

# Gobierno como promotor del cambio tecnológico

## Un modelo de crecimiento endógeno con trabajo, dinero y deuda

Salvador Rivas-Aceves y Francisco Venegas-Martínez\*

Fecha de recepción: 12 de mayo de 2008; fecha de aceptación: 10 de junio de 2009.

*Resumen:* En el marco de una economía monetaria con trabajo y deuda (pública y privada) se estudia el efecto que tiene la participación del gobierno como impulsor del desarrollo tecnológico. A través de un modelo de crecimiento endógeno se caracterizan en el equilibrio, de previsión perfecta, las tasas de crecimiento de todos los sectores. Asimismo, se evalúa el impacto sobre el bienestar económico de los impuestos y el gasto público, el cual es aplicado al desarrollo tecnológico. Por último, en un ejercicio de simulación, se examina el nivel óptimo de gasto público (que maximiza el bienestar) en el que el gobierno tiene que incurrir para promover adecuadamente el desarrollo de tecnología.

*Palabras clave:* crecimiento endógeno, gasto de gobierno, cambio tecnológico, dinero, deuda.

### ***The Government as a Promoter of Technological Change: An Endogenous Growth Model with Labor, Money and Debt***

*Abstract:* In the framework of a monetary economy with labor and debt (public and private), the effects of government as a promoting agent to boost up technological change are studied. Through a model of endogenous growth, the growth rates of all sectors are characterized in the perfect foresight equilibrium. Moreover, the impact on economic welfare of taxes and government spending to impulse technological change is assessed. Finally, in a simulation exercise, the initial optimal level of government spending (which maximizes welfare), in which the government should incur to adequately address technological change, is examined.

*Keywords:* endogenous growth, government spending, technological change, money, debt.

*Clasificación JEL:* O33, O38, O42.

---

\* Salvador Rivas-Aceves, rivas.salvador@gmail.com, profesor-investigador, Departamento de Economía, Área de Empresas, Finanzas e Innovación, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, México, D.F. Francisco Venegas-Martínez, fvenegas@ipn.mx, profesor-investigador, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

## Introducción

**E**n Latinoamérica, la participación del gobierno en la promoción de tecnología es casi nula, y ésta ha sido la tendencia en varias décadas. Debido a los procesos de privatización de las empresas paraestatales, que tuvieron lugar principalmente en Sudamérica, con el objetivo de mejorar las finanzas públicas y reordenar el gasto público, el tamaño de los gobiernos se redujo considerablemente. Sin embargo, en Estados Unidos, Japón y muchos países de Europa, la participación del gobierno en las actividades de investigación y desarrollo, que generan un cambio tecnológico, ha sido de gran importancia. El nivel de gasto que estos países destinan para fomentar dichas actividades se ha incrementado en los últimos años, alcanzando un alto grado de desarrollo tecnológico con un impacto en el crecimiento económico. El cuadro 1 muestra el nivel de gasto de gobierno en investigación y desarrollo como proporción del PIB de las principales economías, las cuales se caracterizan por tener un alto desarrollo tecnológico.

Como se aprecia en el cuadro 1, en países como Finlandia, Japón y Suecia el gasto de gobierno en actividades de innovación y desarrollo como porcentaje del PIB fue de 3.45, 3.45 y 3.82 por ciento, respectivamente, en 2006. Por su parte, Austria, Dinamarca y Estados Unidos gastaron en el mismo año 2.45, 2.43 y 2.62 por ciento de su PIB. Gracias a la magnitud del gasto de gobierno en estas actividades, el desarrollo tecnológico en estos países ha mostrado un gran avance. La tendencia a incrementar dicho gasto gubernamental en estos países se muestra de manera más clara en la gráfica 1.

Por su parte, en países en vías de desarrollo, como México, Turquía, Brasil, Chile y la India se han destinado muchos menos recursos hacia las actividades de innovación y desarrollo. A pesar de que la tendencia es creciente, el gasto de gobierno en este rubro difícilmente sobrepasa el 1 por ciento como porcentaje del PIB para este conjunto de países, tal como lo muestra el cuadro 2.

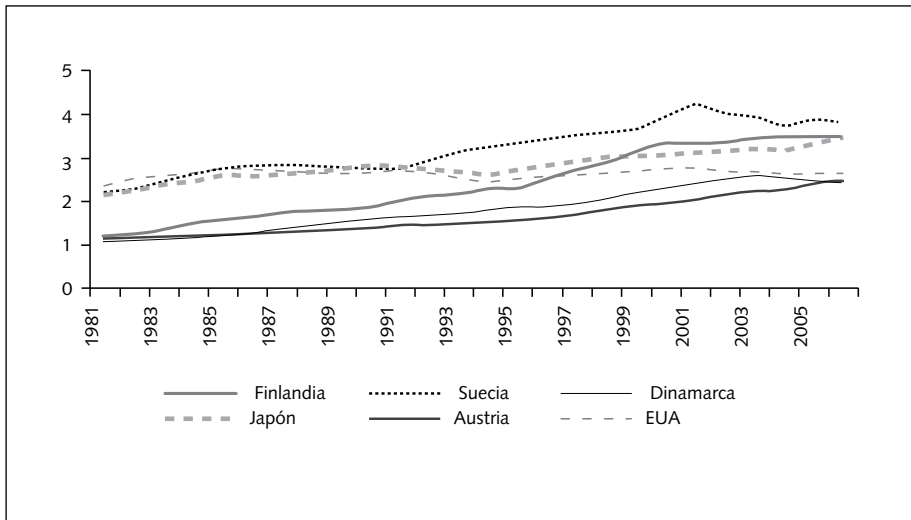
Específicamente, en México el gasto en innovación y desarrollo en 2006 apenas alcanzó 0.52 por ciento como porcentaje del PIB, mientras que en países como Turquía y Brasil se destinaron recursos por 0.81 y 0.99 por ciento, respectivamente. La política económica respecto a la innovación y el desarrollo tecnológico en los últimos años ha sido descuidada, lo que evidencia el poco interés en materia de innovación, principalmente en México. A continuación, la gráfica 2 presenta la tendencia en materia de gasto en I+D.

**Cuadro 1.** Gasto de gobierno en investigación y desarrollo en países desarrollados (porcentaje del PIB)

	<i>Finlandia</i>	<i>Japón</i>	<i>Suecia</i>	<i>Austria</i>	<i>Dinamarca</i>	<i>EUA</i>
1981	1.16	2.14	2.20	1.10	1.04	2.34
1982	1.20	2.23	2.27	1.15	1.08	2.51
1983	1.32	2.36	2.45	1.16	1.13	2.58
1984	1.45	2.44	2.60	1.21	1.15	2.64
1985	1.54	2.58	2.75	1.21	1.19	2.75
1986	1.62	2.55	2.79	1.25	1.26	2.72
1987	1.71	2.62	2.84	1.26	1.35	2.69
1988	1.74	2.64	2.80	1.03	1.43	2.65
1989	1.77	2.73	2.78	1.32	1.48	2.61
1990	1.84	2.81	2.75	1.36	1.55	2.65
1991	2.00	2.78	2.70	1.44	1.61	2.71
1992	2.10	2.72	2.90	1.42	1.64	2.64
1993	2.14	2.65	3.15	1.44	1.72	2.52
1994	2.28	2.60	3.23	1.51	1.77	2.42
1995	2.26	2.71	3.32	1.54	1.82	2.51
1996	2.52	2.81	3.41	1.59	1.84	2.55
1997	2.70	2.87	3.51	1.69	1.92	2.58
1998	2.86	3.00	3.55	1.77	2.04	2.62
1999	3.16	3.02	3.62	1.88	2.18	2.66
2000	3.34	3.04	3.96	1.91	2.29	2.74
2001	3.30	3.12	4.25	2.03	2.39	2.76
2002	3.36	3.17	4.00	2.12	2.51	2.66
2003	3.43	3.20	3.95	2.23	2.58	2.66
2004	3.45	3.17	3.71	2.22	2.50	2.59
2005	3.48	3.33	3.89	2.41	2.45	2.62
2006	3.45	3.45	3.82	2.45	2.43	2.62

