula de matemáticas, entre otras razones, porque contiene conceptos que no hemos encontrado en los textos que solemos consultar habitualmente, que en la mayoría de los casos son de origen norteamericano y traducidos del inglés. En otras palabras, ¡encontramos novedades matemáticas en el Diccionario de la RAE!

Tratando de encontrarle una explicación, nos vino a la memoria el hecho histórico de que el álgebra, invención de los árabes, entró a Europa por España. Nos atrevemos a imaginar que los algebristas árabes que, junto con los sultanes, se asentaron en España nada menos que ¡por siete siglos! debieron enriquecer el idioma español con abundante vocabulario matemático, que los hispanohablantes hemos abandonado en el último siglo, cuando nos dio por acoger en nuestras universidades "a ojo cerrado", en forma casi exclusiva y con escaso sentido crítico, textos matemáticos norteamericanos traducidos del inglés. Ahí queda un interesante tema de investigación cuyo título podría ser:

"El bagaje lexicográfico matemático del idioma español heredado de los algebristas árabes"

Y alrededor de este hallazgo, no creemos que sea ajeno al tema de esta investigación plantear algunas reflexiones de tipo histórico-cultural, dado el hecho de que abarca tanto temas matemáticos como lingüísticos.

Es un buen momento para recuperar las enseñanzas matemáticas de los árabes a España y que fueron plasmadas en el vocabulario recopilado en el Diccionario de la RAE, con más razón ahora que el idioma español ha venido ganando terreno en el mundo de la cultura. A ese respecto, leemos en la prensa que si tomamos solamente los países que conforman la civilización occidental, somos 400 millones de personas las que hablamos español, frente a 350 millones que hablan inglés (¡50 millones más!), con la ventaja de que los pueblos hispanohablantes tenemos más altas tasas de crecimiento... Recuperar esos conceptos aprendidos de los árabes en siete siglos de "invasión", aparte de enriquecer nuestros conocimientos matemáticos, serviría para reivindicar en la historia de España una época que siempre ha sido vista por ellos con gran vergüenza. Esa presencia indeseada de los árabes en una España tan radicalmente católica, que no vio en ellos más que su herético culto a Alá, podríamos reinterpretarla como un periodo de fructífero aprendizaje matemático y aprovecharnos de él.

En cuanto a la interrelación entre gramática y matemática y entre los procesos de argumentación retórica y matemática que mencionamos en un párrafo anterior, son (lo reconocemos) planteamientos un poco etéreos, pero bien podrían ser tema para otras investigaciones que continúen relacionando estos dos "mundos" (la gramática y la matemática), cuya compatibilidad va más allá de la simple rima...

Por otra parte, y como lo hicimos notar cuando nos ocupamos de los resultados de la investigación, el concepto de parábola es muy significativo para los estudiantes. Este hecho debería ser aprovechado como objeto de referencia en la didáctica matemática. Pero cabe anotar que un estudiante la llamó *hipérbola*. Este error, a los profesores que estamos tan familiarizados con estos nombres y sus características, nos puede parecer muy grave. Sin embargo, en aras de la justicia, vale la pena tener presente que, en cuanto a la denominación de las cuatro curvas cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola), con excepción de la circunferencia, que se menciona en muchos contextos, los nombres de las otras tres no dicen nada sobre su significado ni sobre su forma. El significado etimológico de la palabra *parábola* es: *comparación,* y su referencia más conocida son los evangelios. Nada qué ver... *Elipse* significa originalmente *insuficiencia*, que ninguna afinidad conserva con un óvalo... que es como la llaman a veces los estudiantes, y, finalmente, la palabra *hipérbola* significa *exageración,* que tampoco guarda alguna relación con esta curva. Por cierto que, en Español existe la palabra *hipérbole*, para denominar el recurso retórico de exagerar las cosas. La intención de este comentario es destacar el hecho de que estos nombres no son para nada mnemotécnicos ni fáciles de recordar, a pesar de ser tan antiguos, puesto que se remontan a épocas anteriores a los griegos.

Y en cuanto a las notaciones matemáticas, cada vez que el profesor expone por primera vez una notación

$$\lfloor f(x);\ f(a);\ {}^{dy}\!/\!_{dx};\int dx\_,$$

debería explicarla en detalle. ¿Cuándo se da esa "primera vez"? El permanente contacto que tenemos los profesores con la nomenclatura matemática nos puede ir dando pautas para eso, pero en caso de duda, ¡pues expliquémosla de nuevo, que nada se pierde!

