

La nueva escalada matemática

El impacto reciente de la teoría de sistemas dinámicos en Economía

José Carlos Ramírez y David Juárez*

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2008; fecha de aceptación: 24 de junio de 2008.

Resumen: El objetivo del documento es mostrar cómo el uso de las técnicas de la teoría de sistemas dinámicos (TSD) ha afectado el rumbo del análisis económico, ya sea favoreciendo el desarrollo de nuevo conocimiento o permitiendo una traducción más completa de las ideas económicas al lenguaje matemático. Para tal efecto, se presentan los resultados de una clasificación hecha sobre los 4 344 artículos publicados entre 1990 y 2004 en las cuatro revistas internacionales más influyentes de la disciplina, y se exponen dos versiones dinámicas del modelo poblacional de Malthus. Las conclusiones principales revelan que: 1) la introducción de la TSD ha enriquecido el significado de los equilibrios dinámicos en dieciséis subdisciplinas de la economía, en particular en aquellas tradicionalmente caracterizadas por los análisis estáticos; 2) la utilización acuciosa de las técnicas de la TSD permite encontrar equilibrios ignorados por la teoría convencional.

Palabras clave: sistema dinámico, dinámica compleja, mapas unidimensionales, principio de población.

The New Mathematical Escalade: The Recent Impact of the Dynamical System Theory on the Economic Analysis

Abstract: This paper aims at showing how the use of the dynamical systems theory (DST) has affected the thematic content of economic analysis, either by fostering new theoretical developments or by making translation from economics to mathematics more complete. To this end, we elaborate a classification on the 4 344 papers published in the four leading economic journals between 1990 and 2004, and present two dynamical interpretations of the Malthusian model. The main conclusions state that: 1) the application of DST to economics has made the meaning of dynamic equilibriums more complex in sixteen subdisciplines, mostly in those traditionally characterized by static analysis; 2) the accurate use of DST techniques allows finding equilibriums which have been disregarded by mainstream theories.

Keywords: dynamic system, complex dynamics, unidimensional maps, principle of population.

Clasificación JEL: C60, C62.

*José Carlos Ramírez, josecarlos.ramirez@itesm.mx, director académico de la División de Negocios del ITESM-CCM y profesor afiliado del CIDE. David Juárez, david.juarez@itesm.mx, profesor investigador del Departamento de Economía del ITESM-CCM y profesor externo del CIDE.

Introducción

En un artículo publicado hace poco más de tres lustros, Debreu (1991, p. 1) hacía notar que, ya para entonces, el uso intensivo de temas matemáticos avanzados en economía había afectado “profundamente [a la] profesión”. Hoy en día la tendencia no ha hecho más que acentuarse. No sólo se ha incrementado el número de esos temas en revistas no especializadas, sino que el nivel de profundidad matemática, antes reservado para disciplinas como la física, se ha vuelto familiar en las publicaciones de economía de mayor prestigio internacional.

La gran celeridad que ha cobrado la formalización en la teoría económica ha puesto en claro que, si uno desea ser participante activo en su actual desarrollo, no hay otra alternativa que contar con un alto grado de profesionalismo matemático (Debreu, *loc. cit.*). De lo contrario se corre el riesgo de quedar al margen de la disciplina, pues hay que tener en cuenta, entre otras cosas, que el tiempo que media ahora entre una novedad matemática y su adaptación a la teoría económica se ha reducido a tal grado que, en no pocas ocasiones, los mismos matemáticos han optado por iniciar sus aplicaciones en los distintos campos de la economía.¹

Entre los campos más afectados por la introducción de nuevo conocimiento matemático sobresalen los que hacen acopio de la teoría de sistemas dinámicos (TSD).² El reconocimiento de que los mecanismos de mer-

¹ Además de los ya conocidos y lejanos casos de Bachelier en finanzas, Nash y Von Neumann en teoría de juegos o Dantzig en la optimización estática de problemas microeconómicos, cabe destacar la aplicación relativamente reciente de las teorías de fractales y de leyes de potencias por Mandelbrot al análisis de los precios de los activos, el cálculo no estándar de Robinson y la teoría de correspondencias de Hildenbrand a la fundamentación de equilibrios únicos en grandes sistemas económicos (Debreu, 1984 y 1991; Brown y Robinson, 1974; Farmer, 1999; Weintraub, 2002). Cada una de estas contribuciones, que ahora son utilizadas en otras áreas del conocimiento, tuvieron su aplicación inicial en economía.

² Originalmente la TSD nació como un tópico especial de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias (TEDO). Los trabajos de Poincaré y Bendixon sobre las propiedades topológicas de los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas en el plano y, posteriormente, la teoría de estabilidad desarrollada por Liapunov dieron cuerpo a los primeros trabajos de la TSD a finales del siglo XIX, pero sin desprenderse todavía de la TEDO. No fue sino a partir de la tercera década del siglo XX cuando Birkhoff extendió los horizontes de la TSD más allá de la TEDO, al establecer las dos corrientes sobre las que se fundan los estudios modernos de la TSD; esto es: la teoría topológica y la teoría ergódica. Sobre esta división se han incorporado recientemente las teorías de grupos de transformación topológicos y de estabilidad estructural dentro del marco de la topología diferencial (Bhatia y Szegó, 2002).

cado pueden ser inherentemente inestables en su dinámica y no sólo deterministas y estables, como era la visión dominante hace unas décadas, ha abierto grandes avenidas de investigación en economía que involucran la utilización de temas avanzados de la TSD. La revitalización, por ejemplo, de la hipótesis del ciclo endógeno, según la cual las fluctuaciones agregadas pueden ser endógenamente inestables aun en ausencia de *shocks* estocásticos, ha favorecido la aparición de modelos macroeconómicos no lineales que echan mano de los últimos avances de las teorías topológica y ergódica de los sistemas dinámicos (Boldrin y Woodford, 1992). Asimismo, la aceptación de que las trayectorias de las variables de control pueden experimentar comportamientos dinámicos complejos en la vecindad de los puntos críticos ha demandado el uso de las teorías de estabilidad estructural y de catástrofes en los nuevos modelos de crecimiento económico (Grandmont, 1992; Varian, 1991).

El objetivo de este documento es mostrar cómo el uso de las técnicas de la teoría de sistemas dinámicos (TSD) ha afectado el contenido temático del análisis económico, ya sea favoreciendo el desarrollo de nuevas áreas de conocimiento o permitiendo una traducción más completa de las ideas económicas al lenguaje matemático. Los resultados, sin embargo, no siempre han sido muy afortunados, pues así como se ha observado una beneficiosa relación entre las subdisciplinas de la economía tras la introducción de la TSD, su uso indiscriminado ha alterado en algunos casos el significado original de los conceptos económicos (véase, por ejemplo, Backhouse, 1998; Dow, 1998 y 1999).

El documento está organizado en tres apartados. En el primero se ofrece un panorama de la extensión de la TSD hacia distintas áreas de la economía, que hasta hace dos décadas estaban caracterizadas por los análisis estáticos. Para tal efecto se presentan los resultados de una clasificación hecha sobre los 4 344 artículos publicados entre 1990 y 2004 en las cuatro revistas internacionales más influyentes de la disciplina. En el segundo apartado se explica esta extensiva utilización de la TSD con base en la desigual resistencia de los autores a abandonar esquemas de optimización diseñados para arrojar equilibrios de *steady state*, así como en su diferente percepción del papel de la matemática en economía. El tercer apartado expone dos versiones dinámicas del modelo poblacional de Malthus para mostrar que la introducción de la TSD permite encontrar equilibrios no considerados anteriormente por la teoría convencional. Por último, en las conclusiones, se comentan las posibles repercusiones del uso de la TSD en el contenido y la enseñanza futura de la economía.

I. La nueva orientación de la matemática en economía

La mayoría de los especialistas concluye que hay tres grandes etapas en el desarrollo de la matemática en economía (consúltese, por ejemplo, Arrow e Intriligator, 1991; Weintraub, 2002).³ La primera, que dio forma a la teoría microeconómica entre 1838 y 1947, estuvo basada predominantemente en la adopción de los métodos de la mecánica clásica y, por ende, en el uso del cálculo de variable real (Mirowsky, 1989). La segunda, que incluye un periodo corto después de la segunda posguerra (1948-1960), se caracterizó por aplicar las nociones elementales de la teoría de juegos, los modelos lineales y la teoría de conjuntos a diversas áreas de la macroeconomía, microeconomía y crecimiento económico. Y la última, que se extiende hasta nuestros días, es conocida como la etapa de integración por aplicar combinadamente la tecnología matemática de las dos etapas anteriores, pero con una profundidad mayor, en casi todas las ramas de la economía (Arrow e Intriligator, 1991).

La cualidad integradora de la tercera etapa se expresa, en buena medida, en el decidido vuelco experimentado por los economistas hacia el análisis dinámico (Weintraub, 1991). De hecho, existen al menos dos razones para considerar la TSD como la principal responsable de la renovada expansión de la matemática en toda la disciplina. La primera es que la amplitud de conocimiento matemático requerido por el análisis de los sistemas dinámicos no tiene parangón en el pasado reciente de la teoría económica. A diferencia de las fases iniciales del desarrollo de los modelos económicos dinámicos, en las que se requería un dominio moderado de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las técnicas de optimización deterministas, la tercera etapa exige no sólo una familiarización más profunda con estos temas, sino también, de manera fundamental, con los sistemas dinámicos no lineales. Y es que los nuevos modelos de ciclos endógenos son esencialmente no lineales y su dominio profundo requiere el uso de topología, teoría de grupos, análisis funcional, teoría de la medida, estabilidad estructural, optimización estocástica y juegos diferenciales que, hasta hace poco, eran relativamente extraños a la disciplina (Boldrin y Woodford, 1992).

³ Arrow e Intriligator (1991) elaboran esta periodización con el fin de resaltar el predominio de ciertas tecnologías matemáticas en determinados periodos de evolución de la disciplina, no para establecer fechas definitivas sobre su auge y declinación. De hecho, sostienen que esto último es impensable, pues aún hoy en día los economistas continúan utilizando las ramas de la matemática que tuvieron su mayor auge en las primeras etapas de desarrollo de la economía.