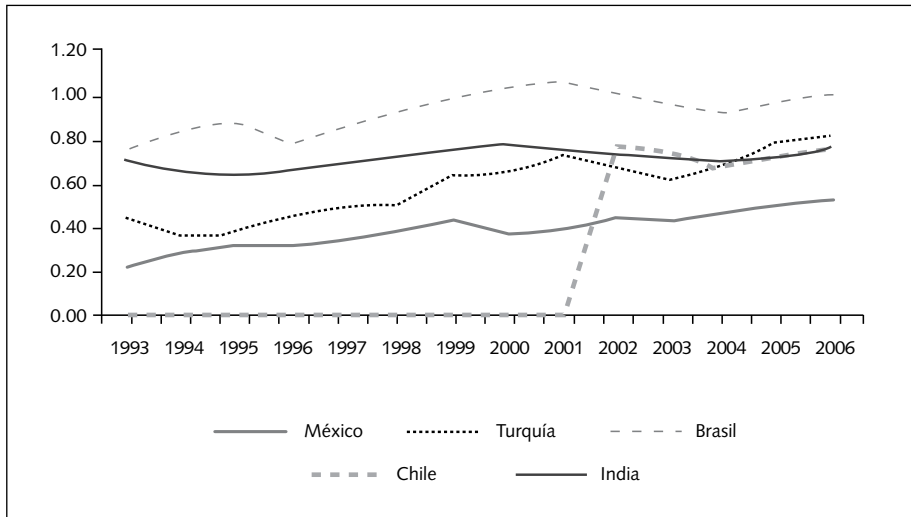
Fuente: OCDE, 2008.

**Gráfica 1.** Gasto de gobierno en I+D en países desarrollados 1981-2006 (proporción del PIB)



Fuente: Elaboración propia con datos de la OCDE, 2008.

**Gráfica 2.** Gasto de gobierno en I+D en países en vías de desarrollo 1993-2006 (proporción del PIB)



Fuente: Elaboración propia con datos de la OCDE, 2008.

**Cuadro 2.** Gasto de gobierno en investigación y desarrollo en países en desarrollo (porcentaje del PIB)

	<i>México</i>	<i>Turquía</i>	<i>Brasil</i>	<i>Chile</i>	<i>India</i>
1993	0.22	0.44	0.75	–	0.71
1994	0.29	0.36	0.84	–	0.65
1995	0.31	0.38	0.87	–	0.63
1996	0.31	0.45	0.77	–	0.65
1997	0.34	0.49	0.85	–	0.70
1998	0.38	0.50	0.92	–	0.72
1999	0.43	0.63	0.97	–	0.74
2000	0.37	0.64	1.01	–	0.77
2001	0.39	0.72	1.05	–	0.75
2002	0.44	0.66	1.00	0.76	0.73
2003	0.43	0.61	0.97	0.74	0.71
2004	0.47	0.67	0.91	0.67	0.69
2005	0.50	0.79	0.96	0.72	0.71
2006	0.52	0.81	0.99	0.75	0.75

Fuente: OCDE, 2008.

Lo anterior proporciona una explicación de por qué el cambio tecnológico es uno de los determinantes que hacen que los países desarrollados crezcan a tasas mayores que los países en vías de desarrollo. De ser así, una economía podría crecer a un ritmo mayor si mantuviera una política de innovación proactiva. Por lo tanto, el gasto que se destina a dichas actividades podría tener un papel importante a la hora de fijar metas de crecimiento económico.

Es importante señalar que el gasto gubernamental para fomentar las actividades de innovación y desarrollo puede emplearse en diversas formas. Por ejemplo, se pueden destinar recursos de manera directa a las empresas privadas para impulsar la productividad del capital físico. Por otro lado, dichos recursos pueden estar enfocados directamente a la generación de tecnología al interior de las empresas paraestatales destinadas a actividades de innovación; un ejemplo claro se encuentra en la National

Aeronautics and Space Administration (NASA). Por lo anterior, resulta evidente que, a pesar de la tendencia a disminuir la participación del gobierno en las actividades económicas, el gasto gubernamental enfocado al desarrollo tecnológico tiene una tendencia positiva en estos países. Por esta razón, el cambio tecnológico en una economía no sólo proviene del lado de la empresa, sino que también está propiciado por las actividades gubernamentales desde su ámbito.

En la teoría neoclásica del crecimiento, el cambio tecnológico tiene como único origen la empresa. En el trabajo pionero de Harrod (1939) se introduce, por primera vez, el progreso tecnológico en el estudio del crecimiento a través de una función de producción con producto marginal constante. Por otro lado, Uzawa (1965) encuentra que el cambio tecnológico se puede presentar a través de un incremento en la eficiencia laboral, que a su vez no depende de la cantidad de capital usado en el proceso productivo. Asimismo, entre las principales aportaciones en crecimiento endógeno que consideran cambio tecnológico se encuentran Romer (1986) y Lucas (1988). En este caso, los modelos conciben el cambio tecnológico como un proceso que explica las modificaciones en las condiciones de producción de las empresas en términos de cambios cualitativos o cuantitativos de los insumos, tales como el *stock* de conocimiento, el capital humano y el trabajo calificado. Posteriormente, Romer (1990) muestra que, con un solo sector con cambio tecnológico de tipo endógeno, la tasa de cambio tecnológico es sensible a la tasa de interés, y toda la producción se destina al consumo.

Muchos autores han introducido el gasto del gobierno como un argumento de la función de producción, sólo para analizar el impacto que éste tiene sobre la capacidad productiva de la economía, por ejemplo Barro (1990), Barro y Xala-i-Martin (1992), Futagami, Morita y Shibata (1993), Glomm y Ravikumar (1994), Cazzavillan (1996) y Turnovsky (1996). Otro tipo de desarrollos teóricos analiza el impacto que tienen las políticas económicas sobre el crecimiento, como Turnovsky (1993), Easterly *et al.* (1994) y Caminati (2001). Sin embargo, la teoría neoclásica del crecimiento carece de un análisis teórico que permita dar una explicación coherente del efecto que el gobierno pueda o no tener sobre el cambio tecnológico, y de cómo dicho cambio impacta a la producción y, por ende, al crecimiento.

