Academia, Revista Latinoamericana de Administración, 47, 2011, 112-125

TEORÍA ACTUARIAL EN LA CUANTIFICACIÓN DE LAS PÉRDIDAS POR EXPOSICIÓN A RIESGO DE CRÉDITO: UNA APLICACIÓN AL MERCADO COLOMBIANO*

ACTUARIAL THEORY OF THE LOSSES MEASUREMENT BY EXPOSURE TO CREDIT RISK: AN APPLICATION TO THE COLOMBIAN MARKET

Edinson Caicedo Cerezo
Universidad del Valle, Cali, Colombia
edcaiced@univalle.edu.co

M. Mercè Claramunt Bielsa
Universitat de Barcelona, Barcelona, España
mmclaramunt@ub.edu

Montserrat Casanovas Ramón
Universitat de Barcelona, Barcelona, España
mcasanovas@ub.edu

RESUMEN

En este artículo se presentan los resultados del estudio sobre la medición del valor en riesgo (*VaR*) y el *Tail Var* (*TVaR*) por exposición a riesgo de crédito de una cartera conformada por los montos de deuda financiera (nivel de exposición a incumplimiento) reportados por 25 firmas que pertenecieron al Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC) y que cotizaron en el mercado accionario colombiano en el 2007. El *VaR* y el *TVaR* se estiman mediante el enfoque de distribución de la pérdida total (LDA) a través de los modelos individual y colectivo de riesgo, el enfoque de Basilea II y por simulación utilizando las distribuciones Normal, Normal Power, Gamma, Beta, Bernoulli, Poisson Compuesta y Binomial Negativa Compuesta. Los resultados de la investigación indican que la estimación del *VaR* y del *TVaR* depende del modelo y de la distribución que se emplea para su medición. La estimación del *VaR* obtenida a través del enfoque de Basilea II fue más elevada que las estimaciones del *VaR* y del *TVaR* obtenidas con los otros modelos aplicados en el estudio.

Palabras clave: probabilidades de incumplimiento, modelos de riesgo individual y colectivo, Basilea II, valor en riesgo.

ABSTRACT

This paper presents the results of a study on *VaR* and *TVaR* measurement for credit risk exposure of a credit portfolio comprised of the financial debt (default to exposure) figures reported by 25 firms that belonged to the Colombia Stock Exchange General Index (IGBC) and that traded on the Colombian Stock Market in 2007. The *VaR* and *TVaR* were estimated through Aggregate Loss Distribution Approach (LDA), individual and collective risk models, Basel II approach and simulation using the Normal Distribution, Normal Power, Gamma, Beta, Bernoulli, Poisson Composite and Negative Binomial Composite. The research results indicate that *VaR* and *TVaR* estimations depend on the model and distribution that is used for measurement. The *VaR* estimation through Basel II approach was higher than estimates of *VaR* and *TVaR* obtained with the other models used in the research.

Key words: Default probabilities, individual and collective risk models, Basel II, value at risk.

* Este trabajo forma parte del proyecto de investigación: “Metodología para la medición del riesgo de crédito en empresas no financieras”, que se desarrolla dentro del proyecto ECO2010-22065-C03-03: Modelos actuariales de medición y transferencia del riesgo: riesgo de crédito y riesgo de suscripción, el cual es financiado por el gobierno de España, Ministerio de Ciencia e Innovación, la Universitat de Barcelona, España y la Universidad del Valle, Colombia. Nuestros agradecimientos a las entidades financiadoras del proyecto, a Maite Mármol y Anna Castañer por las observaciones y comentarios realizados a versiones previas de este documento. Todos los errores, comentarios y observaciones son de la absoluta y total responsabilidad de los autores y no comprometen en ningún sentido a las instituciones en las cuales laboran.

1. Introducción

El riesgo de crédito se define como la pérdida potencial que se registra con motivo del incumplimiento de una contraparte en una transacción financiera (o en alguno de los términos y condiciones de la transacción) (De Lara, 2003). También se concibe como un deterioro en la calidad crediticia de la contraparte o en la garantía o colateral pactado originalmente.

La medición del riesgo de crédito incluye la cuantificación de: 1) los montos de exposición al incumplimiento, 2) las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación si se llega a presentar el incumplimiento y 3) las pérdidas por exposición a riesgo de crédito.

Los montos de exposición a incumplimiento para una empresa financiera inicialmente se pueden observar por medio de su cartera de créditos, y para una empresa no financiera mediante sus cuentas por cobrar a clientes.

Para las estimaciones de las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación dado el incumplimiento, en la literatura financiera se proponen los modelos estructurales y modelos de forma reducida (Jackson, Nickell y Perraudin, 1999; Márquez, 2006). Los modelos estructurales incluyen el modelo de Merton (1974) y Geske (1977), y entre los modelos de forma reducida están los que se basan en modelos logit, probit y lineales de probabilidad (Greene, 2000; Gujarati, 2003); en simulación (Dunkel y Weber, 2007; Ramaswamy, 2005); en redes neuronales artificiales (Atiya, 2001) y en metodología borrosa (Wei, 2008; Zhu y Chiu, 2007).