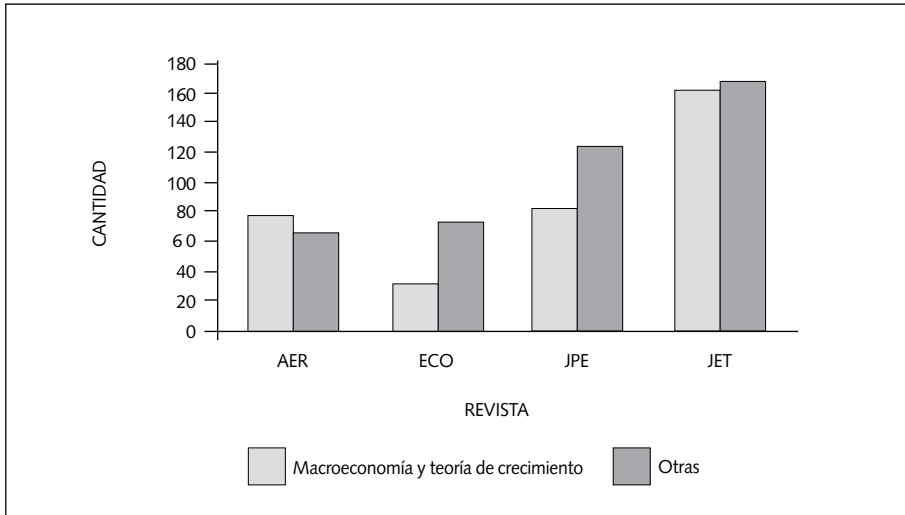
Una evidencia de este vuelco a los análisis dinámicos la encontramos en la muestra que realizamos en las cuatro revistas internacionales más prestigiosas de economía [*Econometrica* (*ECO*), *The American Economic Review* (*AER*), *Journal of Political Economy* (*JPE*) y *Journal of Economic Theory* (*JET*)].⁴ De acuerdo con los resultados de esta muestra, de los 4 344 artículos publicados entre 1990 y 2004 cerca de una quinta parte (783) incluyó una caracterización dinámica del fenómeno bajo estudio (véase la gráfica 1).⁵ La proporción es aún más elevada si eliminamos de la muestra los artículos denominados cortos, que aparecieron como notas o que fueron resultado de una invitación, pues en ese caso la cifra alcanzó 24.48 por ciento del total (694); es decir, casi uno de cada cuatro artículos centrales incorporó alguna variante del análisis dinámico (véase la gráfica 2). Este porcentaje es significativamente mayor que lo obtenido (11%) para el caso de *AER* y *ECO* en la década comprendida entre 1980 y 1990.

La segunda razón es que el radio de acción de la TSD no sólo abarca las ramas *naturalmente* dinámicas, como macroeconomía o crecimiento económico, sino también otras en las que predominan los análisis estáticos. Como se puede observar en la gráfica 1 y el cuadro 1, más de la mitad de los 783 artículos corresponde a 14 áreas distintas a esas dos ramas, en particular a la microeconomía, teoría de juegos y economía laboral. El cambio no deja de sorprender si consideramos que entre 1980 y 1990 la teoría del crecimiento y la macroeconomía concentraban cerca de 77 por ciento de los artículos dinámi-

⁴ Las conclusiones derivadas de estas cuatro publicaciones son muy importantes para el desarrollo de la teoría económica, en virtud de que se trata de las revistas líderes de la disciplina, de acuerdo con varios sistemas de puntuación (véase por ejemplo Kailatzidakis *et al.*, 2003). Stigler *et al.*, (1995) sostienen que estas revistas concentran, en promedio, 70 por ciento de las citas de las nueve publicaciones periódicas más importantes en economía. Además, tienen el cociente de citas por pares más elevado de todas las revistas internacionales, convirtiendo a *ECO* y a *JPE* en los mayores exportadores de conocimiento de la disciplina. *ECO*, a su vez, se clasifica como la revista que más capacidad matemática requiere para su publicación.

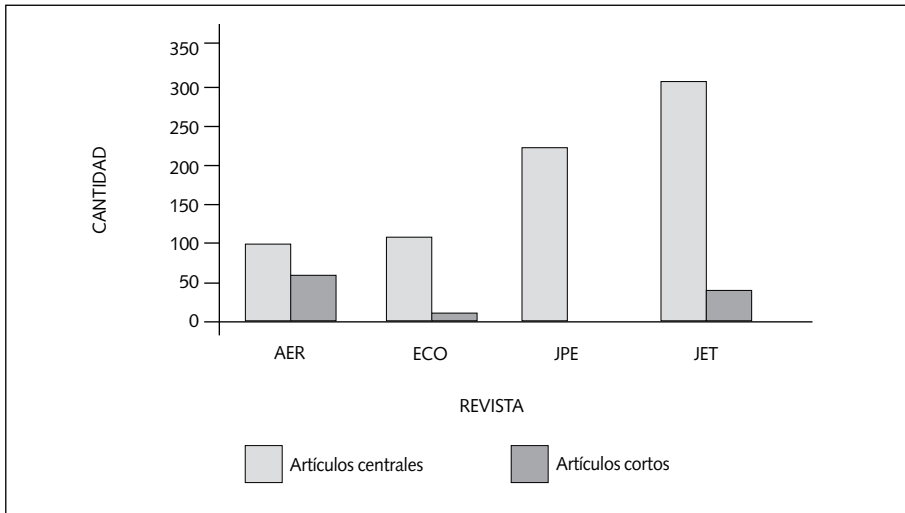
⁵ Por caracterización dinámica nos referimos a la utilización que hacen los autores de alguna variante de la siguiente definición de sistema dinámico: un sistema dinámico sobre un espacio métrico X , con medida métrica Q , es la tripleta (X, R, π) donde R es el conjunto de números reales y π es un mapa que va del espacio producto $X \times R$ al espacio X , el cual satisface los siguientes axiomas: 1) $\pi(x, 0) = x$, $\forall x \in X$ (axioma de identidad); 2) $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$, $\forall x \in X$ y $t_1, t_2 \in R$ (axioma de grupo); y 3) π es continua (axioma de continuidad). El espacio X y el mapa π se conocen, respectivamente, como el espacio fase y el mapa fase del sistema dinámico (véase Bhatia y Szegő, 2002). Para el caso de sistemas discretos el axioma 3) debe modificarse para incluir solamente los valores discretos que resultan de iterar una función. "Un sistema dinámico discreto consiste en una función [una ecuación en diferencias] y sus iteraciones" (Holmgren, 2000, p. 2).

Gráfica 1. Número de artículos con contenido dinámico por subdisciplina y revista



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 2. Tipo de artículo con contenido dinámico por revista



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 1. Número de artículos por subdisciplina y revista

		Subdisciplina														
Revista	Mac	T.	T.	E.	E.	Mic.	T.	E.	C.	H.	E.	E.	E.	E.	D.	E.
		C.	J.	L.	E.		F.	A.	I.	E.	B.	Ind.	P.	R.	E.	Ins.
AER	45	31	9	3	2	7	7	3	3	2	7	11	4	1	1	6
ECO	17	12	29	5	1	12	6	0	2	0	3	10	3	0	1	1
JPE	63	21	2	13	4	38	32	1	4	4	4	14	1	0	5	4
JET	126	36	62	2	0	58	19	4	4	0	1	11	0	0	6	0
Total	251	100	102	23	7	115	64	8	13	6	15	46	8	1	13	11

Fuente: Elaboración propia. Mac.- macroeconomía; T. C.-teoría del crecimiento; T. J.- teoría de juegos; E. L.- economía laboral; E. E.- economía experimental; Mic.-microeconomía; T. F.-teoría financiera; E. A.-economía ambiental; C. I.-comercio internacional; H. E.-historia económica; E. B.- economía del bienestar; E. Ind.- economía industrial; E. P.-economía política; E. R.- economía regional;-; D. E.- desarrollo económico; E. Ins.- economía institucional.

cos publicados en *ECO* y *AER*. Los modelos desarrollados en las nuevas áreas incorporan diferentes condiciones de estabilidad y convergencia en temas que van desde problemas de agencia en economía industrial hasta análisis de equilibrio general estocástico en comercio internacional (consúltese, por ejemplo, Inderst, 2004; Backus, Kehoe y Kydland, 1992).⁶

Las consecuencias inmediatas de esta nueva expansión se han visto reflejadas, por un lado, en una mayor atención de temas que incorporan más de un área de especialidad, y por otro, en una utilización más heterogénea de los conceptos de dinámica. En efecto, la revisión de algunos artículos revela que ahora los autores buscan combinar elementos de distintas subdisciplinas no sólo para darles mayor realismo a los modelos, sino, fundamentalmente, para garantizar su equilibrio dinámico, como es el caso,

⁶ La clasificación no está exenta de arbitrariedades, pues es evidente que no es igual de rigurosa la definición de sistemas dinámicos en un artículo de historia económica que en otro de crecimiento económico, como tampoco es igual la naturaleza dinámica descrita en un trabajo que incluye modelos estocásticos que en otro basado en teoría de juegos. Por esta razón, es importante dejar en claro que la clasificación refleja más bien la intención de mostrar el cambio en el contenido temático de las subdisciplinas que utilizan la TSB, por más rudimentarias que sean las técnicas de análisis dinámico ahí practicadas, que en hacer una evaluación exhaustiva de la definición de sistemas dinámicos empleada en los trabajos.

por ejemplo, de los recientes trabajos de localización industrial que incluyen variables macroeconómicas y de comercio internacional no presentes en los análisis estáticos (véase Keller, 2002).⁷ Esta superposición de subdisciplinas ha enriquecido, y a la vez vuelto más complejo, el análisis de los fenómenos económicos en el tiempo, pues al lado de los clásicos modelos de crecimiento con trayectorias estables y únicas es posible encontrar, incluso en las mismas revistas, modelos con múltiples trayectorias que no convergen a ningún valor límite cuando se hacen variar algunos parámetros *interdisciplinarios* (por ejemplo, la tasa de erosión de la conducta ética de los agentes) más allá de cierto umbral (véase, por ejemplo, Noe y Rebello, 1994).⁸

La complejidad del análisis es variable en cada trabajo pues, de acuerdo con la muestra, los autores adoptan diversos enfoques para estudiar la dinámica de un fenómeno. Hay, para empezar, documentos con una fuerte orientación empírica que asocian el concepto de dinámica con ecuaciones de crecimiento resultantes de una especificación econométrica o de una serie de tiempo, sin estar interesados en la evaluación de los puntos críticos. Entre éstos destacan documentos de historia económica, economía del bienestar, economía institucional o economía financiera, cuyo objetivo reside en proveer de evidencia a hipótesis cualitativas sobre el comportamiento de aspectos tan diversos como la crisis de 1929 (véase, por ejemplo, Rappoport y White, 1994), las creencias culturales y la organización de la sociedad (Greif, 1994), la comunicación entre revistas de economía (Stigler, Stigler y Friedland, 1995) o el comportamiento de los precios de los activos financieros en presencia de consumidores heterogéneos (Brav, Constantinides y Geczy, 2002).

En seguida se encuentra otro grupo de artículos cuyos análisis dinámicos utilizan el formato de la teoría de juegos. Se trata de documentos donde los equilibrios estables se caracterizan por ser subconjuntos de Nash-Bayes y por satisfacer los principios de *backward induction* y *forward*

⁷ De hecho, la producción de nuevo conocimiento en algunas subdisciplinas no hubiera sido posible sin la utilización de la TSD durante los últimos quince años. La teoría de poblaciones con dos sexos (que sustituye a la de poblaciones estables de un sexo de Lotka) o la nueva generación de *matching models* que aseguran equilibrios bayesianos en el mercado laboral (Spence, 1974; Noldeke y Van Damme, 1990) son dos claros ejemplos que deben, en buena medida, su existencia a la aplicación de la TSD en el análisis económico.