E intentando, finalmente, una "conclusión de las conclusiones". Este trabajo parece reforzar la idea de la profesora Sandra Parada, cuya investigación sobre el uso del lenguaje verbal como instrumento de evaluación matemática fue citada en el numeral de Antecedentes del Informe final de esta investigación y aparece en la bibliografía de este artículo, cuando nos decía en el Informe final, citando los principios que rigen el movimiento pedagógico norteamericano "La escritura a lo largo del currículo" (WAC, por sus siglas en inglés[5]) que "aprender a escribir es responsabilidad de toda la escuela" (Parada, 2005, p.11). En otras palabras, saber matemáticas y saber escribir son dos saberes interrelacionados y que se necesitan mutuamente. El lenguaje verbal no es un instrumento ajeno a la matemática, puesto que es, como dijimos al comienzo, otro lenguaje, y los lenguajes siempre se hermanan entre sí. Cuando un estudiante soluciona un problema de matemática aplicada, la respuesta final no es sólo un número, sino además lo que representa ese número, que sólo puede ser expresado en lenguaje verbal, para poderle dar sentido al resultado obtenido.

Por otra parte, y pensando, como es nuestro deber de educadores, en las competencias que requiere un ingeniero en su ejercicio profesional, es claro que necesitará en muchas oportunidades explicar temas de su carrera, que son de alto contenido matemático, de tal manera que resulten convincentes para personas no expertas en esta ciencia. En ese momento le sería de gran utilidad la pericia para "traducir" esos conceptos del lenguaje de las matemáticas al lenguaje verbal corriente, que es una de las competencias que hemos intentado evaluar en esta investigación.

Bibliografía citada en el artículo

ARCOS QUEZADA, José Ismael. Rigor o entendimiento: un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal. En: *Tiempo de educar*. Toluca, México, jul.-dic. 2004, vol. 5, Nº 10.

BARAJAS ARENAS, Claudia. *Los apuntes: una aproximación al razonamiento proporcional de los estudiantes de séptimo grado*. Tesis de grado (licenciatura en Matemáticas). Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2008.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Cali: Grupo de Educación Matemática, 1999.

GODINO, Juan D. *Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática*. Universidad de Granada, 2002.

HIEBERT, James, & CARPENTER, Thomas P. Learning and Teaching with Understanding, 1992. Grouws, DA. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.

PARADA, Sandra. *La producción de textos: una alternativa para evaluar matemáticas*. Bucaramanga, 2005, 11 p. Trabajo de grado (especialización en Educación Matemática). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Matemáticas, Bucaramanga.

SIERPINSKA, Anna. *Understanding in Mathematics*. Colección: Studies Mathematics Education Series. USA: The Falmer Press. 1994, p. 52.

5 El nombre de la institución en inglés es: "Writing Across Curriculum".

Bibliografía utilizada en la investigación

BUSCHMAN, Larry. El lenguaje matemático en el aula. En: *Teaching children Mathematics*, 1995, vol. 1, Nº 6.

DEIROS FRAGA, Beatriz. Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería [en línea]. 2003. Disponible en internet: <URL:http://www.monografias.com/trabajos11/monogrr/monogrr.shtml>.

EISENBERG, Theodore. On the development of a sense for functions. In HAREL, Guershon, and DUBINSKY, Ed (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 1992, pages 153-174. USA: Mathematical Association of America. En: http://www.indexnet.santillana.es/rcs/_archivos/Recursos/matematicas/lenguamates.doc.

JONES, Melanie. *Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of function.* 2006.

LARIOS OSORIO, Víctor. Algo sobre el rigor del lenguaje. En: *Gaceta COBAQ* (Colegio de Bachilleres del estado de Querétaro, México), marzo-abril, 1997, año XIV, Nº 1243.

PIM, David. *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Morata, 1987.