Para la cuantificación de las pérdidas por exposición a riesgo de crédito en la literatura financiera también se proponen modelos estructurales y modelos de forma reducida. Entre los modelos estructurales de amplia difusión en la literatura financiera se encuentran el modelo CreditMetrics de JP Morgan (1997) y el modelo CreditPortafolioManager de KMV Moody´s (Crouhy, Galai y Mark, 2000). Entre los modelos de forma reducida de amplia divulgación se encuentra el modelo CreditPortafolioView de McKinsey (Wehrspohn, 2002).

Dos modelos importantes, que no se clasifican en las dos categorías anteriores y también son considerados como estándares en la cuantificación de las pérdidas por exposición a riesgo de crédito son el enfoque de Basilea II (Basilea, 2004) y el modelo CreditRisk+ de Credit Suisse Fiancial Products (Crouhy *et al*., 2000).

Dada la importancia que tiene el crédito dentro de las actividades comerciales que realizan empresas del sector financiero y no financiero con sus clientes, es de vital relevancia encontrar respuesta a la pregunta: ¿cuál es el monto de las pérdidas por exposición al riesgo de crédito en que podría incurrir una compañía al realizar su actividad comercial?

Partiendo de las estimaciones realizadas por Caicedo, Claramunt y Casanovas (2011) de los montos por exposición a incumplimiento, las probabilidades neutral de incumplimientos y las tasas de recuperación dado el incumplimiento, para un grupo de 25 empresas que cotizaron en la Bolsa de Valores de Colombia en el año 2007, este documento tiene como objetivo cuantificar el valor en riesgo (*VaR*) y el *Tail VaR* (*TVaR*) por exposición a riesgo de crédito de dichas empresas mediante la aplicación de conceptos de la teoría actuarial.

Específicamente en este documento se estiman el *VaR* y el *TVaR* mediante el enfoque de distribución de la pérdida total (LDA) a través de los modelos individual y colectivo de riesgo, el enfoque de Basilea II, y por simulación utilizando las distribuciones Normal, Normal Power, Gamma, Beta, Bernoulli, Poisson Compuesta y Binomial Negativa Compuesta.

Las motivaciones que orientan la realización de esta investigación son tres principalmente: primera, entre los trabajos que aplican la teoría actuarial para la medición del riesgo de crédito se puede mencionar el modelo CreditRisk+ de Credit Suisse Financial Products (Carreras, 2006; Chen y Panjer, 2009; Wehrspohn, 2002). A pesar de la gran relevancia que ha tenido la aplicación de la teoría actuarial en empresas del sector de los seguros, su extensión para la medición del riesgo de crédito en empresas del sector financiero y no financiero es relativamente escasa. Este documento pretende contribuir a generar información en ese sentido.

Segunda, la aplicación de la teoría actuarial requiere que tratemos el conjunto de las cuentas por cobrar a clientes de una compañía del sector real o la cartera de créditos dados a los clientes de una entidad de crédito, como una cartera de seguros en la cual se conoce el número de elementos que la componen, los montos de las exposiciones por cada elemento, las probabilidades de incumplimiento de cada elemento y las tasas de recuperación si se llega a presentar el incumplimiento. Uno de los objetivos de la gestión del riesgo y por tanto del riesgo de crédito es que las empresas puedan conocer los niveles de exposición al riesgo y que puedan tomar medidas para minimizar las pérdidas por exposición a dicho riesgo. La complementariedad que se podría obtener de aplicar la teoría financiera tradicional y la teoría actuarial, pensamos que es de gran relevancia para alcanzar dicho objetivo de la gestión de riesgos.

Tercera, la crisis financiera que se reveló en el 2007 y que se profundizó en los años 2008 y 2009, ratifica una vez más y ha dejado de manifiesto que la gestión del riesgo de crédito, específicamente su medición, es un tema de vital importancia para reguladores, directores de empresas e inversionistas, por los efectos sistemáticos que dicho riesgo puede ocasionar (Soros, Simons, Paulson, Griffin y Falcone, 2008).

A fin de cumplir con el objetivo de esta investigación, el documento se ha organizado en seis secciones. La primera sección corresponde a la presente introducción; en la segunda sección se presentan conceptos de la teoría actuarial y del enfoque de Basilea II. En la tercera sección se presentan los datos empleados en el estudio y en la cuarta los resultados de la investigación. Finalmente, en la quinta se da a conocer las conclusiones.

2. Teoría actuarial y el enfoque de Basilea II en la estimación de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito

Supongamos que existe una empresa que otorga créditos a cada cliente i y que la empresa tiene un total de n clientes. El cliente podría cumplir o incumplir con el pago del monto dado en crédito, por tanto, el monto del crédito otorgado al cliente $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, representa el nivel de exposición al incumplimiento, el cual denominaremos como EAD_i.

Consideremos que la probabilidad de que un cliente i incumpla con el pago del crédito es q_i y que si el incumplimiento ocurre la empresa podría recuperar parcial o totalmente el monto del crédito; luego la tasa de recuperación dado el incumplimiento del crédito otorgado al cliente i, se simbolizará como δ_i.