La presente investigación, en el marco de una economía con una tecnología que presenta rendimientos constantes a escala y producto marginal constante, estudia el efecto que tiene la participación del gobierno en el

desarrollo tecnológico sobre la tasa de crecimiento de una economía. En este contexto, se caracterizan, en el equilibrio, las tasas de crecimiento de todos los sectores de la economía. Asimismo, se llevan a cabo ejercicios de estática comparativa para medir el impacto sobre el bienestar económico que tienen los impuestos y el gasto aplicado al desarrollo tecnológico. Por último, a través de un ejercicio de simulación, se determina el nivel óptimo de gasto público en el que el gobierno tiene que incurrir como promotor del desarrollo de tecnologías.

A diferencia de los desarrollos teóricos neoclásicos previos en materia de crecimiento, en el presente documento se muestra que la participación del gobierno en las actividades de innovación y desarrollo tecnológico, a través del gasto gubernamental, tiene un efecto positivo sobre el crecimiento. Desde esta perspectiva teórica, el gobierno es el agente que genera un cambio tecnológico.

La organización del trabajo se presenta en la siguiente forma. En la sección I se establece la estructura de la economía, en donde se caracterizan las acciones y decisiones de los hogares, gobierno y empresas. Posteriormente, en la sección II se determina el equilibrio de previsión perfecta. A través de la sección III se mide el impacto que tiene el gasto inicial de gobierno y los impuestos sobre el bienestar económico de los agentes. En la sección IV se determina el nivel inicial óptimo de gasto de gobierno para promover el cambio tecnológico. Por último, en la sección V se presentan las conclusiones y limitaciones del presente trabajo, así como la agenda pendiente de la investigación.

## **I. Estructura de la economía**

Considere una economía poblada por consumidores idénticos con vida infinita que maximizan su satisfacción por un bien de consumo y por la tenencia de saldos monetarios reales. En este contexto, los saldos reales producen satisfacción en los individuos por sus servicios de liquidez. De esta manera, la función de utilidad tiene dos argumentos: un bien genérico de consumo de carácter perecedero y dinero en términos de los bienes que el individuo puede comprar (poder adquisitivo). Asimismo, se supone que dichos agentes adquieren desutilidad por el trabajo y por sus pasivos (deuda). En la economía se produce y consume un único bien, y se tiene acceso al mercado internacional de deuda en donde el público puede adquirir bonos internacionalmente comerciables. Por simplicidad se normaliza a la unidad el número de consumidores al tiempo  $t = 0$  y se supone que el ta-

maño de población, en cualquier tiempo  $t > 0$ , está dado por  $N(t) = e^{\mu t}$ , con una tasa de crecimiento de la población,  $\mu$ , considerada exógena y constante. Cada consumidor aporta  $\eta$  horas de trabajo (por determinar endógenamente), por lo que el total del insumo trabajo, en cada instante, disponible en la economía está dado por:

$$L(t) = \eta N(t) = \eta e^{\mu t}. \quad (1)$$

Al mismo tiempo, cada individuo tiene deuda,  $d$ , y dos activos reales: capital,  $k$ , y saldos monetarios reales,  $m$ . Se supone que los consumidores tienen previsión perfecta, es decir, conocen perfectamente la tasa de inflación en cada instante y, en consecuencia, se tiene que:

$$\left( \frac{dP}{P} \right) \left( \frac{1}{dt} \right) = \pi^e = \pi > 0, \quad (2)$$

en donde  $P$  es el nivel general de precios,  $\pi$  es la tasa de inflación,  $\pi^e$  es la tasa de inflación esperada y  $P(0)$  se toma como dado.

### *1.1. Hogares*

Los hogares están compuestos por consumidores idénticos que obtienen satisfacción por el consumo y por la tenencia de dinero, así como desutilidad por el trabajo y por sus pasivos. En consecuencia, el dinero entra como argumento de la función de utilidad al estilo Patinkin (1956) y Sidrauski (1967), mientras que la deuda se analiza como en Bardhan (1967) e Intriligator (1971). El consumidor representativo desea maximizar en el presente, es decir, al tiempo  $t = 0$ , su utilidad total descontada dada por:

$$U = \int_0^{\infty} u(c, m, \eta, d) e^{-(\rho - \mu)t} dt, \quad (3)$$

donde  $c$  es el consumo per cápita y  $\rho$  es la tasa subjetiva de descuento. Para simplificar el análisis y obtener soluciones analíticas sencillas de examinar, se supondrá que  $\rho > \mu$ , lo cual refleja la impaciencia del consumidor por el consumo presente. El análisis subsiguiente se llevará a cabo con el siguiente índice de satisfacción:

$$u(c, m, \eta, d) = \frac{(c^\alpha m^{1-\alpha})^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{(\eta^\beta d^{1-\beta})^{1+\phi}}{1+\phi}, \quad (4)$$



en donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros de preferencias sobre el consumo, dinero, trabajo y deuda, y satisfacen que  $0 < \alpha < 1$  y  $0 < \beta < 1$ . Por otro lado,  $\gamma$  y  $\phi$  son parámetros que miden la elasticidad intertemporal de sustitución, con  $\gamma > 0$ ,  $\gamma \neq 1$  y  $\phi > 1$ . Las condiciones antes mencionadas son necesarias para asegurar que la función de utilidad propuesta sea cóncava en todos sus argumentos. Por lo tanto, se cumplen las siguientes relaciones:

$$u_c, u_m, -u_\eta, -u_d > 0, \tag{5}$$

$$u_{cc}, u_{mm}, u_{\eta\eta}, u_{dd} < 0, \tag{6}$$

$$-u_{cc} \frac{c}{u_c} - u_{mm} \frac{m}{u_m} = 1 + \gamma, \tag{7}$$

$$u_{\eta\eta} \frac{\eta}{u_\eta} + u_{dd} \frac{d}{u_d} = \phi - 1 > 0, \tag{8}$$

$$u_c(0, m, \eta, d) = u_m(c, 0, \eta, d) = \infty, \tag{9}$$

$$u_\eta(c, m, 0, d) = u_d(c, m, \eta, 0) = 0, \tag{10}$$

$$u_c(\infty, m, \eta, d) = u_m(c, \infty, \eta, d) = 0 \tag{11}$$

y

$$u_\eta(c, m, \infty, d) = u_d(c, m, \eta, \infty) = -\infty. \tag{12}$$

De las condiciones arriba establecidas, se tiene que las elasticidades marginales del consumo ( $\xi_c$ ), saldos reales ( $\xi_m$ ), trabajo ( $\xi_\eta$ ) y deuda ( $\xi_d$ ), respectivamente, son:

$$\xi_c = 1 - \alpha + \alpha\gamma, \tag{13}$$

$$\xi_m = \alpha + \gamma - \alpha\gamma, \tag{14}$$

$$\xi_{\eta} = \beta\phi + \beta - 1, \quad (15)$$

$$\xi_d = \phi - \phi\beta - \beta. \quad (16)$$

Por otro lado, la restricción presupuestaria del consumidor representativo está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{k} + \dot{m} - \dot{d} &= (1 - \tau_r)rk + (1 - \tau_w)w\eta + \\ &+ \mu d - (\pi + \mu)m - rd - (1 + \tau_c)c - \mu k, \end{aligned} \quad (17)$$