⁸ Una consecuencia de esta interdisciplinariedad es que el concepto de equilibrio dinámico tiene ahora muchos significados, pues además de los consabidos puntos fijos, ciclos límites o toros, uno puede encontrar equilibrios inestables y múltiples, determinísticos y estocásticos, combinadores y separadores, con catástrofes, bifurcaciones, caos y atractores extraños o con componentes de Nash. ¡Y todo esto considerando ligeros cambios a los mismos supuestos sobre los que se desarrolló la generación de modelos de *steady state*!

induction en la forma de admisibilidad, dominancia iterada y equilibrio de dominación (Eichberger, 1993).⁹ En otras palabras, los equilibrios estables y dinámicos pertenecen al conjunto conectado de estrategias o *componentes* de Nash y que, por lo tanto, comparten la misma distribución de pagos y la misma trayectoria de equilibrio. Los equilibrios son invariantes a las perturbaciones de la forma normal de un juego, de tal suerte que para cada perturbación siempre hay un equilibrio cercano al conjunto de estados estables (véase por ejemplo Ritzberger y Weibull, 1995). Cuando los juegos se mezclan con ecuaciones diferenciales o en diferencias dan lugar a soluciones dinámicas de juegos diferenciales que arrojan equilibrios determinísticos y estocásticos múltiples, como acontece con los trabajos que incorporan juegos evolutivos.¹⁰ En estos trabajos, los equilibrios están gobernados por un *replicador dinámico* que guía las trayectorias de las estrategias estables hacia espacios-estado formados, primordialmente, por *estrategias evolucionariamente estables* (Binmore, Piccione y Samuelson, 1998). En cada caso las aplicaciones han sido numerosas e incluyen desde problemas de aprendizaje en la teoría microeconómica de elección hasta modelos de múltiples etapas de juegos diferenciales en competencia oligopolista (consúltese, por ejemplo, Tornell y Velasco, 1992).

Finalmente, destaca un tercer grupo de estudios que utiliza el concepto de dinámica en el sentido más convencional de la TSD, es decir, que analiza las condiciones de estabilidad y convergencia de las trayectorias de fenómenos económicos mediante distintos formatos de optimización dinámica. El grupo no es homogéneo y bien podemos decir que, de acuerdo con las diferencias de énfasis en sus análisis de las condiciones de equilibrio, está dividido en tres subgrupos.

El primero de ellos, que a su vez es el más numeroso, acepta a pie juntillas los preceptos originales de los modelos neoclásicos de crecimiento, y considera como solución regular la existencia de equilibrios estables y únicos (consúltese, por ejemplo, Segerstrom, 1991; Howitt, 1999). El segundo subgrupo, desprendido del anterior, reconoce que ante ciertas *anomalías*

⁹ Existen también artículos centrados en las propiedades y condiciones de existencia de equilibrios en juegos dinámicos (véase por ejemplo Dockner y Sorger, 1996) o en algunas variantes que incluyen modelos de riesgo moral (Bhaskar y Damme, 2002) o de costos hundidos (Tröger, 2002).

¹⁰ "Los juegos diferenciales pertenecen a una subclase de juegos dinámicos llamados juegos de espacio estado. En un juego de espacio estado el modelador introduce un conjunto de variables (estado) para describir el estado de un sistema dinámico en cualquier momento del juego. La hipótesis es que la influencia relevante del pasado sobre los pagos está adecuadamente resumida en las variables estado". (Dockner *et al.*, 2006, p. 1).

—como las que examinan Backus *et al.* (1992) en forma de discrepancias entre su modelo y los datos— o ante la falta de evidencia para apoyar las predicciones de los modelos neoclásicos, es difícil asegurar la existencia de equilibrios únicos y estables.¹¹ Lucas (1990), por ejemplo, sostiene que para obtener esos equilibrios es necesario antes hacer ajustes en los supuestos y considerar las diferencias en capital humano, en la efectividad de los trabajadores y en las imperfecciones de los mercados como elementos indispensables para los análisis de convergencia entre países.

Por último, se encuentra un tercer subgrupo que abiertamente reconoce que las condiciones de esos equilibrios estables y únicos son muy restrictivas, y que se presentan preferentemente en análisis que privilegian economías de un solo sector (Boldrin y Rustichini, 1994) o, si se consideran ambientes estocásticos, en forma de ciclos y no sólo como atractores de dimensión cero (Evans y Honkapohja, 1995). La extensión del análisis de estabilidad a economías de dos sectores ha hecho evidente que modelos de equilibrio deterministas pueden producir, también, trayectorias de acumulación de capital con dinámica compleja en forma de bifurcaciones (Boldrin y Rustichini, 1994; Mitra y Nishimura, 2001), caos topológico (Mitra, 1996 y 1998) o ergódico (Nishimura y Yano, 1995).¹²

II. Las razones acerca del uso diverso de la TSD en economía

¿Qué explica esta heterogénea expansión de la TSD en el análisis económico? En realidad no es fácil dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Para empezar, hay varios elementos de la explicación que se encuentran en el propio desarrollo de la disciplina y que se resumen en la creciente complejidad del objeto de estudio de los fenómenos dinámicos en economía. Pero también hay otros, igual de importantes, que tienen que ver con la diferente resistencia de los autores a abandonar esquemas de optimización originalmente concebidos para funcionar bajo sistemas dinámicos que arrojan únicamente estados estables.¹³

¹¹ Encontramos otros ejemplos en Benhabib y Perli (1994) y en Boldrin y Montrucchio (1995).

¹² En esta lista también encontramos modelos de búsqueda (*search models*) que generan resultados interesantes como ciclos, caos y equilibrios de manchas solares (Lagos y Wright, 2003).

¹³ En la TSD se reconocen cuatro movimientos que caracterizan la conducta dinámica de cualquier trayectoria, a saber: estado estable o *steady state* (cuando el sistema cesa su movimiento), periódico (cuando el sistema entra en un ciclo límite), semiperiódico (cuando el sistema entra en una mezcla de movimientos periódicos con diferentes frecuencias) y caótico (cuando el sistema entra en dinámica compleja).

En general tenemos, por un lado, a los autores que consideran que las trayectorias dinámicas perturbadas por factores externos se propagan en forma amortiguada a lo largo del horizonte de planeación y, por otro lado, a los que asumen que las perturbaciones hacen oscilar la economía erráticamente. Los primeros toman como base la metodología de Slutsky-Frisch-Tinbergen al sostener que esas perturbaciones son producidas por impulsos estocásticos exógenos que tienden a ser atenuados por diversos mecanismos de filtración de la economía. La generación de modelos de ciclo de negocios con especificaciones lineales constituye el ejemplo más representativo de esta categoría.¹⁴ Los autores del segundo grupo suponen, en cambio, que aun en ausencia de *shocks* exógenos y con modelos de equilibrio rigurosamente formulados –en los que los agentes optimizan con información completa– pueden presentarse fluctuaciones periódicas, semiperiódicas o caóticas. De hecho, algunos de estos autores adscritos a la última generación de modelos de ciclo endógeno aseguran que puede haber modelos con un solo equilibrio perfecto que involucran fluctuaciones continuas, independientemente de las condiciones iniciales, o modelos cuya dinámica no lineal es indeterminada debido a que cuentan con varios equilibrios, entre los cuales hay algunos en los que la economía oscila por siempre (véase Boldrin y Woodford, 1992).¹⁵

Las diferencias entre ambos enfoques se expresan en una utilización distinta de la TSD. En el primer enfoque, los autores suponen que las perturbaciones no afectan la estructura *simpléctica* de los sistemas hamiltonianos que está detrás de sus métodos de optimización, mientras que en el segundo los autores consideran que no hay nada que garantice que los

¹⁴ En términos generales podemos distinguir tres fases en el desarrollo de los modelos de ciclo endógeno. La primera (1940-1960), que arranca con los trabajos pioneros de Hicks, Kaldor y Goodwin, sienta las bases de la comprensión de la naturaleza endógena de las perturbaciones de los fenómenos económicos, pero bajo supuestos conductuales incompatibles con los principios de optimización. La segunda (1960-1985) se caracteriza por suplir la orientación no lineal de los sistemas dinámicos de los anteriores autores por el uso de sistemas dinámicos lineales y la metodología de Slutsky-Frisch-Tinbergen. Y la tercera (1985-), que es un regreso mejorado a la primera fase, incluye los trabajos que muestran la persistencia de las fluctuaciones endógenas en modelos de equilibrio donde los agentes optimizan en condiciones de información completa.

¹⁵ Paralelo a estos modelos hay otros dos grandes grupos de estudios que terminan de conformar el nuevo enfoque dinámico en economía (en oposición al tradicional, que se concentraba en los análisis de equilibrios estables y únicos). El de juegos diferenciales ya visto, que acepta la posibilidad de múltiples equilibrios en torno al conjunto conectado de Nash, y el de modelos estocásticos que incorpora conceptos de estabilidad distintos al de los sistemas determinísticos.

sistemas hamiltonianos perturbados vuelvan a ser canónicos e integrables.¹⁶ La adhesión a cualquier enfoque conlleva el establecimiento de distintas condiciones de equilibrio.

Los defensores de la idea de que los *shocks* externos se pueden modelar como fenómenos con movimiento amortiguado asumen que las formas hamiltonianas de las ecuaciones pueden ser canónicamente preservadas después de la perturbación y, por lo tanto, que la optimización de las trayectorias de las variables económicas puede llevarse a cabo sin ninguna alteración. La aceptación tácita de que las perturbaciones no destruyen los toros resonantes del sistema integrable lleva a estos autores a adoptar diferentes versiones del teorema de Turnpike y, en consecuencia, a utilizar los esquemas de optimización y estabilidad de la mecánica hamiltoniana.¹⁷ Por el contrario, quienes consideran que las perturbaciones crean zonas en los espacios fases que son ocupadas por nuevos toros resonantes y órbitas periódicas elípticas e hiperbólicas (tras la destrucción de los toros del sistema integrable) rechazan los postulados del teorema de Turnpike y tratan con hamiltonianos de sistemas perturbados o con modelos físicos de dinámica compleja (véase Brock, 1988; Scheinkman, 1990).

Ambas posiciones son resultado, también, de la imagen que poseen los autores acerca de la matemática pues, como lo señala Weintraub (2002), la utilización de la TSD en economía depende críticamente del concepto matemático que tiene el economista. Y éste ha variado conforme a las tenden-

¹⁶ Cuando el hamiltoniano es independiente del tiempo se puede demostrar que el flujo de energía es constante en el sistema o, mejor dicho, que el sistema es conservativo y de estructura simpléctica. En caso de que se perturbe un sistema conservativo pueden presentarse las siguientes dos situaciones: que el sistema perturbado conserve la estructura simpléctica mediante una transformación canónica o que el nuevo sistema deje de ser integrable. En la primera situación basta introducir un cambio arbitrario de variables para que se preserven las formas originales de las ecuaciones. Cuando este cambio es posible, se dice que la transformación es canónica y que los vectores de “posición” y de “momentos generalizados” están canónicamente conjugados. En la segunda situación, las constantes del sistema integrable o no perturbado tenderán a ser destruidas, y el volumen del espacio fase del sistema perturbado que no es ocupado por toros sobrevivientes será ocupado por toros resonantes perturbados, órbitas caóticas y órbitas periódicas hiperbólicas y elípticas, en una palabra, por fractales gordos.