Dos enfoques pueden aplicarse para la estimación de la pérdida total de la cartera de n créditos. El primer enfoque aplica conceptos de la teoría actuarial, específicamente los planteamientos que se hacen del modelo individual, de la aproximación del colectivo al modelo individual de riesgo y la simulación donde se considera que los elementos que conforman la cartera de créditos son independientes (Dickson, 2005; Kaas, Goovaerts, Dhaene y Denuit, 2008; Klugman, Panjer y Willmot, 1998). El segundo enfoque, el de Basilea II (Basilea, 2004), plantea estimar los requerimientos de capital y los activos ponderados por nivel de riesgo crédito asumiendo un nivel de dependencia entre los elementos que conforman la cartera de créditos.

En ambos enfoques el concepto de valor en riesgo, *VaR*, (Kaas *et al*., 2008; McNeil, Frey y Embrechts, 2005) es empleado como una estimación de la pérdida máxima que podría tener una empresa para un nivel de confianza especificado.

2.1. Enfoque de la teoría actuarial

Sin pérdida de la generalidad de los planteamientos que hacen distintos autores (véanse Dickson, 2005; Kaas *et al*., 2008; Klugman *et al*., 1998) en la presentación de los conceptos sobre los modelos individual y colectivo de riesgo y sobre los procesos de simulación para la aplicación de dichos modelos, en este documento consideramos que un determinado crédito a un cliente i, está caracterizado por su nivel de exposición al incumplimiento EAD_i, la probabilidad de incumplimiento del cliente q_i y la tasa de recuperación dado el incumplimiento del crédito δ_i. Por tanto, la pérdida por exposición a incumplimiento del cliente se representa a través de la variable aleatoria (v.a.) X_i,

$$X_i \begin{cases} B_i = EAD_i \bullet (1-\delta_i) & \text{con probabilidad } q_i \\ 0 & \text{con probabilidad } (1-q_i) = p_i \end{cases} \quad (1)$$

La pérdida dado el incumplimiento del cliente i, B_i, puede ser una constante o una variable aleatoria según δ_i sea un valor cierto o una variable aleatoria respectivamente.

2.1.1. El modelo individual de riesgo

En el modelo individual se supone que una entidad posee una cartera conformada por n créditos y que para todos se conocen los niveles por exposición a incumplimiento, las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación dado el incumplimiento. El interés en este modelo es conocer las características de las pérdidas agregadas por incumplimiento que puede afrontar la entidad bajo el supuesto de que en un horizonte de tiempo de un período, por ejemplo un año, un elemento en la cartera de crédito solo incumple una vez y el número de elementos en la cartera de créditos se mantiene constante durante el período.

Pérdida total en una cartera

Sea S la v.a. que representa la pérdida total por exposición a riesgo de crédito de una cartera conformada por n créditos con pérdidas X_i, i = 1, 2, 3, …, n; S viene dada por:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (2)$$

Para la estimación de la esperanza, la varianza y asimetría de S se hacen dos supuestos: 1) que las X_i son independientes e idénticamente distribuidas (iid); es decir, que la correlación entre X_i y X_j es cero, para $\forall_{i \neq j}$, y que $X_i = X$, $q_i = q$, con i = 1, 2, 3, …, n; 2) las X_i son independientes, pero no están idénticamente distribuidas, es decir, que pueden ser distintas entre un elemento y otro.

Analizando este último caso por ser el más general, tenemos que:

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i],\ \ V[S] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] \text{ y}$$

$$As[S] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_3(X_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} V[X_i]\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Teniendo en cuenta (1), podemos explicitar dos posibilidades para B_i:

- El *ratio* de pérdida por incumplimiento es cierto y común para todos los elementos en la cartera $\delta_i = \delta$. En este caso $B_i = EAD_i \bullet (1 - \delta)$ son variables ciertas, siendo $V[B_i] = 0$ y $\alpha_j(B_i) = B_i^j$.
- El *ratio* de recuperación δ_i es una v.a. que sigue una distribución Beta, $\delta_i \sim B(a, b)$. En este caso, $B_i = EAD_i \bullet (1 - \delta_i)$ sigue también una distribución Beta pero de rango (0, EAD_i); es decir, $B_i \sim B(a^* = b,\ b^* = a,\ 0,\ EAD_i)$ siendo $a = E[\delta_i] \bullet \left(\frac{E[\delta_i] \bullet (1-E[\delta_i])}{V[\delta_i]} - 1\right)$ y $b = \frac{1-E[\delta_i]}{E[\delta_i]} \bullet a$. Las distintas medidas de B_i son entonces:

$$E[B_i] = \frac{a^*}{a^* + b^*} \bullet EAD_i,$$

$$V[B_i] = \frac{a^* b^*}{(a^* + b^*)^2 (a^* + b^* + 1)} \bullet EAD_i^2$$

$$\text{y } As[B_i] = \frac{2(b^* - a^*)}{(a^* + b^* + 2)} \bullet \sqrt{\frac{a^* + b^* + 1}{a^* b^*}}.$$

Estimación del VaR_s y el $TVaR_s$

Para obtener el VaR_s y el $TVaR_s$ se consideran los supuestos de distribución Normal, distribución Normal Power y por simulación.