en donde  $w$  es el salario,  $r$  es la tasa de interés (real) que los individuos toman como dada,  $\pi m$  representa la depreciación por inflación de los saldos reales,  $\tau_w$  es un impuesto al ingreso salarial,  $\tau_r$  es el impuesto sobre los ingresos del capital y  $\tau_c$  es la tasa impositiva (al valor agregado) sobre el consumo. Si los valores iniciales  $k(0)$ ,  $m(0)$  y  $d(0)$  se suponen conocidos y se denota  $a = k + m - d$  como la riqueza (neta de deuda), por unidad de tiempo, del individuo, entonces la restricción presupuestal se puede reescribir como:

$$a_0 = \int_0^{\infty} \left[ (1 - \tau_w)w\eta + \tau_r rd + (1 + \tau_c)c + (i - \tau_r r)m \right] e^{-[(1 - \tau_r)r - \mu]t} dt, \quad (18)$$

donde  $i = r + \pi$  es la tasa de interés nominal. Observe que el individuo no es retribuido con transferencias de suma fija, ya que el gasto del gobierno se empleará exclusivamente para impulsar el desarrollo tecnológico en las empresas. En consecuencia, el problema de optimización resultante del individuo representativo está dado por (3) y (18). En este caso, las condiciones (necesarias) de primer orden para una solución interior son:

$$\alpha c^{\alpha(1-\gamma)-1} m^{(1-\gamma)(1-\alpha)} = \lambda(1 - \tau_c), \quad (19)$$

$$(1 - \alpha)c^{\alpha(1-\gamma)} m^{-\gamma(1-\alpha)-\alpha} = \lambda(i - \tau_r r), \quad (20)$$

$$-\beta\eta^{\beta(1+\phi)-1} d^{(1+\phi)(1-\beta)} = -\lambda(1 - \tau_w)w, \quad (21)$$

$$-(1-\beta)\eta^{\beta(1+\phi)}d^{-\beta(1+\phi)+\phi} = \lambda\tau_r r, \quad (22)$$

$$\left[ (1-\tau_r)r - \mu \right] \lambda = -\dot{\lambda} + (\rho - \mu)\lambda, \quad (23)$$

$$\dot{a} = \left[ (1-\tau_r)r - \mu \right] a + (1-\tau_w)w\eta - \tau_r r d - (1+\tau_c)c - (i-\tau_r r)m \quad (24)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a e^{-[(1-\tau_r)r-\mu]t} = 0. \quad (25)$$

De lo anterior se obtienen las relaciones de sustitución entre consumo y saldos reales, entre trabajo y deuda, y las tasas de crecimiento,  $\psi$ , correspondientes:

$$\frac{c}{m} = \frac{i-\tau_r r}{1-\tau_c} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\eta}{d} = -\frac{\tau_r r}{(1-\tau_w)w} \left( \frac{\beta}{1-\beta} \right), \quad (27)$$

$$\psi_c = \psi_m = \frac{\left[ (1-\tau_r)r - \rho \right]}{\gamma} \quad (28)$$

y

$$\psi_\eta = \psi_d = \frac{\left[ (1-\tau_r)r - \rho \right]}{\phi}. \quad (29)$$

La ecuación (26) nos muestra que un aumento en la tasa de interés nominal eleva el costo de la tenencia de saldos reales, por lo que ésta disminuye y aumenta el consumo, mientras que un aumento en las tasas impositivas disminuye el consumo. La remuneración a la productividad marginal del capital es  $r = A - \rho$ . Por otro lado, en la ecuación (27) se tiene que un aumento en el nivel salarial incrementa las horas de trabajo, mientras que un aumento en la tasa de interés real eleva el nivel de deuda. Finalmente, las tasas de crecimiento del consumo, dinero, trabajo y deuda dependen directamente de la tasa de interés real e indirectamente de su correspon-

diente parámetro de elasticidad intertemporal. Dicho crecimiento se verificará siempre que  $(1 - \tau_r) r > \rho$  para todos los sectores.

## I.2. *Gobierno como impulsor del desarrollo tecnológico*

Suponga ahora que el gobierno interviene como impulsor del desarrollo de tecnología, ya sea a través de la generación directa de nueva tecnología para las empresas, o bien por medio de programas de innovación que permitan elevar el nivel de eficiencia de la productividad del capital existente. En consecuencia, las condiciones de producción de la economía toman la forma:

$$y = f(k; g) = Agk, \quad (30)$$

en donde  $g > 1$  es el gasto per cápita que el gobierno ejercerá como impulsor de la tecnología para fomentar un incremento en la productividad del capital,  $A$ , y  $f(k; g)$  es el nivel de producto en esta nueva condición. Para que el impacto del gasto gubernamental sobre el nivel tecnológico sea positivo, es necesario que  $g$  sea mayor a la unidad, ya que sólo así se cumple que  $Ag > A$ . Se supone que el gasto de gobierno no está sujeto a congestión; sin embargo, no significa que no sea pertinente un análisis posterior al respecto. Por otro lado, el gobierno recauda los impuestos por concepto de consumo privado, ingresos por el capital e ingresos salariales, y como el gobierno no consume ni genera utilidad para los consumidores, entonces la restricción presupuestal del gobierno consolidada en términos per cápita es:

$$g = \tau_r r k + \mu b + b + \tau_c c + m\sigma_m - rb, \quad (31)$$

en donde  $\sigma_m = (dM/M)(1/dt)$  es la tasa de expansión monetaria en términos reales, y  $b$  es la deuda pública con  $b(0)$  dada y con tasa de crecimiento exógena. Este último supuesto no describe por completo el comportamiento del gobierno respecto del manejo de la deuda pública. Sin embargo, la razón de utilizar este marco simplificado es evitar dinámicas complejas de transición, lo cual nos desviaría de los objetivos originalmente planteados en nuestro experimento de cambio tecnológico. Por otro lado, para evitar que el gobierno pueda instrumentar una política monetaria activa, suponga que  $\sigma_m$  se determina de manera endógena y que cumple:

$$\sigma_m = \sigma_M - \pi, \quad (32)$$

en donde  $\sigma_M$  es la tasa de expansión monetaria en términos nominales. Por último, se excluye la posibilidad de generar pirámides (juegos Ponzi) para el financiamiento del gobierno, por lo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b e^{-(r-\mu)t} = 0. \quad (33)$$

### I.3. Empresas

El sector empresarial, que tiene como objetivo maximizar el valor presente de su flujo neto de efectivo, produce bienes a través de la tecnología  $y = Agk$  y remunera a los factores de la producción capital y trabajo. Por lo tanto, la empresa representativa maximizará sus beneficios dados por:

$$y = Agk - (r + \delta)k - w\eta, \quad (34)$$

en donde  $\delta$  es la tasa de depreciación de capital, la cual se supone constante. En el equilibrio, la productividad marginal de los factores de la producción es igual a su correspondiente remuneración, por lo tanto:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = Ag - \delta = r, \quad (35)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -w = w, \quad \text{lo cual implica } w = 0. \quad (36)$$

En este caso, se puede pensar como en Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 4) que cada individuo ofrece de manera inelástica una unidad de trabajo por unidad de tiempo a cambio de  $w = 0$ .