¹⁷ La existencia de equilibrios múltiples deriva del incumplimiento de las condiciones que validan el teorema de Turnpike. De acuerdo con diversas variantes de este teorema, si se cumplen algunas condiciones, en particular las relacionadas con el valor del parámetro de preferencia por el consumo, los equilibrios competitivos convergerán a un estado estacionario. Si el valor del parámetro es alto, esto es, que la gente prefiere consumir más ahora que en el futuro (se vuelve más impaciente), los equilibrios arrojarán bifurcaciones de cúspide, mariposa, del tipo Hopf o caos (véase, por ejemplo, Benhabib y Nishimura, 1979).

cias dominantes de la matemática; es decir, ha pasado de privilegiar un enfoque dominado por el programa formalista de Hilbert a otro basado en el uso extensivo de los modelos simulados (Davis y Hersh, 1995).¹⁸ En el programa formalista, los economistas han considerado esencial mostrar la existencia de equilibrios únicos y estables en modelos de equilibrio general deducidos de axiomas incuestionables (Weintraub, 2002). Y para tal efecto han desarrollado durante cincuenta años una gigantesca empresa en la que se incluyen los esfuerzos iniciales de Samuelson por introducir las condiciones generales de los equilibrios dinámicos, hasta los recientes trabajos de Smale orientados a demostrar la existencia de equilibrios dinámicos competitivos ante cambios en los vectores de precio-estado.¹⁹ Como contraste, han surgido otros economistas matemáticos más orientados a la simulación de modelos que ponen en entredicho la existencia de equilibrios dinámicos únicos y estables. Se trata de economistas que han desarrollado su trabajo al amparo del florecimiento de disciplinas dentro de la TSD que deben su auge al uso intensivo de programas de computadores digitales, tales como la teoría del caos o de fractales (Ott, 2002).

III. Los modelos económicos vistos a la luz de los nuevos avances de la TSD: El principio de población de Malthus

La diversidad de posturas sobre la dinámica en economía también tiene efectos sobre las formas de traducir las ideas de las principales corrientes de pensamiento al lenguaje matemático. Quienes encuadran los modelos de crecimiento en mapas invertibles unidimensionales o sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con diagramas fases de dos variables se enfocan, de manera casi forzosa, en determinar la estabilidad y convergencia

¹⁸ Mirowski (2002) sostiene que la historia de la matemática y la economía es, primero, una historia de la física y la economía, y, más recientemente, una historia de la ciencia de la información y la economía.

¹⁹ Samuelson introdujo en los años cuarenta del siglo pasado los conceptos de la TSD con la idea de dotar de una estructura dinámica a los equilibrios walrasianos. Posteriormente, hacia finales de los años cincuenta se desarrolló, como un subprograma, el análisis de las condiciones de estabilidad de los equilibrios económicos. En ese afán se incorporaron los conceptos de estabilidad estructural de Poincaré-Bendixon y las técnicas de Liapunov para analizar estabilidad de movimiento o de soluciones. Con esta nueva tecnología matemática algunos autores, como Arrow y Hurwicz, establecieron las condiciones en las cuales el equilibrio competitivo era estable (Weintraub, 1991). Tiempo después Scarf y Gale mostraron que la estabilidad no era necesariamente demostrable para cualquier modelo, por lo que, según Smale (1998), éste se ha convertido en uno de los dieciocho grandes problemas de la matemática en este siglo.

de las trayectorias en torno a un solo punto crítico o ciclo límite. La razón es que esos modelos no poseen atractores ni estructuras geométricas más complicadas. Por el contrario, quienes modelan trayectorias con dinámica compleja utilizan sistemas de ecuaciones diferenciales (o en diferencias) con dimensión $N \geq 3$ (o $N \geq 2$ para los mapas invertibles) para evaluar, en determinados tramos de las trayectorias, equilibrios múltiples que resultan de variar ciertos parámetros de las funciones. La resultante estructura geométrica de estos sistemas o mapas es tan variada que abarca desde atractores con dimensión entera hasta atractores extraños o con dimensión fractal.²⁰

La justificación para utilizar determinado sistema o mapa particular es un asunto que no deja de ser debatible, puesto que en cualquier caso hay excesos o arbitrariedades.²¹ Es claro que así como hay una fuerte resistencia de algunos autores a aceptar los resultados de equilibrios múltiples, hay otros que se esmeran en probarlos mediante la manipulación de un parámetro. Y eso, en lugar de ver la introducción de la TSD como un motivo de enriquecimiento de la disciplina se vuelve, en algunos casos, un ejercicio forzado y poco científico.

Una posición intermedia es considerar que ninguna herramienta matemática es excluyente por naturaleza si ésta no altera el concepto económico

²⁰ Las estructuras de las trayectorias son más complejas entre más grande sea la dimensionalidad del sistema. En sistemas con $N < 3$ ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden las trayectorias convergen o divergen en torno a un atractor de dimensión cero (un solo punto) o dimensión uno (curvas cerradas). Los modelos básicos de Solow y Ramsey son, por ejemplo, sistemas continuos de dimensión $N = 2$ que arrojan atractores de un solo punto en el espacio fase, propios de los equilibrios de *steady state*. En sistemas continuos con $N \geq 3$ las trayectorias exhiben una estructura geométrica más complicada que en los casos anteriores debido a la presencia de atractores extraños o con dimensión no entera. Para los sistemas discretos, la dinámica compleja se observa cuando $N \geq 2$ si los mapas son invertibles, o $N \geq 1$ si no son invertibles, como es el caso de la ecuación logística. Un mapa M es invertible si dado para cada valor de x_n es posible derivar un y sólo un valor de x_{n+1} ; esto es, $x_{n+1} = M(x_n)$. En caso contrario, el mapa no es invertible.

²¹ No obstante que la TSD ha enriquecido el análisis dinámico de los fenómenos económicos, es importante hacer notar que su utilización no está exenta de críticas. La introducción de funciones *ad hoc* en los modelos originales de crecimiento o la manipulación de algunos parámetros—como el de la tasa de descuento— más allá de cierto umbral han dado lugar a teoremas anti-Turnpike que tienen poca relevancia económica. La sugerencia, por ejemplo, de Day (1982), de modificar la función de producción del modelo de Solow utilizando una ecuación logística para medir, entre otras cosas, el efecto polución o la variabilidad de la tasa de ahorro sobre las trayectorias de acumulación del capital, es una “petición de principio” que deja muchas dudas. Y es que, como veremos más adelante, la ecuación logística es un mapa no invertible que de suyo presenta dinámica compleja en cierto rango de r_n , por lo que no queda claro si es la forma funcional o el impacto de las variables lo que produce la dinámica compleja.

que representa. La combinación de técnicas puede, incluso, ayudar a revelar aspectos de corto plazo que permanecen ocultos en los análisis de estabilidad y convergencia de largo plazo, como queda claro en el estudio del *principio* de población de Malthus que desarrollamos a continuación. De acuerdo con el estudio, la introducción de mapas unidimensionales no invertibles permite encontrar equilibrios malthusianos de corto plazo que no son apreciables en los sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales. Y esto no es, de ninguna manera, un asunto menor, si consideramos que hay una tendencia exclusiva de la teoría tradicional del crecimiento económico a considerar el *principio* de población en horizontes de largo plazo.

Entonces, para resaltar la importancia de las nuevas técnicas de la TSD en el análisis del *principio* procederemos a diferenciar, en dos etapas, los elementos convencionales de los olvidados en el *Ensayo sobre el principio de población* de Malthus (1998). En la primera etapa utilizaremos sistemas dinámicos bidimensionales del tipo Lotka-Volterra para establecer las condiciones del equilibrio de subsistencia en el largo plazo, tal como está consagrado en la teoría tradicional de crecimiento económico (véase, por ejemplo, Blanchet, 1991). En la segunda introduciremos mapas no invertibles para analizar las oscilaciones de corto plazo en torno al equilibrio y, de esa manera, formalizar las ideas ignoradas de Malthus en el segundo capítulo del *Ensayo*. Los resultados son, en cierta manera, novedosos porque, contrario a la percepción tradicional, se muestra que el equilibrio presentado por Malthus no siempre es de dimensión cero y estable sino, en ciertos tramos, fraccionario e inestable. Es decir, se muestra que el estado estacionario de Malthus no es un equilibrio forzoso ni único para ciertos rangos del crecimiento de la población.

III.1. La visión tradicional del equilibrio malthusiano de subsistencia

En la mayor parte de los primeros dos capítulos del *Ensayo*, Malthus describe la carrera entre la producción de alimentos y la cantidad de humanos que hay que alimentar, con base en un arreglo numérico nada proporcional; es decir, mientras la primera crece aritméticamente, la segunda lo hace, en ausencia de controles, geométricamente. Y así cualquier sociedad, agrega el autor, está condenada a vivir en la trampa malthusiana (más abajo explicada). El resultado es inevitable, pues gracias a la acción del *principio*, que actúa como mecanismo regulador de la competencia entre las dos variables, la economía tenderá a crecer forzosamente al nivel de subsistencia. Los frenos preventivos y positivos, más adelante comenta-

dos, asegurarán que las leyes económicas mantengan a la población en el estado estacionario.

Puesto en términos formales, el *principio* puede explicarse, en parte, con ayuda de la ecuación logística de Verhulst:

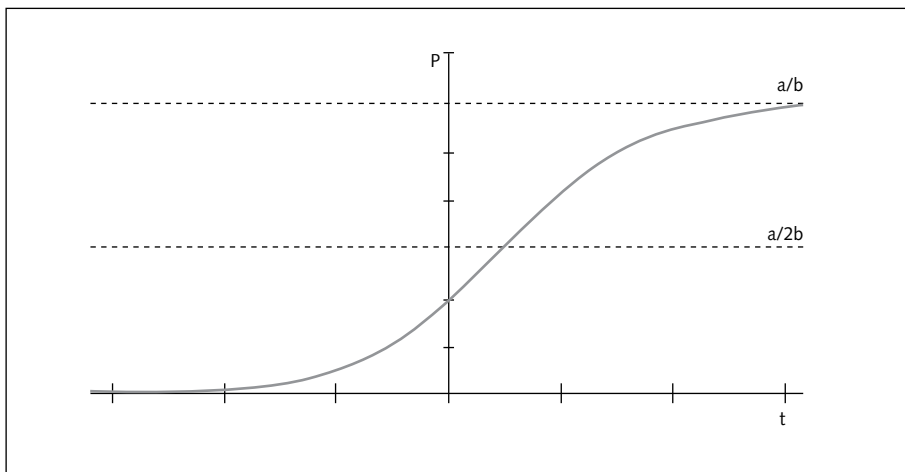
$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP(t)^2 \quad (1)$$

en donde P es la población y a y b son constantes no negativas que representan, respectivamente, las tasas medias de natalidad y mortalidad. De acuerdo con (1), la población crece de manera exponencial según la trayectoria marcada por:

$$P(t) = \frac{aP_0/(a - bP_0)}{[bP_0/(a - bP_0)] + e^{-at}} \quad (2)$$

que es precisamente la solución particular a (1) con $P(0) = P_0$. Los límites al crecimiento de (2) están fijados en la gráfica 3 por $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{a}{b}$ y por $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = 0$ que dan la consabida forma de S a la curva de Verhulst. La constante $a/2b$ es la cota mínima de individuos que garantiza el remplazo de la población. El nivel de esta cota es variable y depende del tipo de especie en consideración.

Gráfica 3. La curva de Verhulst



Fuente: Elaboración propia.