Distribución Normal. Si $S \sim N(E[S], V[S])$, entonces (Klugman *et al*., 1988; McNeil *et al*., 2005):

$$VaR_s(\alpha) = z_\alpha \bullet \sqrt{V[S]} + E[S],$$

$$TVaR_s(\alpha) = \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \bullet \sqrt{V[S]} + E[S],$$

donde z_α y $\phi(\cdot)$ son el cuantil y la densidad de la distribución normal Estándar, para el nivel de confianza α respectivamente.

Distribución Normal Power. Utilizando una aproximación a Normal Power (Asmussen y Albrecher, 2010; Beard, Pentantikäinen y Pesonen, 1984; Daykin, Pentantikäinen y Pesonen, 1994) con el fin de corregir por asimetría se tiene:

$$VaR_s(\alpha) = \left[\left(z_\alpha + \frac{\gamma_1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\right) \bullet \sqrt{V[S]}\right] + E[S],$$

$$TVaR_s(\alpha)=\left[\frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha}\bullet\left(1+z_\alpha\cdot\frac{\gamma_1}{6}\right)\bullet\sqrt{V[S]}\right]+E[S],$$

donde γ_1 es el coeficiente de asimetría de S.

Simulación. La estimación de la función de distribución de S se realiza mediante los siguientes pasos:

1) Se generan números aleatorios para $X_i=B_i.I_i$, i = 1, 2, …, n asumiendo que $I_i \sim Bernoulli(q_i)$.
2) Se suman los valores de X_i, i = 1, 2, 3, …, n obteniendo una observación para S que denotaremos como S_j.
3) Se repiten k veces los pasos 1) y 2), con lo cual obtenemos k valores simulados para S, S_j, j = 1, 2, …, k.
4) Con los valores S_j, j = 1, 2, …, k, se construye la distribución empírica S como una estimación de la función de distribución de S.

El VaR_s y el $TVaR_s$ se calculan con las siguientes expresiones:

$$VaR_s(\alpha)=\inf\ \{s\,|\,P[S\le s]\ge\alpha\},\qquad(3)$$

$$TVaR_s(\alpha)=VaR_s(\alpha)+\frac{1}{1-\alpha}\bullet E\big[(S-VaR_s(\alpha))_+\big].\qquad(4)$$

2.1.2. El modelo colectivo de riesgo

En la aproximación del modelo colectivo al modelo individual se considera que X_i puede escribirse de la forma:

$$X_i=\sum_{j=1}^{N_i}B_{ij}$$

donde N_i es una variable aleatoria con su función de distribución conocida que representa el número de incumplimientos; es decir, N_i, toma valores 0, 1, 2, 3,... y $B_{ij}=EAD_i\bullet(1-\delta_i)$ es la pérdida dado el incumplimiento $j-ésimo$ del cliente i, la cual puede ser una constante o una variable aleatoria en caso que δ_i sea un valor cierto o una variable aleatoria respectivamente.

Las hipótesis usuales son: 1) N_i y B_{ij} son independientes, 2) B_{ij} son independientes y están idénticamente distribuidas.

La pérdida total de una cartera formada por n créditos con niveles de pérdidas X_i, i = 1, 2, 3, …, n, S, es $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

De cumplirse las hipótesis anteriores respecto N_i y B_{ij}, se dice que X_i tiene una distribución compuesta y que, si las X_i son independientes entre sí, la distribución S, también es compuesta. En la literatura actuarial dos tipos de distribución importantes se consideran para N_i: la distribución de Poisson y la distribución Binomial Negativa.

En la sección A.2 del apéndice se resumen las características de la pérdida total cuando se utilizan la distribución de Poisson y la distribución Binomial Negativa para el número de incumplimientos. También se presenta el método de recurrencia de Panjer utilizado para estimar la función de distribución de la pérdida total.

Considerando la distribución de S estimada mediante el método recursivo de Panjer, el VaR_s y el $TVaR_s$ se calculan mediante las expresiones (3) y (4).

2.2. Enfoque de Basilea II

En el enfoque de Basilea II (Basilea, 2004), la pérdida total esperada por exposición a riesgo de crédito está relacionada con la determinación del requerimiento de capital (K) y con la determinación de los activos ponderados por nivel de riesgo (RWA) que debería disponer una entidad financiera para afrontar dicho riesgo. Específicamente, K y RWA son:

$$K=\left[LGD\bullet\Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD)}{(1-R)^{0,5}}+\left(\frac{R}{1-R}\right)^{0,5}\Phi^{-1}(0,999)\right]-PD\bullet LGD\right]\left[\frac{1+(T-2,5)b}{1-1,5b}\right],$$