## II. Equilibrio de previsión perfecta

Con consumidores y empresas que toman decisiones óptimas bajo las acciones del gobierno, de (3), (18) y (34) se obtienen las nuevas relaciones de sustitución y las nuevas tasas de crecimiento económico:

$$\frac{c}{m} = \frac{i - \tau_r (Ag - \delta)}{1 - \tau_c} \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right), \quad (37)$$

$$\frac{d}{\eta} = -\tau_r (Ag - \delta) \left( \frac{1-\beta}{\beta} \right), \quad (38)$$

$$\varphi_c = \varphi_m = \frac{\left[ (1-\tau_r)(Ag - \delta) - \rho \right]}{\gamma} \quad (39)$$

y

$$\varphi_\eta = \varphi_d = \frac{\left[ (1-\tau_r)(Ag - \delta) - \rho \right]}{\phi}. \quad (40)$$

Como se puede apreciar, las relaciones de sustitución y las tasas de crecimiento son mayores con la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico, que en ausencia del mismo. Una vez más, el crecimiento tendrá lugar siempre que  $(1-\tau_r)(Ag - \delta) > \rho$ . Para que la desigualdad anterior no se revierta es necesario que  $(\tau_r + \delta) < \rho$ . Bajo la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico, la tasa de crecimiento depende directamente del gasto que éste realice, por lo que un mayor gasto de gobierno generará una mayor tasa de crecimiento. Asimismo, la tasa de crecimiento económico per cápita de largo plazo es igual a la de corto plazo. Por otro lado, si se define  $x$  como el capital neto de deuda, es decir:

$$x = k - d - b, \quad (41)$$

entonces de (18) y (34) se obtiene que:

$$\frac{dx}{dt} = (Ag - \delta - \mu)x - c. \quad (42)$$

Si se sustituye, por ejemplo, la solución general del consumo en (42) dada por:

$$c = c(0) \exp \left\{ \left[ \frac{\left[ (1-\tau_r)(Ag - \delta) - \rho \right]}{\gamma} \right] t \right\}, \quad (43)$$

entonces la solución para la ecuación diferencial de primer orden no homogénea resultante en  $x$  es:

$$x = \left[ x(0) - \frac{c(0)}{\Omega} \right] \exp\{(Ag - \delta - \mu)t\} + \frac{c(0)}{\Omega} \exp\left\{ \left[ \frac{[(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]}{\gamma} \right] t \right\}, \quad (44)$$

donde

$$\Omega = (Ag - \delta)(1 - \tau_r)(\gamma - 1/\gamma) + \rho/\gamma - \mu.$$

Observe que  $\Omega > 0$ . Ahora bien, al combinar (40) con la definición de riqueza real del individuo representativo  $a = k + m - d$ , se tiene que:

$$a = x + m + b. \quad (45)$$

En consecuencia, se cumplen las siguientes condiciones límite:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} a e^{-(A - \delta - \mu)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} x e^{-(A - \delta - \mu)t} + \lim_{t \rightarrow \infty} m(0) e^{-\Omega t} \quad (46)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (43) se obtiene:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \left( x(0) - \frac{c(0)}{\Omega} \right) + \frac{c(0)}{\Omega} e^{-\Omega t} \right], \quad (47)$$

es decir,  $c(0) = [k(0) - d(0) - b(0)] \Omega$ . Para que el consumo inicial sea positivo es necesario suponer que  $k(0) > d(0) + b(0)$ ; por lo tanto:

$$x = \frac{c(0)}{\Omega} \exp\left\{ \left[ \frac{[(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]}{\gamma} \right] t \right\} \quad (48)$$

De la ecuación (48) se puede obtener la tasa de crecimiento para el consumo, la cual está dada por:

$$\varphi_c = \frac{[(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]}{\gamma}. \quad (49)$$

A continuación se realiza un análisis del impacto de los impuestos y el gasto gubernamental sobre el bienestar económico, así como la determinación del nivel óptimo de gasto público necesario para el desarrollo tecnológico.

### III. Impacto sobre el bienestar económico

Para poder medir el impacto que tienen los impuestos y el gasto aplicado al desarrollo tecnológico, se necesita obtener la función de utilidad indirecta,  $W$ , a través de la sustitución de las condiciones (establecidas en la sección anterior) para los argumentos consumo, dinero y trabajo de la función de utilidad. Asimismo, para poder analizar el bienestar económico en términos de un gasto inicial se utiliza una expansión en serie de Taylor de  $g(t)$ , de tal forma que:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + o(t), \quad (50)$$

donde  $o(t)$  es el término de error. Bajo este supuesto, la función de utilidad indirecta o bienestar económico está dado por:

$$w = \frac{[c(0)^\alpha m(0)^{1-\alpha}]^{1-\gamma}}{1-\gamma \left[ \rho - \mu - \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1-\tau_r)(Ag(0)-\delta) - \rho] \right]} - \frac{[\eta(0)^\beta d(0)^{1-\beta}]^{1+\phi}}{1+\phi \left[ \rho - \mu - \frac{1+\phi}{\phi} [(1-\tau_r)(Ag(0)-\delta) - \rho] \right]} + tO\left(\frac{g'(0)}{t}\right) \quad (51)$$

en donde  $O(g'(0)/t)$  es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tO\left(\frac{g'(0)}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{O\left(\frac{g'(0)}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \text{constante.}$$

Esta constante depende de  $g'(0)$ . Como se puede apreciar en (51), el bienestar económico depende: de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , que miden el impacto



del consumo, dinero, trabajo y deuda sobre el bienestar económico del individuo; de los parámetros  $\gamma$  y  $\phi$ , que miden la elasticidad intertemporal de sustitución; del parámetro de preferencias  $\rho$ ; de la tasa de crecimiento de la población  $\mu$ ; del impuesto sobre los ingresos del capital  $\tau_r$ ; del nivel tecnológico existente  $A$ ; de la depreciación del capital  $\delta$  y del gasto inicial del gobierno,  $g(0)$  asignado para la generación de tecnología. Para asegurar que  $W$  esté acotada es necesario que:

$$(\rho - \mu) > \max \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1-\tau_r)(Ag(0)-\delta) - \rho], \right. \\ \left. \frac{1+\phi}{\phi} [(1-\tau_r)(Ag(0)-\delta) - \rho] \right\}, \tag{52}$$

Al recordar que el impuesto a los ingresos del capital (como instrumento de política fiscal) no es modificado sustancialmente a lo largo del tiempo por las autoridades fiscales de una economía, se puede tomar como una constante, por lo que la derivada de la función que mide el bienestar económico respecto a  $\tau_r$  es:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau_r} = \frac{\left[ \eta(0)^\beta d(0)^{1-\beta} \right]^{1+\phi} \left[ \frac{1+\phi}{\phi} \right] [(Ag(0)-\delta)\tau_r]}{\left\{ 1+\phi \left[ \rho - \mu - \frac{1+\phi}{\phi} [(1-\tau_r)(Ag(0)-\delta) - \rho] \right] \right\}^2} - \\ - \frac{\left[ c(0)^\alpha m(0)^{1-\alpha} \right]^{1-\gamma} \left[ \frac{1-\gamma}{\gamma} \right] [(Ag(0)-\delta)\tau_r]}{\left\{ 1-\gamma \left[ \rho - \mu - \frac{1-\gamma}{\gamma} [(1-\tau_r)(Ag(0)-\delta) - \rho] \right] \right\}^2} < 0 \tag{53}$$