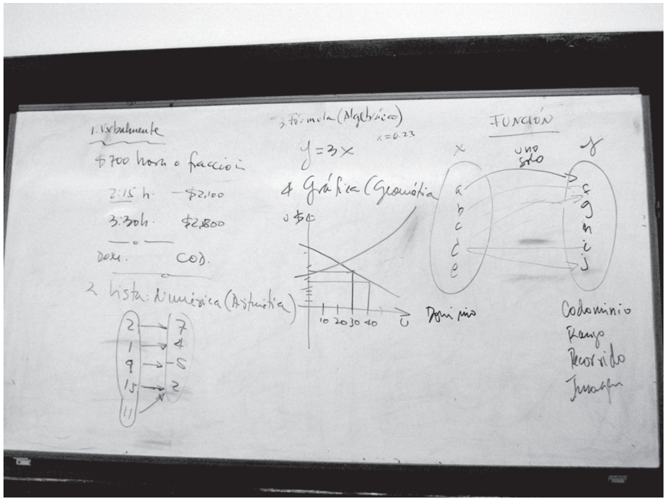
SIMMONDS, George F., & KRANTZ, Steven G. *Ecuaciones diferenciales.* México: McGraw-Hill, 2007.

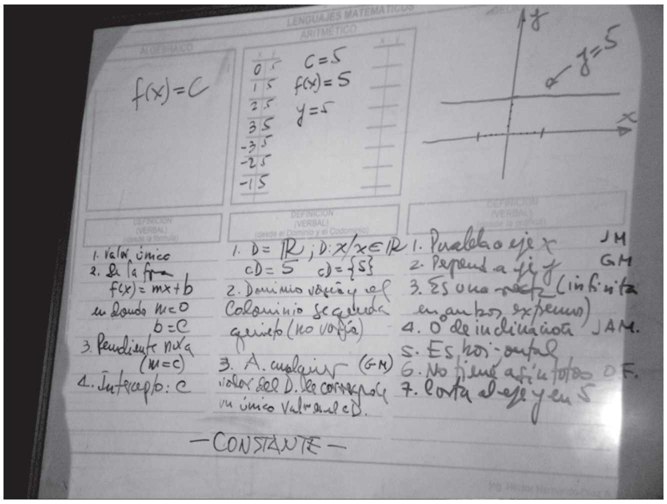
STEWART, James. *Cálculo: conceptos y contextos.* México: Thompson Learning, 2001.

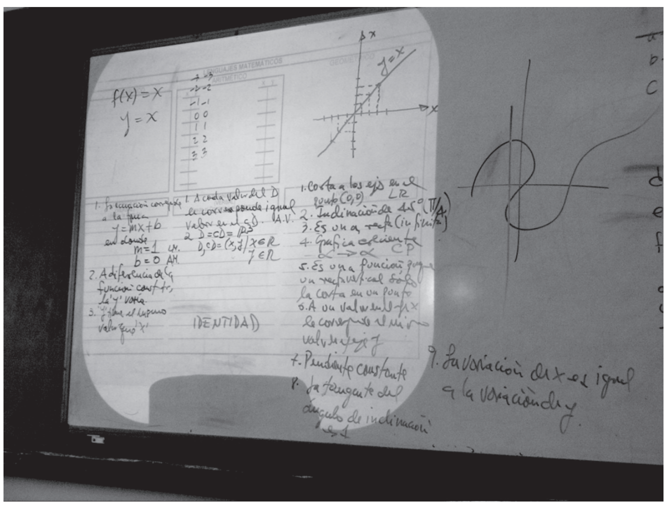
Anexo 1

Lenguajes matemáticos		
Algebraico	Aritmético	Geométrico
	x y x y	
Definición verbal (desde la fórmula)	Definición verbal (desde el dominio y el codominio)	Definición verbal (desde la gráfica)

Anexo 2


FUNCIÓN
$y=3x$
Codominio
Rango
Recorrido


LENGUAJES MATEMÁTICOS
ARITMÉTICO
$f(x)=C$
$C=5$
$f(x)=5$
$y=5$
—CONSTANTE—


$f(x)=x$
$y=x$
IDENTIDAD

Anexo 3

Instrumento aplicado a la *Muestra B*

INSTRUMENTO 2

TALLER DE TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

Profesor: Héctor Hernando Díaz A.

INSTRUCCIÓN GENERAL: Lea todo el texto antes de contestarlo. Si tiene alguna duda, pregunte. Una vez que se hayan respondido todas las preguntas, se empezará a contabilizar el tiempo.

TEMA: Transformación de las funciones y su efecto sobre la gráfica.