$$RWA=12,5\bullet K\bullet EAD,$$

donde: LGD es la pérdida dado el incumplimiento, PD es la probabilidad de incumplimiento, $PD=q_i$. EAD es la exposición al incumplimiento (valor de la deuda), T es el vencimiento de la deuda en años y toma el valor de 1, R es el coeficiente de correlación del elemento de la cartera con los otros elementos y viene dado por:

$$R=\begin{cases}0{,}12\left[\dfrac{1-Exp[-50PD]}{1-Exp[-50]}\right]+0{,}24\left[1-\dfrac{1-Exp[-50PD]}{1-Exp[-50]}\right]-[0{,}004] & \text{si } V_e\le 5\\ 0{,}12\left[\dfrac{1-Exp[-50PD]}{1-Exp[-50]}\right]+0{,}24\left[1-\dfrac{1-Exp[-50PD]}{1-Exp[-50]}\right]-[0{,}004\left(1-\dfrac{V_e-5}{45}\right)] & \text{si } 5<V_e<50\\ 0{,}12\left[\dfrac{1-Exp[-50PD]}{1-Exp[-50]}\right]+0{,}24\left[1-\dfrac{1-Exp[-50PD]}{1-Exp[-50]}\right] & \text{si } V_e\ge 50\end{cases}$$

donde *Ve* es el nivel de las ventas del grupo del cual la empresa forma parte y *b* es el ajuste por vencimiento de la deuda, $b = [0{,}11852 - 0{,}05478 \ln (PD)]^2$.

En el enfoque de Basilea II, se supone que los elementos de la cartera de créditos no son independientes y el grado de dependencia está determinado por el coeficiente de correlación *R*.

3. Los datos

El estudio incluye 25 empresas que cotizaron en el mercado colombiano durante el 2007. En el cuadro 1 se presenta la distribución de las empresas por sectores económicos.

CUADRO 1. Distribución del número de empresas por sectores.

Sector económico	2007	
	Número de empresas	% empresas
Bienes de consumo	1	4
Materiales básicos/industria/ construcción	11	44
Petróleo y energía	3	12
Servicios financieros e inmobiliarios	5	20
Servicios de consumo	5	20
Total	25	100

Fuente: Caicedo *et al.*, 2011.

Las estimaciones de las exposiciones a incumplimiento, las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación dado el incumplimiento de cada empresa fueron calculadas en Caicedo *et al.* (2011) y se presentan en el cuadro 2. Las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación fueron obtenidas a través del modelo estructural de Merton (1974) que plantea que un préstamo a una compañía se puede describir a través del perfil de una *call* (opción de compra) tipo europea, donde el emisor es el prestamista y el comprador son los accionistas de la compañía; el valor de la *call* representa el valor de capital propio y tiene como subyacente el valor de los activos de la firma y precio de ejercicio el monto de la deuda financiera de la compañía.

A partir de los datos del cuadro 2, se calculan las estadísticas básicas de cada una de las tres variables mencionadas de acuerdo con los sectores a que pertenecían las empresas (*véase* cuadro 3). Los sectores se han ordenado de manera descendente según la probabilidad neutral de incumplimiento.

Las probabilidades neutrales de incumplimiento más altas se presentan en su orden en las empresas del sector de servicios de consumo seguidas de las del sector de servicios financieros e inmobiliario y luego las del sector de materiales básicos industria y construcción. Sin embargo, Caicedo *et al.* (2011) mencionan que mediante la aplicación del test de Kruskal-Wallis[1] y al 1% de significación estadística, no se puede rechazar la hipótesis de que no hubo diferencias estadísticas significativas en el 2007 entre las probabilidades neutrales de incumplimiento de las empresas agrupadas por sectores según la clasificación del mercado de valores colombiano.

Con la información de los cuadros 2 y 3 se calcula la pérdida total por exposición a riesgo de crédito aplicando los modelos que se mencionan en la sección 2 de este documento. Los resultados se presentan en la sección 4.

1 Chi-Cuadrado calculado equivalente a 3,80, 4 grados de libertad y valor *p* de 0,4343.

CUADRO 2. Estadísticas básicas de las probabilidades de incumplimiento y tasas de recuperación (por empresas colombianas, año 2007).

Empresa	Valor en libros deuda (en miles de €)	Probabilidad neutral de incumplimiento (vd)	Tasa de recuperación (neutral)
	Promedio	**Promedio**	**Promedio**
Acerías	53.408	0,0004033367%	91,19%
Cartón Colombia	122.849	0,0000000001%	97,35%
Cementos Argos	523.660	0,0000000000%	97,77%
Chocolates	25.338	0,0000000000%	99,19%
Colinver	22.734	0,0000000000%	98,10%
Coltejer	153.947	2,0730602712%	97,50%
Corferias	2.921	0,0000000000%	98,61%
Ecopetrol	3.152.076	0,0023741175%	89,15%
ENKA	27.024	0,3488936738%	88,38%
ETB	82.485.258	0,3076913973%	99,88%
Éxito	415.986	0,0000006827%	95,43%
Fabricato	91.537	0,0471056253%	94,34%
Gas Natural	37.682	0,0000000000%	96,68%
Generar	12.163	6,1410109791%	84,44%
Imusa	10.810	0,0000000000%	99,14%
Inversiones Argos	25.408	0,0000000000%	98,37%
Isagén	189.327.153	0,0051231837%	99,93%
Marly	5.157	0,0000000000%	98,70%
Mineros	8.884	0,0000000000%	95,36%
Odinsa	975	0,0000000000%	97,91%
Promigás	149.101	0,0000000000%	96,14%
Sociedad Bolívar	82.550	0,0000000000%	97,51%
Tablemac	6.517	0,0000006462%	92,78%
Valindustria	2.184	1,3625416373%	69,55%
Valorem	48.863	0,0000003367%	93,95%