De esta manera, un aumento en el impuesto sobre la renta disminuye el bienestar económico, como lo muestra (53). Por otro lado, si se deriva la función que mide el bienestar económico respecto al gasto inicial  $g(0)$ , se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial g(0)} = \frac{\left[ c(0)^\alpha m(0)^{1-\alpha} \right]^{1-\gamma} \left[ \frac{1-\gamma}{\gamma} \right] \left[ (1-\tau_r)A \right]}{\left\{ 1-\gamma \left[ \rho - \mu - \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[ (1-\tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho \right] \right] \right\}^2} - \frac{\left[ \eta(0)^\beta d(0)^{1-\beta} \right]^{1+\phi} \left[ \frac{1+\phi}{\phi} \right] \left[ (1-\tau_r)A \right]}{\left\{ 1+\phi \left[ \rho - \mu - \frac{1+\phi}{\phi} \left[ (1-\tau_r)(Ag(0) - \delta) - \rho \right] \right] \right\}^2} \geq 0 \quad (54)$$

En consecuencia, un aumento en el nivel de gasto inicial del gobierno para generar desarrollo tecnológico incrementa el bienestar económico, tal y como lo muestra la ecuación (54).

#### IV. Un ejercicio de simulación para obtener el nivel óptimo de gasto de gobierno

En esta sección se determina el nivel óptimo de gasto de gobierno a través de un ejercicio de simulación, en donde los parámetros que determinan las características de la economía se analizan en diferentes escenarios. Para ello, la ecuación (54) se iguala a cero y se resuelve con el método de Newton Raphson para encontrar los puntos críticos. Las condiciones de la simulación base, sobre la cual se llevaron a cabo 11 simulaciones adicionales, son las siguientes: se fijaron valores de 0.9 para las condiciones iniciales del consumo, saldos reales, trabajo y deuda, es decir, se supone que el individuo utiliza cantidades iniciales de todos sus recursos cercanas a la unidad (el 0.1 restante lo destina a costos de transacción, excluyendo impuestos). Los parámetros que miden el impacto del consumo, saldos reales, trabajo y deuda sobre el bienestar económico cumplen con  $\alpha = \beta = 0.5$ , lo que significa que todos los argumentos de la función de utilidad tienen el mismo impacto. Por otra parte, dado que las elasticidades intertemporales de sustitución tienen que cumplir con  $\gamma > 0$ ,  $\gamma \neq 1$  y  $\phi > 1$ , se propuso que  $\gamma = \phi = 1.5$ , es decir, el grado de sensibilidad de sustitución del consumo por saldos reales y de trabajo por deuda es mayor a la unidad, por lo que es más fácil para el consumidor sustituir, respectivamente, uno por otro. Asimismo, se fijó  $\rho = 0.5$ , lo que su-

pone que el individuo no está impaciente ni por el consumo presente ni por el consumo futuro. Por otro lado, la tasa de crecimiento de la población se determinó en 0.025 o 2.5 por ciento, valor que, de acuerdo con el INEGI (2005), se asemeja en la realidad a la tasa de crecimiento promedio anual, en la última década, del conjunto de países más poblados del mundo (China, India, Estados Unidos, Indonesia, Brasil, Nigeria, Japón y México). El parámetro tecnológico de la economía se normalizó a la unidad, es decir  $A = 1$ , de tal forma que se puede interpretar como el nivel tecnológico existente en la economía hasta ese momento. Respecto a la depreciación, el valor correspondiente se fijó en 0.05 o 5 por ciento. Por último, el impuesto sobre la renta se fijó en 30 por ciento, tasa cercana a la que se aplica en la mayoría de los sistemas hacendarios del mundo. El cuadro 3 muestra el primer con-

**Cuadro 3.** Gasto de gobierno óptimo

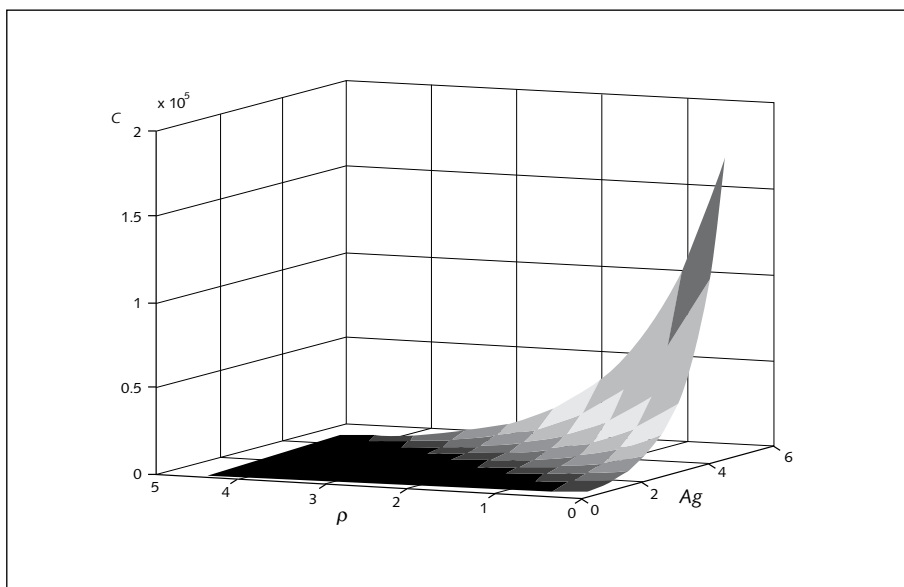
	<i>Simulaciones</i>						
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>g</i>	<b>0.0479</b>	<b>0.0106</b>	<b>0.0087</b>	<b>0.0479</b>	<b>0.0479</b>	<b>0.0460</b>	<b>0.0422</b>
<i>c</i> (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
<i>m</i> (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\eta$ (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
<i>d</i> (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\alpha$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\beta$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\gamma$	1.5	0.8	5	1.5	1.5	1.5	1.5
$\phi$	1.5	1.8	5	1.5	1.5	1.5	1.5
$\rho$	0.5	0.5	0.5	0.9	0.1	0.5	0.5
$\mu$	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.026	0.028
<i>A</i>	1	1	1	1	1	1	1
$\delta$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$\tau_r$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

Fuente: Elaboración propia.

junto de simulaciones realizadas; las áreas sombreadas muestran los cambios hechos en los correspondientes parámetros para cada simulación.

Es importante tomar en cuenta dos cosas; primero, todos los parámetros, incluyendo los correspondientes a las elasticidades, están en puntos porcentuales. De esta manera, el nivel de gasto de gobierno obtenido también lo estará; y segundo, que el nivel óptimo de gasto de gobierno que se obtiene en todas las simulaciones, al ser siempre positivo, es suficiente para aumentar el bienestar económico. Por esta razón, la participación del gobierno en la economía a través del gasto en desarrollo tecnológico tiene un efecto positivo. La simulación número 1, que es la que se toma como base, arroja un nivel de gasto de gobierno de 4.79 puntos porcentuales por arriba del gasto inicial del gobierno, es decir, es la participación mínima adicional necesaria para promover el cambio tecnológico y, por ende, para incrementar el nivel de bienestar de los hogares. En estas condiciones, cualquier gasto de gobierno por debajo de dicha cifra no tiene efectos positivos sobre el bienestar. Con un gasto de gobierno de 4.79 puntos porcentuales, y manteniendo fijos los demás parámetros, la trayectoria óptima del consumo está dada por la gráfica 3:

**Gráfica 3.** Trayectoria del consumo ( $g = 0.0479$ )



Fuente: Elaboración propia con datos de la simulación 1.