El segundo componente a la derecha de la ecuación (1), $-bP(t)^2$ con $b > 0$, se llama factor de inhibición o de competencia que, en terminología de Malthus, se regula por los frenos positivos –enfermedades, hambrunas y malnutrición– operantes en caso de un exceso relativo de población. Estos frenos se activan al bajar los niveles de subsistencia, y junto con los preventivos –reducción voluntaria de la fecundidad o retraso en la edad del matrimonio– actúan como contrapeso a la “pasión entre los sexos”. El primer componente, $aP(t)$ con $a > 0$, es, por su parte, el factor de expansión de la población que Malthus considera una función positiva de los medios de subsistencia, S , y de los frenos preventivos, así como una función negativa de los frenos positivos. El resultado final de la acción de ambos componentes está determinado por un mecanismo del tipo Lotka-Volterra, representado por el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= r_0 P(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right] \\ \frac{dS}{dt} &= \gamma S \\ P_0 &= S_0 = K \end{aligned} \tag{3}$$

La primera ecuación del sistema (3) no es más que una variante de (1), en la que la población crece a una tasa instantánea $r_0 = a - b$, acotada por K , mientras que la segunda ecuación representa el postulado malthusiano de que S crece a una tasa aritmética γ .²² La pendiente de la curva solución del sistema expresa la razón de cambio de P ante un incremento en S , o dicho de otra manera, indica que el crecimiento exponencial sugerido por Malthus es una función exclusiva de las tasas de mortalidad y natalidad (no hay migración), y éstas a su vez de S . “Population is food controlled”, como correctamente señala Keifitz (1983, p. 3).

El par de soluciones linealmente independientes ($r \neq \gamma$), obtenidas en (4) tras linealizar el sistema (3), dan como resultado la curva de Verhulst con pendiente $\frac{c_2 B e^{(\gamma - r_0)t}}{c_1 A}$ en un tramo de la gráfica 4.²³ En efecto, si $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ y $A \neq 0$, la curva crecerá por encima de K en el intervalo en que $\gamma \geq r_0 \geq 0$. Fue-

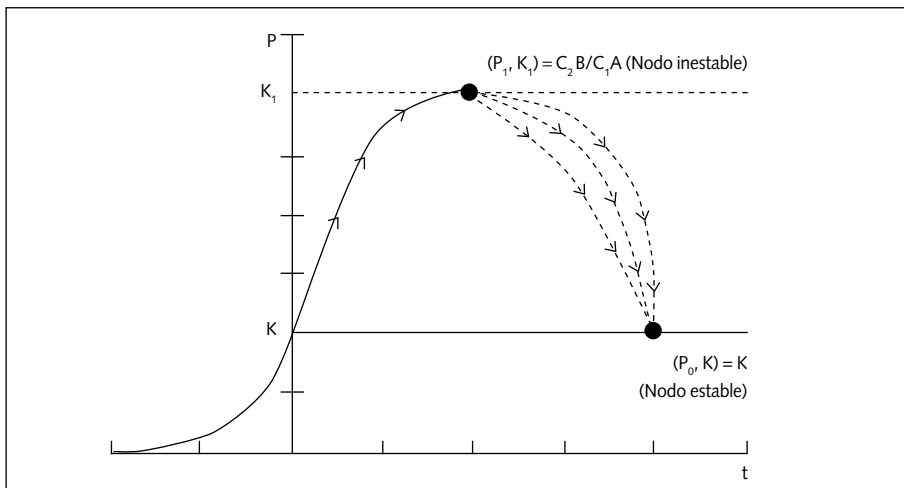
²² En rigor, la tasa de crecimiento de los medios de subsistencia crece en (3) como una recta con ordenada al origen y pendiente igual a γ . Se pueden ensayar otras variantes con ordenadas distintas de cero y valores de S igual a cualquier constante, con resultados similares.

²³ La linealización de (3) es posible debido a que el valor del determinante de los coeficientes es diferente de cero (de hecho es positivo e igual a $r_0 \gamma$), ya que $\lim_{(P,S) \rightarrow (0,0)} \frac{bP^2}{\sqrt{P^2 + S^2}} = 0$.

ra de ese intervalo la curva experimentará un decrecimiento en su segundo tramo que la llevará de regreso hasta K en virtud de que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S}{P} = 0$.

$$\begin{aligned}
 P &= c_1 A e^{r_0 t} \\
 S &= c_2 B e^{\gamma t}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Gráfica 4. Equilibrio malthusiano



Fuente: Elaboración propia.

La nueva curva solución tiene una condición inicial y dos supuestos de comportamiento que regulan su crecimiento. La condición inicial $P_0 = S_0 = K$ significa que hay un estado de desarrollo en el cual el ingreso de la sociedad es apenas suficiente para garantizar el remplazo de una población cerrada (o de crecimiento natural nulo). En la gráfica 4 ese estado está representado por la cota K , en que la tasa de mortalidad es igual a la de la natalidad en el “piso de subsistencia”.²⁴

Los dos supuestos de comportamiento se refieren, a su vez, a los componentes clave del modelo malthusiano (véase Galor y Weil, 2000): la relación positiva entre las subsistencias y el crecimiento de la población²⁵

²⁴ Desde el punto de vista demográfico, una población con estas características corresponde a una población de tipo estacionario, en la que la tasa de mortalidad (b) es igual al recíproco del valor de la esperanza de vida al nacer (e^0): $b = 1/e^0$.

²⁵ Se cumple para $P(t) < K$, pero cuando $P(t) > K$ tenemos $\frac{dP}{dS} = \frac{r_0 P(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right]}{\gamma S} < 0$.

$$\frac{dP}{dS} = \frac{r_0 P(t) \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right]}{\gamma S} > 0 \tag{5}$$

y la existencia de la ley de rendimientos decrecientes

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = r_0 - \frac{2r_0 P(t)}{K} < 0 \tag{6}$$

La manera en que estos supuestos entran en acción es mediante los cambios en S . Para observar esto supongamos, por ejemplo, que por efecto de un mejoramiento técnico en la dotación inicial de tierras, la productividad del trabajo de la sociedad crece a tal grado que el nivel de subsistencia experimenta un desplazamiento de K a K_1 en la gráfica 4. El consecuente incremento en la proporción media de subsistencias inducirá a los habitantes, según las ecuaciones (4), a incrementar su número a una tasa $\frac{c_2 B e^{(\gamma - r_0)t}}{c_1 A}$ hasta el punto en que la población vuelva a ser otra vez completamente elástica respecto al nuevo nivel de subsistencia $K_1 = \frac{c_2 B}{c_1 A}$. En ese intervalo, la mayor influencia de (5) que de (6) garantizará que el componente $aP(t)$ domine al componente $-bP(t)^2$ en la ecuación (1).

La bonanza, dice Malthus, se perpetuará hasta que aparezca la presión de una mayor población sobre la frontera agrícola. Una vez presente la presión, los mecanismos comandados por la ley de rendimientos decrecientes revertirán el círculo virtuoso establecido inicialmente entre el crecimiento del ingreso y el demográfico. Los precios más altos de los alimentos ocasionados por la mayor cantidad de esfuerzo requerido para producir una unidad de producto, aunado a un descenso en el salario de mercado (resultante de una oferta de trabajo incrementada por el crecimiento del periodo precedente), activarán los frenos preventivos y positivos.

Ante una disminución en S la población reducirá drásticamente su crecimiento, no sólo por el mayor número de muertos debido a malnutrición o enfermedades, sino por el deseo voluntario de las familias de retrasar la edad de matrimonio y, por ende, de tener menos hijos. La combinación de (5) y (6) hará que el componente cuadrático de la primera ecuación del sistema (3) se aproxime más rápido a cero que el componente lineal y que, por lo tanto, la caída de r sea más violenta que la de γ en todo el trayecto de regreso al nivel de subsistencia original, K . Con un valor negativo mayor de r que de γ , el valor del exponente de $\frac{c_2 B e^{(\gamma - r_0)t}}{c_1 A}$ será negativo y su límite, a medida que $t \rightarrow \infty$, tenderá a converger a cero.

La diferencia entre la ecuación (1) y el sistema (3) es que, mientras en la versión original de Verhulst no hay posibilidad de regreso al estado es-

tacionario inicial, en el esquema malthusiano cualquier cambio positivo [cuando $P(t) < K$] o negativo [cuando $P(t) > K$] del crecimiento de la población será temporal y asintótico al nivel de K . La explicación formal reside en las peculiares condiciones de estabilidad y convergencia que se presentan en torno a la vecindad del punto crítico (P_0, K) y que no son reproducibles, por ejemplo, en el punto de bifurcación (P_1, K_1) de la gráfica 4. El análisis del polinomio característico del sistema lineal asociado con (3), $\lambda^2 - (r_0 + \gamma)\lambda + r_0 = 0$ revela que aun cuando los eigenvalores en la vecindad de (P_0, K) y (P_1, K_1) son reales y diferentes, en (P_1, K_1) éstos son positivos, lo que significa que en el sistema lineal y no lineal ese punto es un nodo inestable. En cambio, en la vecindad de (P_0, K) los dos eigenvalores son negativos y distintos, lo que garantiza que los sistemas convergerán asintóticamente a ese punto configurando un nodo estable.

La validez de este resultado no se alteraría ni aun con la presencia de progreso técnico exógeno ya que, en este caso, el crecimiento del ingreso sería absorbido en la misma proporción por un contingente adicional de población. El nuevo equilibrio resultante estaría situado a un nivel superior de K pero con la misma pendiente, en una cantidad exactamente igual al valor del parámetro tecnológico que se tome de referencia. A esta situación, en la que el ingreso per cápita no cambia aun con la presencia de un crecimiento tecnológico exógeno, se le conoce como trampa malthusiana (Blanchet, 1991). Para resumir lo anterior podemos decir que en este mundo malthusiano "...sin progreso técnico y rendimientos marginales decrecientes del trabajo con respecto a un factor tierra fijo, la existencia de un estado de equilibrio estacionario, en el cual el consumo se mantiene en el nivel de subsistencia, es inexorable..." (Srinivasan, 1993, p. 470).