Fuente: Caicedo *et al.*, 2011.

CUADRO 3. Estadísticas básicas de las probabilidades de incumplimiento y tasas de recuperación por sector año 2007.

Sector económico	Valor en libros deuda (en miles de €)		Probabilidad neutral de incumplimiento		Tasa de recuperación (neutral)	
	Promedio	**Desviación**	**Promedio**	**Desviación**	**Promedio**	**Desviación**
Servicios de consumo	41.405	61.771	1,228%	2,746%	94,91%	5,97%
Servicios financieros e inmobiliarios	36.334	30.680	0,273%	0,609%	91,66%	12,51%
Materiales básicos/industria/construcción	93.184	151.770	0,224%	0,622%	95,46%	3,43%
Petróleo y energía	91.654.829	93.425.642	0,105%	0,175%	96,32%	6,21%
Bienes de consumo	415.986	-	0,000%	--	95,43%	--
Total	11.071.767	40.617.349	0,412%	1,289%	94,69%	6,53%

Fuente: Caicedo *et al.*, 2011.

4. Resultados y discusión

4.1. Estimación de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito

En esta sección se supone que se tiene una cartera de créditos conformada con los montos de las deudas financieras de cada una de las 25 empresas incluidas en el estudio en el año 2007 y que las probabilidades neutrales de incumplimiento y las tasas de recuperación dado el incumplimiento son como se presentaron en el cuadro 2. Por ejemplo, en esta situación podría estar una empresa del sector financiero u otro tipo de empresa que de alguna manera puede estimar la información específica para cada cliente con relación a las tres variables mencionadas.

Es importante estimar la pérdida total por exposición a riesgo de crédito como un indicador de las provisiones o de los requerimientos de capital necesarios para hacer frente a los eventuales incumplimientos en caso de que llegaran a suceder.

En el estimativo de los montos de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito se aplican los modelos mencionados en la sección dos, es decir, se aplican los modelos individual (con la aproximación normal y por simulación) y colectivo de riesgo considerando el caso en que $\lambda_i = q_i$ y el enfoque de Basilea II. En los modelos individual y colectivo de riesgo se asume que el incumplimiento de un elemento en la cartera de créditos no está relacionado con el incumplimiento de los otros elementos que la conforman (independencia), a diferencia del modelo de Basilea II, donde se asume dependencia entre los incumplimientos de los elementos que conforman la cartera de créditos. Respecto a la de la v.a. pérdida total se calcula en cada caso su esperanza ($E[S]$), su varianza ($V[S]$)y desviación estándar ($Des[S]$), la asimetría ($As[S]$) y también el valor en riesgo ($VaR_s(\alpha)$) y el *Tail VaR* ($TVaR_s(\alpha)$) (*véase* cuadro 4).

Los resultados del modelo colectivo solo se presentan suponiendo la distribución Poisson compuesta ya que los obtenidos con la distribución Binomial Negativa Compuesta fueron muy similares.

En el cuadro 4 se observa que el *VaR* y el *TVaR* de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito dependen tanto del enfoque que se utilice como de la asunción de dependencia o no dependencia entre los elementos de la cartera de créditos.

Específicamente, la estimación del *VaR* obtenida a través del enfoque de Basilea II fue más elevada que las estimaciones del *VaR* y del *TVaR* obtenidas en los otros métodos. Cuando se asume independencia en el incumplimiento entre los elementos que conforman la cartera de créditos, las estimaciones para el *VaR* y el *TVaR* son más elevadas en el modelo colectivo que en el modelo individual (tanto con la aproximación Normal como por simulación).

CUADRO 4. Indicadores de la pérdida total (en millones de euros) por exposición a riesgo de crédito mercado colombiano. Exposición al incumplimiento, probabilidad de incumplimiento y tasa de recuperación específicas para cada compañía[a].

Modelo	Distribución	E[S]	V[S]	Des[S]	As[S]	VaRs[99,9%]	TVaRs[99,9%]
Modelo individual de riesgo	Normal	0,540	34,60	5,88	19,987	19	20
Modelo colectivo de riesgo	Empírica obtenida mediante el algoritmo de Panjer Poisson compuesta	0,539	34,62	5,88	…	100	108
Enfoque de Basilea II (Basilea, 2004)	Normal	…	…	…	…	119	
Simulación del modelo individual	Empírica obtenida mediante Bernoulli	0,838	60,93	7,81	…	102	104

[a] Nivel de confianza del 99,9% (año 2007).