Dado que las condiciones iniciales del consumo, saldos reales, trabajo y deuda se consideran constantes, y como los parámetros que miden el impacto sobre el bienestar económico de dichos argumentos no modifican sustancialmente los resultados obtenidos, entonces el resto de las simulaciones está sujeto a cambios sólo en los demás parámetros. Al respecto, la simulación 2 está construida sobre la modificación de las elasticidades intertemporales de sustitución  $\gamma$  y  $\phi$ , las cuales pasaron de 1.5 a 0.8 y 1.8, respectivamente. Esto significa que la relación de sustitución es menos sensible para el consumo y los saldos reales, mientras que es más sensible para el trabajo y la deuda. En estas nuevas condiciones, el gasto de gobierno necesario sólo tiene que ser 1.06 puntos porcentuales superior al inicial para poder tener un impacto positivo sobre el bienestar. Por otro lado, en las simulaciones 4 y 5 el gasto de gobierno se mantiene en 4.79 puntos porcentuales, cuando se modificó el parámetro de preferencias llevándolo hasta su límite superior e inferior respectivamente. Esto significa que no importa si el consumidor está impaciente por el consumo presente ( $\rho = 0.9$ ) o por el consumo futuro ( $\rho = 0.1$ ); entonces el gasto de gobierno es, esencialmente, el mismo. Respecto a modificaciones en la tasa de crecimiento de la población, se observa en las simulaciones 6 y 7 que un aumento en dicha tasa ocasiona que el nivel de gasto de gobierno necesario para incrementar el bienestar económico sea menor. A continuación, en el cuadro 4, se presenta el resto de las simulaciones realizadas.

Como se aprecia en la simulación 8, un incremento en el nivel tecnológico existente hace que el gasto de gobierno sea de 3.99 puntos porcentuales. Análogamente, si la tasa de depreciación aumenta de 0.05 a 0.1 o a 0.15, disminuye el nivel de gasto de gobierno a 0.8 o a 1.3 puntos porcentuales, respectivamente. Cuando la tasa de depreciación es igual a 15 por ciento, el gasto de gobierno es de 1.34 puntos porcentuales si se mantienen constantes los demás parámetros. La trayectoria óptima de consumo para este nivel de gasto se muestra en la gráfica 4.

Se aprecia que, como se redujo el nivel de gasto respecto al de la gráfica 3, la trayectoria del consumo es menor, ya que su tasa de crecimiento cae en virtud de  $\phi_c = [(1 - \tau_r)(Ag - \delta) - \rho]/\gamma$ . Por último, en las simulaciones 11 y 12 se disminuyó el impuesto sobre la renta a 0.25 y 0.20; en consecuencia, el gasto de gobierno sube a 4.47 y 4.19 puntos porcentuales, respectivamente. De manera análoga para un nivel de gasto de 4.19 puntos porcentuales la trayectoria óptima de consumo se muestra en la gráfica 5.

A diferencia de la gráfica 4, en la gráfica 5 la trayectoria del consumo es mayor porque el nivel de gasto aumentó. Es importante señalar que el

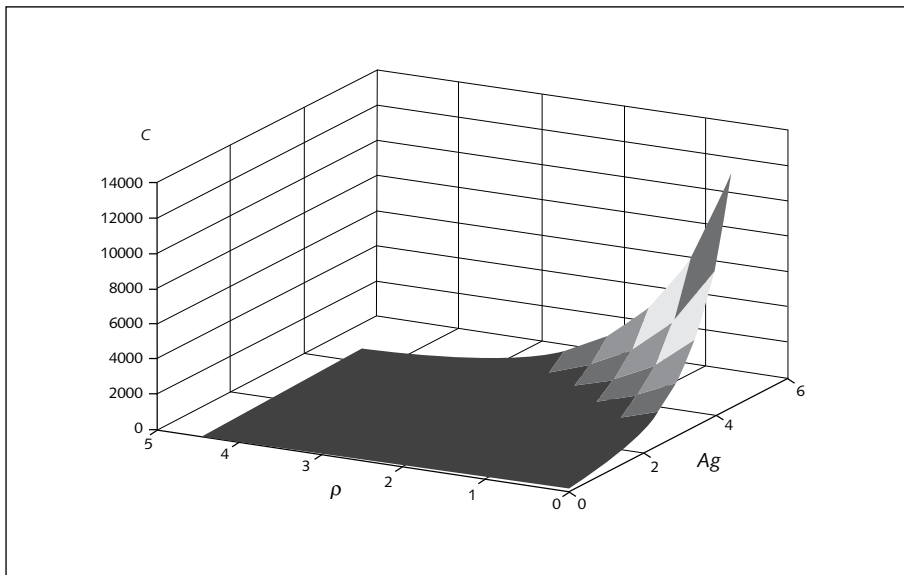
**Cuadro 4.** Gasto de gobierno óptimo (continuación del cuadro 3)

	<i>Simulaciones</i>				
	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>
<i>g</i>	<b>0.0399</b>	<b>0.0080</b>	<b>0.0134</b>	<b>0.0447</b>	<b>0.0419</b>
<i>c</i> (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
<i>m</i> (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\eta$ (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
<i>d</i> (0)	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$\alpha$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\beta$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\gamma$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$\phi$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$\rho$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\mu$	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
<i>A</i>	1.2	1	1	1	1
$\delta$	0.05	0.1	0.15	0.05	0.05
$\tau_r$	0.3	0.3	0.3	0.25	0.2

*Fuente:* Elaboración propia.

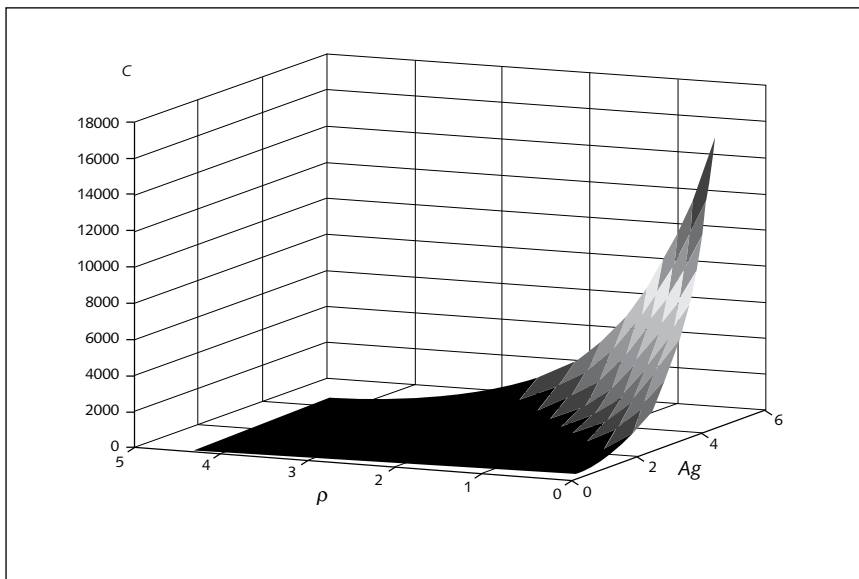
nivel de gasto de gobierno encontrado en cada una de las simulaciones es el incremento mínimo necesario en el gasto para aumentar el bienestar económico a través del impulso tecnológico en las empresas. El nivel de gasto de gobierno que genera un cambio tecnológico, como se muestra en la ecuación (30), tiene que ser igual a la unidad. Por lo tanto, en términos de las simulaciones, el gasto de gobierno necesario para producir un cambio tecnológico tiene que ser mayor o igual a 100 puntos porcentuales, es decir, el gobierno tiene que duplicar su gasto en el desarrollo tecnológico. Dado que en las simulaciones se muestra que incrementos en el gasto de gobierno de entre 1 y casi 5 puntos porcentuales aumentan el bienestar económico, se infiere que cuanto más grande sea el gasto del gobierno para