III.2. La parte olvidada del Ensayo:

Las oscilaciones en torno al equilibrio malthusiano

La versión continua del modelo demográfico de Malthus arroja un equilibrio de largo plazo que es bien capturado por la solución gráfico-cualitativa del sistema (3). El problema es que ese equilibrio no da cuenta de todas las trayectorias que se presentan cuando se modifican los valores de γ y r_0 en ciertos rangos, y que Malthus considera en la última parte del segundo capítulo del *Ensayo* como oscilaciones.²⁶ Para lograr una interpretación

²⁶ En el capítulo II de su *Ensayo*, Malthus se refiere a las oscilaciones como los movimientos retrógrados y progresivos que experimenta el bienestar de la población alrededor del

más fidedigna de esas oscilaciones es importante realizar un análisis de corto plazo que contemple el espectro de cambios descritos por el autor. El primer paso consiste en adoptar la siguiente versión discreta del sistema (3), con el fin de enfocar la atención sobre las condiciones de crecimiento que garantizan la existencia de diferentes estados de desarrollo, incluyendo el estacionario:

$$P_{t+1} = P_t \left[r_0 + 1 - \frac{r_0 P_t}{K} \right] \quad (3.1'),$$

$$S_{t+1} = [1 + \gamma] S_t \quad (3.2').$$

$$P_0 = S_0 = K$$

Para simplificar el análisis supondremos, como segundo paso, que $K = \Delta S = S_{t+1} - S_t$ en cada punto del tiempo, de tal suerte que el sistema queda reducido a un mapa unidimensional no invertible en el que K crece a la tasa γ ,²⁷ esto es, que $P_{t+1} = P_t \left[r_0 + 1 - \frac{r_0 P_t}{K} \right] = P_t \left[r_0 + 1 - \frac{r_0 P_t}{\Delta S} \right]$.²⁸ La ecuación resultante es muy parecida a la logística $P_{t+1} = r_0 P_t [1 - P_t]$, salvo por el hecho de que mientras esta última depende sólo de r_0 , aquella es una función de K y r_0 . La diferencia es trivial si, como suponemos nosotros, se considera a K fija para ciertos valores de r_0 , ya que en ese caso la ecuación malthusiana podría tratarse como una función parametrizada de la familia logística.²⁹ De no ser así, la incorporación de K modificaría la naturaleza y la estabilidad

“piso de subsistencia”. La duración y amplitud de esas oscilaciones varía en cada sociedad de acuerdo con las condiciones económicas de las diferentes clases sociales, la efectividad de las causas interruptoras del crecimiento de la población (tales como: la introducción o fracaso de ciertas manufacturas, el mayor o menor grado de iniciativa de las empresas agrícolas, los años de abundancia o escasez, las guerras y las epidemias, entre otras) y, en especial, la diferencia entre el precio nominal y el precio real del trabajo. Huelga decir que esas oscilaciones vienen asociadas con diversas tasas de crecimiento de la población.

²⁷ En rigor, $\Delta S = \gamma S_t$, pero como S_t es la cantidad de medios de subsistencia base sobre la que se estima la tasa de crecimiento es común normalizarla o igualarla a 1.

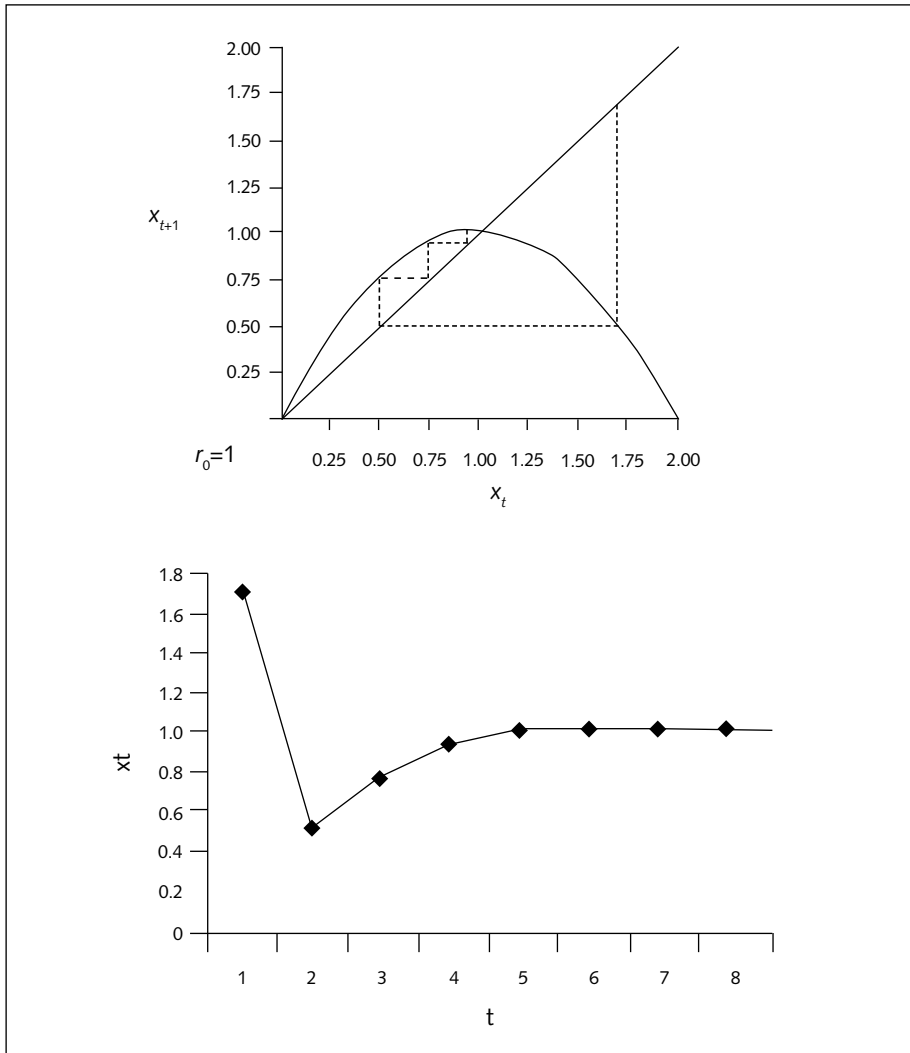
²⁸ El supuesto significa que la población utiliza en cada momento la totalidad de la carga del ecosistema como medio de subsistencia. A diferencia de lo que sucedía con el sistema (3), K no es el “tope” potencial o nivel máximo de los medios de subsistencia, sino su tasa instantánea de crecimiento real. En términos del principio de Malthus, el supuesto implica que la tasa de reproducción de la población está limitada, en cada momento, por la tasa de crecimiento efectiva de la economía (representada por los medios de subsistencia), y que cualquier situación de sobrepoblamiento o subpoblamiento se explica únicamente por las diferencias relativas de ambas tasas.

²⁹ Con este supuesto la ecuación malthusiana se convierte en una ecuación logística, con un dominio de r_0 recortado en una unidad.

de los puntos fijos de la ecuación logística original, y haría el análisis difícil de interpretar en términos del modelo de Malthus.

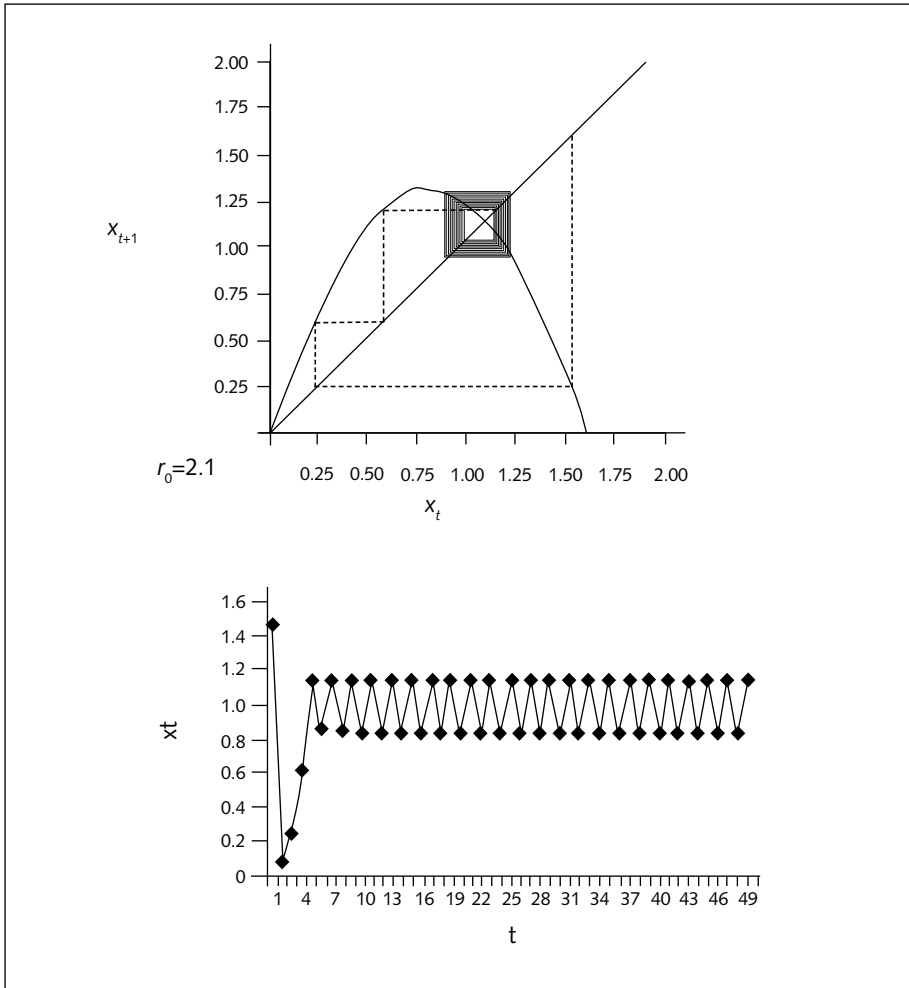
Consideremos ahora, como tercer y último paso, un aumento en la tasa de crecimiento de los medios de subsistencia (con $K=1$ para describir el estado estacionario) y comparemos los resultados haciendo variar r_0 . Lo pri-

Gráfica 5. Patrón de crecimiento de la población cuando $K_1 = 1.7$ y $r_0 = 1$



Fuente: Elaboración propia.

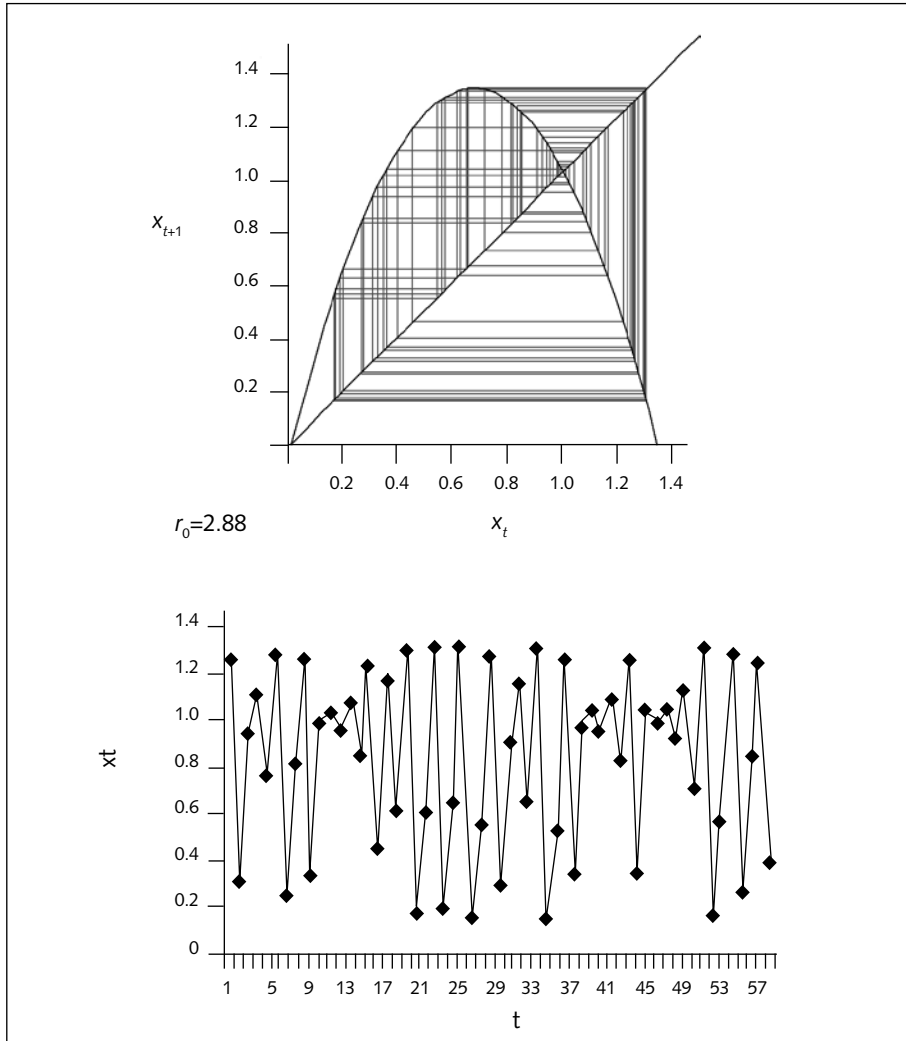
Gráfica 6. Crecimiento de P_t con ciclos de periodos dos ($K_1 = 1.45$ y $r_0 = 2.1$)



Fuente: Elaboración propia.