Fuente: elaboración propia mediante R y Excel.

4.2. Extensión de los resultados de la investigación a empresas no financieras que no cotizan en Bolsa

En este apartado se propone la extensión de los resultados obtenidos hasta ahora en la cuantificación del riesgo de crédito en empresas no financieras. Generalmente, las empresas cuentan con información de los créditos que han otorgado a sus clientes pero no disponen de información sobre las probabilidades de incumplimiento de los mismos ni de las tasas de recuperación dado que han incumplido.

Si asumimos que el mercado da información de los promedios de las probabilidades de incumplimiento y de las tasas de recuperación dado el incumplimiento sobre los créditos que obtienen las empresas, entonces una empresa podría utilizar esa información del mercado y cuantificar, a través de algunos de los métodos mencionados en la sección 2, las pérdidas por exposición a riesgo de crédito.

Por ejemplo, de los resultados del estudio se estimó que en 2007, en promedio, la probabilidad neutral de incumplimiento y la tasa de recuperación dado el incumplimiento fueron el 0,4115% y del 94,69%, respectivamente. Ahora, supongamos una cartera de créditos con montos equivalentes a los niveles de deuda de las 25 compañías que se presentan en el cuadro 2. Supongamos además, que en el mercado se estima que las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación son en promedio del 0,4115% y del 94,69% respectivamente, entonces ¿cuál sería el monto de las pérdidas por exposición a riesgo de crédito que se estimarían para la cartera de créditos?

Como respuesta a la anterior pregunta, en el cuadro 5 se presentan los resultados de las estimaciones de la pérdida total de una cartera de créditos suponiendo que las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación son del 0,4115% y del 94,69% respectivamente, iguales para todos los elementos que conforman la cartera.

Como se puede observar del cuadro 5, con el modelo individual se estima que la pérdida total esperada de la cartera de créditos sería de 60,48 millones de euros (M€) con desviación de 702M€. Si se considera que dicha pérdida total se distribuye Normal, se podría afirmar con un 99,9% de confianza que las pérdidas totales no superarán los 2,230M€ (*véase* cuadro 5) y que, en caso de superarlas, la pérdida media sería de 2,424M€.

En el modelo colectivo de riesgo, se podría afirmar con un 99,9% de confianza que las pérdidas totales del portafolio no superarían los 10,054M€ y que, si se supera dicho importe, la pérdida media ascendería a 10,212M€ (Poisson Compuesta) o a 10,302M€ (Binomial Negativa Compuesta).

CUADRO 5. Indicadores de la pérdida total (en millones de euros) por exposición a riesgo de crédito en el mercado colombiano. Exposición al incumplimiento específico para cada compañía[a].

Modelo	Distribución	E[S]	V[S]	Des[S]	As[S]	VaRs[99,9%]	TVaRs[99,9%]
Modelo individual de riesgo	Normal	60,48	492.923	702	12,92	2,230	2,424
Modelo colectivo de riesgo	Empírica obtenida mediante el algoritmo de Panjer Poisson compuesta	60,35	494.770,20	703,40	…	10,054	10,212
	Empírica obtenida mediante el algoritmo de Panjer binomial negativa	60,34	496.745,50	704,80	…	10,054	10,302
Enfoque de Basilea II (Basilea, 2004)	Normal	…	…	…	…	15,285	
Simulación del modelo individual	Empírica obtenida mediante Bernoulli	62,82	496.805,20	704,84	…	10,053	10,053

[a] Probabilidad neutral de incumplimiento promedio empresa 0,4115% y tasa de recuperación promedio empresa 94,69%. Nivel de confianza del 99,9%, año 2007.

Fuente: elaboración propia mediante R y Excel.

Con el enfoque de Basilea II se puede afirmar con un 99,9% de confianza que las pérdidas totales no superarán los 15,285M€ (*véase* cuadro 5).

Según el enfoque de simulación se podría afirmar con un 99,9% de confianza que las pérdidas totales en el portafolio de créditos no superarían los 10,053M€ (*véase* cuadro 5).

El procedimiento que se ha seguido en esta sección podría ser usado por cualquier empresa que desee darle el tratamiento a las cuentas por cobrar a sus clientes como si fuera una cartera de créditos, como aquí se ha supuesto. Seguramente, la empresa tendrá la información de los montos de los créditos, es decir, de los montos de las cuentas por cobrar a cada cliente, pero podría no tener la información de las probabilidades de incumplimiento ni de las tasas de recuperación dado el incumplimiento de sus clientes.

La empresa debe tener en cuenta que, tanto las probabilidades de incumplimiento como las tasas de recuperación que utilice, sean lo más ajustadas al sector donde operan sus clientes. Suponemos que el mercado dará la información agregada y por sectores. En el caso de la cartera hipotética construida en esta sección, el uso del promedio de las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación de las 25 compañías, estaría justificado ya que no se encontraron diferencias significativas a nivel de los sectores.