**Gráfica 4.** Trayectoria del consumo ( $g = 0.0134$ )



*Fuente:* Elaboración propia con datos de la simulación 10.

**Gráfica 5.** Trayectoria del consumo ( $g = 0.0419$ )



*Fuente:* Elaboración propia con datos de la simulación 12.

modificar el nivel tecnológico de la economía, mayor será el efecto sobre el bienestar económico.

## V. Conclusiones

En una economía con agentes idénticos en preferencia y dotaciones y con vida infinita, se mostró que la participación del gobierno en la promoción del cambio tecnológico por medio del gasto gubernamental, financiado con impuestos y deuda pública, genera un mayor crecimiento económico. Las relaciones de sustitución entre consumo y saldos reales, y entre trabajo y deuda, son mayores en el equilibrio de previsión perfecta cuando se incorpora el gasto del gobierno en el desarrollo tecnológico. Se mostró también que el impacto que tiene el gasto de gobierno en la generación del cambio tecnológico sobre el bienestar económico es positivo, mientras que un aumento en el nivel de impuestos acarrea consigo una disminución del bienestar económico.

Por último, se determinó el nivel óptimo de gasto de gobierno a través de simulaciones que permitieron modificar las condiciones de los parámetros relacionados con las elasticidades de sustitución, preferencias, crecimiento de la población, nivel de impuestos, tasa de depreciación, nivel tecnológico existente y condiciones iniciales del consumo, saldos reales, trabajo y deuda. Lo anterior mostró que incrementos entre 1 y 5 puntos porcentuales en el gasto de gobierno aumentan el bienestar económico de los hogares. A través de las gráficas de las trayectorias óptimas del consumo, para niveles distintos de gasto de gobierno, se mostró que niveles mayores de gasto gubernamental destinado al cambio tecnológico se traducen en mayor consumo y, por ende, en mayor bienestar económico. En consecuencia, niveles superiores de gasto de gobierno que son necesarios para generar un cambio tecnológico tienen un efecto positivo aún mayor sobre el bienestar.

Las principales limitaciones de la presente investigación se enlistan a continuación: primero, falta conocer los efectos que pueda tener la generación de tecnología en otras economías sobre la economía doméstica; segundo, la introducción lineal del gobierno en la economía, aunque permite obtener resultados analíticos simples, carece de realidad respecto a las relaciones económicas de dicho agente con el resto de la economía; por último, determinar de manera exógena la tasa de depreciación es restrictivo. Sin duda, es necesaria una mayor investigación acerca de la endogenización de dichas variables.



## Referencias bibliográficas

- Bardhan, Pranab K. (1967), *Optimum Foreign Borrowing, Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* (Karl Shell ed.), MIT Press.
- Barro, Robert (1990), "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, 98(5), pp. S103-S125.
- Barro, Robert y Xavier Sala-i-Martin (1992), "Public Finance in Models of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, 59, pp. 654-661.
- \_\_\_\_ (1995), *Economic Growth*, "Advanced Series in Economics", McGraw-Hill.
- Caminati, Mauro (2001), "R&D Models of Economic Growth and the Long-Term Evolution of Productivity and Innovations, Conference: Old and New Growth Theories: An Assessment", University of Pisa, octubre, pp. 1-28.
- Cazzavillan, Guido (1996), "Public Spending, Endogenous Growth and Endogenous Fluctuations", *Journal of Economic Theory*, 71, pp. 394-415.
- Easterly, William, Robert G. King, Ross Levine y Sergio Rebelo (1994), "Policy, Technology Adoption and Growth, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference", Varenna, Italy, pp. 75-89.
- Futagami, Koichi, Yuichi Morita y Akihisa Shibata (1993), "Dynamic Analysis of a Endogenous Growth Model with Public Capital", *The Scandinavian Journal of Economics*, 95(4), pp. 607-625.
- Glomm, Gerhard y B. Ravikumar (1994), "Public Investment in Infrastructure in a Simple Growth Model", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 18, pp. 1173-1187.
- Harrod, Roy (1939), "An Essay in Dynamic Theory", *The Economic Journal*, 49(193), pp. 14-33.
- INEGI (2005), Segundo Censo de Población y Vivienda.
- Intriligator, Michael D. (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice Hall, "Series in Mathematical Economics".
- Lucas, Robert (1988), "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 3-42.
- OECD Factbook (2008), *Economic, Environmental and Social Statistics, Science and Technology - Research and Development (R&D) - Expenditure on R&D*, OECD.
- Patinkin, Don (1956), *Money, Interest and Prices*, Massachusetts, The MIT Press.
- Romer, Paul (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth", *The Journal of Political Economy*, (94)5, pp. 1002-1037.

- \_\_\_\_\_ (1990), "Endogenous Technological Change", *The Journal of Political Economy*, 98(5), Part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise System, pp. S71-S102.
- Sidrauski, Miguel (1967), "Rational Choices and Patterns of Growth in a Monetary Economy", *American Economic Review*, 57(2), mayo, pp. 534-544.
- Turnovsky, Stephen (1993), "Macroeconomic Policies Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", *International Economic Review*, 34(4), pp. 953-981.
- \_\_\_\_\_ (1996), "Optimal Tax, Debt, and Expenditure Policies in a Growing Economy", *Journal of Public Economics*, 60, pp. 21-44.
- Uzawa, Hirofumi (1965), "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Endogenous Growth", *International Economic Review*, 6(1), pp. 18-31.

## Apéndice

La derivación de las condiciones de optimalidad que dan las ecuaciones (19)-(25) se obtiene a través del Hamiltoniano a valor presente:

$$H = \left[ \frac{(c^\alpha m^{1-\alpha})^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{(\eta^\beta d^{1-\beta})^{1+\phi}}{1+\phi} \right] e^{-(\rho-\mu)t} + \quad (\text{A.1})$$

$$+ \lambda \left\{ [(1-\tau_r)r - \mu]a - \tau_r rd - (1+\tau_c)c - (i - \tau_r r)m \right\},$$

donde las condiciones necesarias son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial d} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{a} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{y} \quad -\frac{\partial H}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda\rho.$$

Para encontrar las relaciones de sustitución dadas por las ecuaciones (26) y (27), se dividen (19) entre (20), y (21) entre (22) respectivamente.