Símbolos utilizados:

En la expresión $f(x)$

f indica que se trata de una función

x es la variable independiente de esa función

La expresión se lee: "*f de x*" o "*función de x*".

a, b, c, k: son constantes

ACTIVIDAD 1. Complete las descripciones faltantes (tiempo: 5 minutos)[6]:

Nº	TRANSFORMACIÓN	DESCRIPCIÓN
	$f(x) + c$	Sumarle la constante c a la función
	$f(x + b)$	*(Siguiendo el ejemplo de la primera fila, de una descripción en palabras de esta transformación, sin utilizar números ni fórmulas matemáticas).*
	$af(x)$	*(Siguiendo el ejemplo de la primera fila, de una descripción en palabras de esta transformación, sin utilizar números ni fórmulas matemáticas).*
	$f(kx)$	*(Siguiendo el ejemplo de la primera fila, de una descripción en palabras de esta transformación, sin utilizar números ni fórmulas matemáticas).*

6 El instrumento real entregado a los estudiantes tenía espacios mucho más amplios, que aquí se presentan reducidos.

ACTIVIDAD 2 (tiempo disponible: 10 minutos):

INSTRUCCIÓN GENERAL: Lea todo el texto antes de contestarlo. Si tiene alguna duda, pregunte. Una vez que se hayan despejado las inquietudes, se empezará a contabilizar el tiempo.
Tome la función potencia: $f(x) = x^2$ Para poder dibujar la gráfica, representemos la función con la variable y. La ecuación se nos convierte en: $y = x^2$
Con esta fórmula, los valores de los parámetros a, b, c, k que aparecen en la TABLA DE VALORES y los valores de x del cuadro de TRANSFORMACIONES que aparece a continuación, calcule y para cada caso.

TABLA DE VALORES

INSTRUCCIÓN: Agregue las fórmulas que faltan, reemplazando las constantes a, b, c, k con los siguientes valores:

$a = 2$
$b = 3$
$c = 5$
$k = 2$

Calcule los valores de y para cada caso y escríbalos en las casillas del cuadro que aparece a continuación.

x	TRANSFORMACIONES				
	$f(x)$	$f(x)+c$	$f(x+b)$	$af(x)$	$f(kx)$
	$y=x^2$				
-3					
-2					
-1					
0					
1					
2					
3					

INSTRUCCIÓN: Agotado el tiempo, el estudiante entregará lo que haya desarrollado en las actividades 1 y 2.

ACTIVIDAD 3 (tiempo disponible: 15 minutos):

INSTRUCCIÓN: A continuación aparece el mismo formulario anterior totalmente diligenciado, calculado en un intervalo mayor [–6, 6], y las instrucciones para desarrollar la actividad 3.

x	TRANSFORMACIONES				
	Nº 1	Nº 2	Nº 3	Nº 4	Nº 5
	f(x)	f(x)+c	f(x+b)	af(x)	f(kx)
	$y=x^2$	$y=x^2+5$	$Y=(x+3)^2$	$y=2x^2$	$y=(2x)^2$
–6	y=36	y=39	Y=9	y=72	y=144
–5	y=25	y=30	Y=4	y=50	y=100
–4	y=16	y=21	Y=1	y=32	y=64
–3	y=9	y=14	Y=0	y=18	y=36
–2	y=4	y=9	Y=1	y=8	y=16
–1	y=1	y=6	Y=4	y=2	y=4
0	y=0	y=5	Y=9	y=0	y=0
1	y=1	y=6	Y=16	y=2	y=4
2	y=4	y=9	Y=25	y=8	y=16
3	y=9	y=14	Y=36	y=18	y=36
4	y=16	y=21	y=49	y=32	y=64
5	y=25	y=30	y=64	y=50	y=100
6	y=36	y=41	y=81	y=72	y=144

INSTRUCCIÓN: Dibuje las cinco (5) gráficas como está indicado en las cuadrículas anexas: las gráficas 1 - 2 - 3 en la primera cuadrícula y las 4 - 5 en la segunda. A cada curva deben escribirle la fórmula para identificarla. Si algún punto no cabe en la cuadrícula, omítalo.

ACTIVIDAD 4: En la columna de la derecha describa con sus propias palabras, y sin utilizar fórmulas ni símbolos matemáticos, lo que le sucedió a la gráfica original en cada una de las transformaciones.

TRANSFORMACIÓN	DESCRIPCIÓN (¿Qué cambio sufrió la gráfica?)
Nº 1 $f(x) + c$	
Nº 2 $f(x + b)$	
Nº 3 $af(x)$	
Nº 4 $f(kx)$	