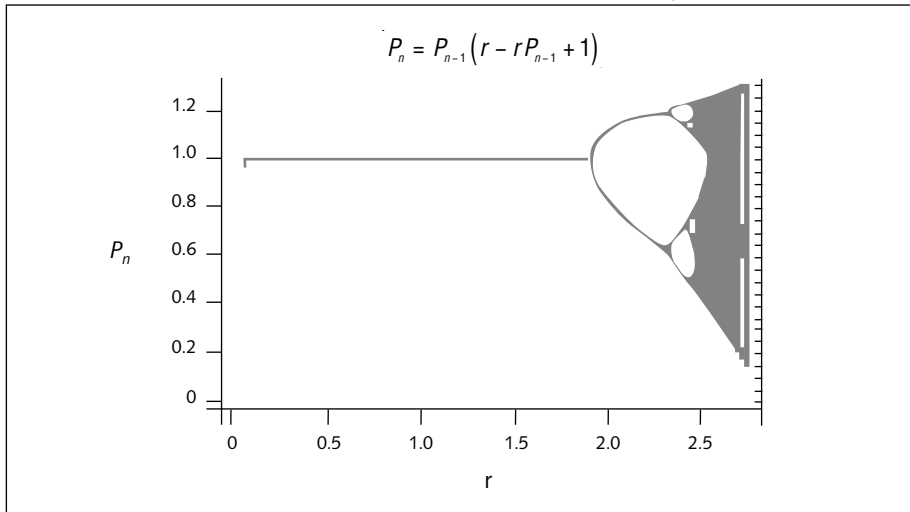
mero que observamos es que la población registra patrones de crecimiento diferentes a los generados por el sistema (3). Para valores de $r_0 < K$ (véase la gráfica 5), la población crece a tal ritmo que en un periodo no mayor a cinco iteraciones absorbe el exceso relativo de medios de subsistencia hasta volver al estado estacionario. Pero cuando $r_0 > K$, las oscilaciones descritas por Malthus surgen de una manera clara a partir de cierto umbral. Las gráfi-

Gráfica 7. Comportamiento caótico de P_t ($K_1 = 1.26$ y $r_0 = 2.88$)



Fuente: Elaboración propia.

cas 6 y 7 muestran que con valores de $r_0 > 2$, la dinámica del crecimiento de la población se vuelve cada vez más compleja a medida que los valores de K disminuyen de 1.7 a 1.45. En ambas situaciones la población pasa de experimentar un crecimiento con ciclos de periodo dos a otro con comportamiento caótico.

Gráfica 8. Diagrama de bifurcación para valores de $r_0 \in [0.05, 2.88]$ 

Fuente: Elaboración propia.

¿Qué significado tienen estos movimientos en el esquema conceptual de Malthus? La respuesta puede aclararse más con la ayuda de un diagrama de bifurcación. De acuerdo con la gráfica 8, la población experimenta diversos patrones de crecimiento dependiendo de los valores de r_0 y K . El primer patrón observable es el estado *estacionario* o la línea horizontal formada por el conjunto de trayectorias que convergen a $K=1$ cuando $K > r_0$ y $r_0 \in (0,2)$. Se trata de la misma solución de largo plazo ofrecida por el sistema (3) una vez que la población ajusta sus expectativas de bienestar (derivadas de un aumento en K) a la creciente presión demográfica.

El equilibrio no es, empero, homogéneo para toda la población, pues debido a la diferente intensidad con que operan los movimientos retrógrados y progresivos en las clases sociales es posible observar crecimientos demográficos diferenciales. La distinta proporción entre el número de adultos y el de matrimonios en cualquier sociedad, la diversidad de tasas de mortalidad infantil entre la gente pobre y rica o las variaciones en el precio efectivo del trabajo entre los asalariados son factores que, según Malthus (1998, p. 17), producen “movimientos de retroceso o avance” en determinados estratos de la población respecto a $K=1$. Los movimientos se expresan en crecimientos múltiples de la población por debajo o por encima del “piso de subsistencia”, y dan lugar a un segundo tipo de patrón

caracterizado por órbitas de periodos dos y cuatro cuando r_0 se incrementa de 2 a 2.449.³⁰

La diferenciación tiene, sin embargo, sus límites, ya que cuando $r_0 > 2.83$ las oscilaciones se vuelven irregulares en torno al estado estacionario. En ese intervalo, “los obstáculos que reprimen la capacidad superior del aumento de la población y mantienen sus efectos al nivel de subsistencia” (Malthus, 1998, p. 19) pierden su efectividad, y la abstención moral, los vicios y la miseria dan lugar a crecimientos con ventanas de periodos tres o caos visible. El efecto contrarrestante de un aumento en la tasa de crecimiento de los medios de subsistencia puede revertir las irregularidades del equilibrio malthusiano, pero sólo momentáneamente. La razón es que, tal como está planteada la ecuación (3.1'), no hay manera de evitar el comportamiento caótico con valores crecientes de r_0 , en particular cuando $r_0 \geq 3$.³¹

En concreto, el diagrama revela tres aspectos importantes del *Ensayo*: primero, que el equilibrio de largo plazo es válido sólo para valores de K ligeramente superiores a r_0 y $r_0 \in (0,2)$; segundo, que las diferencias demográficas por clases sociales producen trayectorias oscilatorias alrededor del “piso de subsistencia” cuando $2 \leq r_0 \leq 2.499$, y tercero, que las oscilaciones pierden regularidad para valores de $r_0 > 2.83$ a tal extremo que degeneran en comportamiento caótico una vez que r_0 es superior a 3 (con cualquier valor de K).

III.3. ¿Qué aspectos del principio revela la introducción de nuevas técnicas de la TSD?

Las dos versiones del modelo malthusiano sugieren que las técnicas de la TSD son complementarias y que, dependiendo de la desagregación requerida en el análisis, algunas son más adecuadas que otras. El uso de mapas no invertibles, por ejemplo, es un mejor instrumento que los sistemas bidi-

³⁰ Mientras que una bifurcación de periodo doble ocurre cuando $r_0 = 2$, en $r_0 = \sqrt{6}$ el periodo se divide en una órbita atractora de cuatro periodos. Para una mayor explicación sobre este punto véase Holmgren (2000). Hay que considerar que las conclusiones dadas por este autor están basadas en la ecuación logística. Sin embargo, si consideramos que el dominio de r_0 en la ecuación malthusiana está recortada en una unidad respecto al de la ecuación logística, entonces es fácil entender estos resultados.

³¹ Cuando $r_0 > 2.83$ la ecuación malthusiana arroja un periodo de órbita tres que produce caos. En un mundo malthusiano, el caos debe entenderse como el conjunto de tendencias impredecibles que experimentan sociedades en las que es imposible fijar el precio del trabajo o en las que su población ha crecido casi al límite de su capacidad alimenticia. En esas sociedades los frenos preventivos y positivos no tienen ningún efecto sobre el control de la población.

mensionales de ecuaciones diferenciales para mostrar un hecho largamente ignorado por la literatura del crecimiento económico, a saber, que el estado estacionario no es un equilibrio único y forzoso a causa de las oscilaciones descritas por Malthus en la última parte del segundo capítulo del *Ensayo*. Los resultados del anterior apartado avalan el hecho de que el estado estacionario es un equilibrio estable y único si, y sólo si, $r_0 \in (0,2)$ y K es ligeramente superior a r_0 . Fuera de ese intervalo los equilibrios pueden ser múltiples e inestables. Pero si queremos hacer abstracción de las oscilaciones, entonces los sistemas bidimensionales pueden ofrecer una mejor perspectiva de la dinámica del *principio* que los mapas unidimensionales, al presentar soluciones analíticas de la interacción entre r_0 y γ (o K) en cada punto del tiempo.

El estudio completo del *principio* requiere ambos tipos de técnicas, porque mientras los sistemas bidimensionales nos dan una idea general de su funcionamiento en el largo plazo, los mapas no invertibles nos alertan de la diversidad de conductas demográficas de la sociedad en el corto plazo. La visión de que el *principio* es un mecanismo que hace converger irremediabilmente a r_0 y K (ya sea a través de la acción de los frenos o de leyes económicas) al estado estacionario es mecánica y simplificadora del pensamiento de Malthus. El segundo capítulo del *Ensayo* contiene suficientes elementos para limitar la validez de ese tipo de razonamientos y mostrar que la acción del *principio* puede producir equilibrios diversos, dependiendo de las condiciones sociales, culturales y demográficas de la población.

IV. Conclusiones

El documento hace hincapié en la notable expansión de conocimiento matemático en la economía a raíz de la extensiva utilización de la TSD en dieciséis de sus subdisciplinas. La expansión ha sido, sin embargo, diferencial, debido, en parte, a la desigual resistencia de los autores para aceptar sistemas de optimización que arrojan únicamente equilibrios de *steady state* y, en parte, a la particular concepción que ellos tienen de la función de la matemática en economía. El resultado en cualquier caso ha sido espectacular, pues casi 25 por ciento de los artículos centrales publicados entre 1990 y 2004 en las cuatro revistas más importantes de economía incluye alguna variante de los análisis dinámicos; es decir, más del doble del porcentaje registrado durante la década de 1980 a 1990 en revistas como *ECO* y *AER*.

La nueva escalada matemática obliga a una comprensión detallada de algunas áreas de la TSD para no quedar al margen de la disciplina, sobre todo por el breve periodo (de 3 a 5 años) que media entre la publicación de un artículo en una revista internacional y su incorporación en los libros de texto. Las consecuencias para la enseñanza de la economía pueden ser funestas si no existe un programa de enseñanza gradual en esas áreas. En particular, porque los requerimientos matemáticos y computacionales que exige la TSD no están limitados a las áreas *naturalmente* dinámicas, sino que abarcan también las caracterizadas por los análisis estáticos.

¿Qué tan pertinente o benéfico es este nuevo giro de la matemática en economía? Las respuestas son diversas e incluso contrarias. Hay quienes aseguran, como Krugman (1998) o Backhouse (1988), que cualquier esfuerzo útil de formalización es necesario para el progreso de la disciplina, y otros, como Chick (1998), que la axiomatización por sí sola es incapaz de explicar el funcionamiento de sistemas complejos cuyo conocimiento es parcial e incierto. La polémica es muy vieja, y con cada oleada de nuevo conocimiento matemático se vuelven a discutir los mismos temas relacionados, por ejemplo, con el tipo de matemática que describe mejor la conducta de los agentes o con la modelación de sistemas económicos abiertos.

Independientemente de la utilidad de esta polémica, hay un tema que siempre es importante tratar por separado, debido a su impacto directo en la enseñanza de la economía. Nos referimos al efecto de la utilización de la TSD sobre el contenido temático de la economía. Y sobre este tema llegamos a las siguientes cuatro conclusiones, que es importante tomar en cuenta en el momento de justificar el aprendizaje de la TSD en las universidades: 1) hay una creciente interrelación de subdisciplinas, como resultado del establecimiento de nuevos equilibrios dinámicos; 2) existen nuevas áreas de conocimiento que se desarrollan precozmente, gracias a la TSD; 3) es más rico y, por ende, complejo el significado dinámico de los equilibrios en las subdisciplinas tradicionalmente caracterizadas por análisis estáticos, y 4) la utilización combinada de técnica de la TSD es esencial para entender los nuevos significados de los equilibrios dinámicos en economía si, y sólo si, no se altera el significado original del concepto económico. La modelación del *principio* de población ilustra este último punto, al mostrar la existencia de equilibrios con atractores no contemplados por la teoría demográfica convencional, a pesar de estar explícitamente analizados por Malthus en el *Ensayo*.

Referencias bibliográficas

- Arrow, K. y M. Intriligator (eds.) (1991), "Historical Introduction", *Handbook of Mathematical Economics*, 1, North Holland, Nueva York, pp. 1-14.
- Backhouse, R. (1998), "If Mathematics is Informal, then Perhaps We Should Accept that Economics Must be Informal Too", *The Economic Journal*, 108, pp. 1848-1858.
- Backus, D. K., P. Kehoe y Kydland (1992), "International Real Business Cycles", *Journal of Political Economy*, 100, pp. 745-775.
- Benhabib, J. y K. Nishimura (1979), "The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth", *Journal of Economic Theory*, 21, pp. 421-444.
- Benhabib, J. y R. Perli (1994), "Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth", *Journal of Economic Theory*, 63, pp. 113-142.
- Bhaskar, V. y E. Damme (2002), "Moral Hazard and Private Monitoring", *Journal of Economic Theory*, 102, pp. 16-39.
- Bhatia, N. y G. P. Szegó (2002), *Stability Theory of Dynamical Systems*, Berlín, Springer-Verlag.
- Binmore, K., M. Piccione y L. Samuelson (1998), "Evolutionary Stability in Alternating-Offers Bargaining Games", *Journal of Economic Theory*, 80, pp. 257-291.
- Blanchet, D. (1991), "Modélisation démo-economique: Conséquences économiques des évolutions démographiques", *Presses Universitaires de France*, París, Institut National d'Études Démographiques.
- Boldrin, M. y A. Rustichini (1994), "Growth and Indeterminacy in Dynamic Models with Externalities", *Econometrica*, 62, pp. 323-342.
- Boldrin, M. y L. Montrucchio (1995), "Acylicity and Dynamic Stability: Generalizations and Applications", *Journal of Economic Theory*, 65, pp. 303-326.
- Boldrin, M. y M. Woodford (1992), "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey", en J. Benhabib (ed.), *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Nueva Jersey, Princeton University Press, pp. 44-63.
- Brav, A., G. M. Constantinides y C. C. Geczy (2002), "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and Limited Participation: Empirical Evidence", *The Journal of Political Economy*, 110, pp. 793-824.
- Brock, W. A. (1988), "Nonlinearity and Complex Dynamics in Economics and Finance", en P. Anderson, K. Arrow y D. Pines (eds.), *The Economy*

- as an Evolving Complex System*, Santa Fe Institute Series in Complexity, 3, Reading, MA, Addison-Wesley, pp. 77-97.
- Brown, D. J. y A. Robinson (1974), "A Limit Theorem on the Cores of Larger Standard Exchange Economies", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the EUA*, 69, pp. 1258-1260.
- Chick, V. (1998), "On Knowing One's Place: The Role of Formalism in Economics", *The Economic Journal*, 108, pp. 1859-1869.
- Davis, J. B., D. W. Hands y U. Maki (eds.) (1998), "Chaos in Economics", en *The Handbook of Economic Methodology*, pp. 59-64.
- Davis, P. J., R. Hersh y E. A. Marchisotto (1995), *The Mathematical Experience*, Boston, Birkhäuser.
- Day, R. H. (1982), "Irregular Growth Cycles", *American Economic Review*, 72, pp. 406-414.
- Debreu, G. (1984), "Economic Theory in the Mathematical Mode", *The American Economic Review*, 74, pp. 267-278.
- (1991), "The Mathematization of Economic Theory", *The American Economic Review*, 81, pp. 1-7.
- Dockner, E. J. y G. Sorger (1996), "Existence and Properties of Equilibria for a Dynamic Game on Productive Assets", *Journal of Economic Theory* 71, pp. 209-227.
- Dockner, E. et al. (2006), *Differential Games in Economics and Management Science*, Nueva York, Cambridge University Press.
- Dow, S. (1998), "Editorial Note", *The Economic Journal*, 108, pp. 1826-1828.
- (1999), "The Use of Mathematics in Economics", artículo presentado en el ESRC *Public Understanding of Mathematics Seminar*, Birmingham, 21 y 22 de mayo.
- Eichberger, J. (1993), *Game Theory for Economists*, San Diego, Academic Press, Inc.
- Evans, G. W. y S. M. S. Honkapohja (1995), "Local Convergence of Recursive Learning to Steady States and Cycles in Stochastic Nonlinear Models", *Econometrica*, 63, pp. 195-206.
- Farmer, J. (1999), "Physicists Attempt to Scale the Ivory Towers of Finance", *Computing in Science and Engineering*, noviembre-diciembre, pp. 26-39.
- Fox, CH. (1987), *An Introduction to the Calculus of Variations*, Oxford, Dover.
- Galor, O. y N. D. Weil (2000), "Population Technology and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond", *The American Economic Review*, 90, pp. 806-828.

- Grandmont, J. (1992), "Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-dimensional Dynamical Systems", en J. Benhabib (ed.), *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Nueva Jersey, Princeton University Press, pp. 44-63.
- Greif, A. (1994), "Cultural Beliefs and the Organization of Society: a Historical and Theoretical Reflection on Collectivist and Individualist Societies", *Journal of Political Economy*, 102, pp. 912-950.
- Holmgren, R. (2000), *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, 2a. ed., Nueva York, Springer-Verlag.
- Howitt, P. (1999), "Steady Endogenous Growth with Population and R & D Inputs Growing", *Journal of Political Economy*, 107, pp. 715-730.
- Inderst, R. (2004), "Contractual Distortions in a Market with Frictions", *Journal of Economic Theory*, 116, pp. 155-176.
- Kailatzidakis, P., T. Mamuneas y T. Stengos (2003), "Rankings of Academic Journals and Institutions in Economics", *Journal of the European Economic Association*, 1, pp. 1346-1366.
- Keifitz, N. (1983), "The Evolution of Malthus' Thought: Malthus as a Demographer", en J. Dupaquier (ed.), *Malthus Past and Present*, Londres, Academic Press.
- Keller, W. (2002), "Geographic Localization of International Technology Diffusion", *The American Economic Review*, 92, pp. 120-142.
- Krugman, P. (1998), "Two Cheers for Formalism", *Economic Journal*, 108, pp. 1829-1836.
- Lagos, R. y R. Wright (2003), "Dynamics, Cycles, and Sunspot Equilibria in 'Genuinely Dynamic, Fundamentally Disaggregative' Models of Money", *Journal of Economic Theory*, 109, pp. 156-171.
- Lucas, JR., R. E. (1990), "Why doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?", *The American Economic Review*, 80, pp. 92-96.
- Malthus, T. R. (1998), *Ensayo sobre el principio de población*, 2a. ed., México, FCE.
- Mirowski, P. (1989), *More Heat than Light*, Nueva York, Cambridge University Press.
- (2002), *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*, Nueva York, Cambridge University Press.
- Mitra, T. (1996), "An Exact Discount Factor Restriction for Period-Three Cycles in Dynamic Optimization Models", *Journal of Economic Theory*, 69, pp. 281-305.
- (1998), "A Sufficient Condition for Topological Chaos with an Application to a Model of Endogenous Growth", *Journal of Economic Theory*, 96, pp. 133-152.

- Mitra, T. y K. Nishimura (2001), "Introduction to Intertemporal Equilibrium Theory: Indeterminacy, Bifurcations and Stability", *Journal of Economic Theory*, 96, pp. 1-12.
- Nishimura, K. y M. Yano (1995), "Nonlinear Dynamics and Chaos in Optimal Growth: An Example", *Econometrica*, 63, pp. 981-1001.
- Noe, T. H. y M. J. Rebello (1994), "The Dynamics of Business Ethics and Economic Activity", *The American Economic Review*, 84, pp. 531-547.
- Noldeke, G. y E. Van Damme (1990), "Signalling in a Dynamic Labour Market", *Review of Economic Studies*, 57, pp. 1-23.
- Ott, E. (2002), *Chaos in Dynamical Systems*, 2a. ed., Cambridge, Cambridge University Press.
- Rappoport, P. y E. White (1994), "The New York Stock Market in the 1920's and 1930's: Did Stock Prices Move Together too Much?", documento de trabajo 4627 del NBER.
- Ritzberger, K. y J. W. Weibull (1995), "Evolutionary Selection in Normal-Form Games", *Econometrica*, 63, pp. 1371-1399.
- Scheinkman, J. A. (1990), "Nonlinearities in economic Dynamics", *The Economic Journal*, 100, No. 400, Conference Papers, pp. 33-48.
- Segerstrom, P. (1991), "Innovation, Imitation and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, 99, pp. 807-827.
- Smale, S. (1998), "Mathematical Problems for the Next Century", *The Mathematical Intelligencer*, 20 (2), pp. 7-15.
- Spence, A. M. (1974), "Competitive and Optimal Responses to Signaling: An Analysis of Efficiency and Distribution", *Journal of Economic Theory*, 8, pp. 296-332.
- Srinivasan, T. N. (1998), "Introduction to Part 3", en H. Chenery y T. N. Srinivasan (eds.), *Handbook of Development Economics 1*, Ámsterdam, Elsevier.
- Stigler, G. J., S. M. Stigler y C. Friedland (1995), "The Journals of Economics", *Journal of Political Economy*, 103, pp. 331-359
- Tornell, A. y A. Velasco (1992), "The Tragedy of the Commons and Economic Growth: Why Does Capital Flow From Poor to Rich Countries?", *Journal of Political Economy*, 100, pp. 1208-1231.
- Tröger, T. (2002), "Why Sunk Costs Matter for Bargaining Outcomes: An Evolutionary Approach", *Journal of Economic Theory*, 102, pp. 375-402.
- Varian, H. (1991), "Dynamical Systems with Application to Economics", en K. Arrow y M. Intriligator (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, 1, Nueva York, North Holland, pp. 93-110.

- Weintraub, R. (1991), *Stabilizing Dynamics: Constructing Economic Knowledge*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (2002), *How Economics Became a Mathematical Science*, Durham, Duke University Press.