Ahora, una empresa que le dé el tratamiento a sus cuentas por cobrar como se ha supuesto en esta sección, quisiera haber calculado sus indicadores de pérdida por exposición a riesgo de crédito como si hubiera tenido la información de las probabilidades de incumplimiento y de las tasas de recuperación específicamente para cada cliente. Si este fuera el caso, entonces los múltiplos que se muestran en el cuadro 6 le podrían facilitar dicho cálculo.

Por ejemplo, una empresa que estime sus pérdidas por exposición a riesgo de crédito como se ha estimado en esta sección a través del modelo individual de riesgo, y quisiera estimar las pérdidas como si hubiera tenido la información de las probabilidades de incumplimiento y de las tasas de recuperación, específicamente para cada cliente, entonces al resultado obtenido, por ejemplo, para la pérdida total esperada de la cartera, lo multiplicaría por 0,00892; el valor estimado para la desviación, lo multiplicaría por 0,00838; el valor estimado para el *VaR*, lo multiplicaría por 0,00839 y el valor estimado para el *TVaR*, lo multiplicaría por 0,00839. Análogamente, lo podría hacer con los otros métodos con los múltiplos correspondientes.

CUADRO 6. Indicadores de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito mercado colombiano. Múltiplos para estimación de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito[a].

Modelo	Distribución	Múltiplos					
		E[S]	V[S]	Des[S]	As[S]	VaRs[99,9%]	TVaRs[99,9%]
Modelo individual de riesgo	Normal	0,00892	0,00007	0,00838	1,54701	0,00839	0,00839
Modelo colectivo de riesgo	Empírica obtenida mediante el algoritmo de Panjer Poisson Compuesta	0,00894	0,00007	0,00837	…	0,00991	0,01054
	Empírica obtenida mediante el algoritmo de Panjer Binomial Negativa	0,00894	0,00007	0,00835	…	0,00991	0,01047
Enfoque de Basilea II (Basilea, 2004)	Normal	…	…	…	…		0,00780
Simulación del modelo individual	Empírica obtenida mediante Bernoulli	0,01334	0,00012	0,01107	…	0,01010	0,01030

[a] Nivel del confianza del 99,9% (año 2007).

Fuente: elaboración propia mediante R y Excel.

5. Conclusiones

Partiendo de las estimaciones realizadas por Caicedo *et al.* (2011) de los montos por exposición a incumplimiento, las probabilidades neutral de incumplimiento y las tasas de recuperación dado el incumplimiento, para un grupo de 25 empresas que cotizaron en la Bolsa de Valores de Colombia en 2007, este trabajo tiene como objetivo cuantificar la pérdida total por exposición a riesgo de crédito de una cartera conformada por dichas empresas. Con este propósito, se emplea el enfoque de distribución de la pérdida total (LDA) a través de los modelos individual (con las aproximaciones Normal, Normal Power y por simulación) y colectivo de riesgo y el enfoque de Basilea II.

Los resultados de la investigación permiten concluir que las estimaciones del *VaR* y el *TVaR* de la pérdida total por exposición a riesgo de crédito, depende tanto del enfoque que se utilice como de la asunción de dependencia o no dependencia entre los elementos de la cartera de créditos.

Específicamente, la estimación del *VaR* obtenida a través del enfoque de Basilea II fue más elevada que las estimaciones del *VaR* y del *TVaR* obtenidas en los otros métodos. Cuando se asume independencia en el incumplimiento entre los elementos, las estimaciones para el *VaR* y el *TVaR* son más elevadas con el modelo colectivo que con el modelo individual.

En el método de Basilea, a diferencia del modelo individual y del modelo colectivo de riesgo, se supone que los elementos en la cartera de créditos están correlacionados y dicha correlación es tenida en cuenta en el momento de calcular el requerimiento de capital por exposición a riesgo de crédito. El factor de 12,5 (1/0,08) que aparece en la ecuación de Basilea para determinar los activos ponderados por nivel de riesgo, supone que la entidad expuesta a riesgo de crédito debe disponer de un capital del 8% de sus activos expuestos a riesgos. Este 12,5 es un sobrecargo que no está explícito tanto en el modelo individual como en el modelo colectivo de riesgo.

En el modelo individual de riesgo se supone que en el horizonte de un año un elemento en la cartera de créditos incumple solo una vez, mientras que en el modelo colectivo se supone que un elemento de la cartera de créditos puede incumplir varias veces.

Los argumentos anteriores serían una explicación del porqué se puede esperar que el *VaR* estimado con el modelo de Basilea, siempre sea mayor que el *VaR* y que el *TVaR* estimado con el modelo individual de riesgo o con el modelo colectivo. Sin embargo, se debe notar también que el *VaR* y el *TVaR* estimados con el modelo colectivo de riesgo está muy cercano a la estimación del *VaR* obtenida con el modelo de Basilea.

No se podría argumentar que el *VaR* o *TVaR* estimados con los modelos individual y colectivo de riesgo y que el *VaR* estimado con el modelo de Basilea, sub o sobrestiman a los *VaR* y *TVaR* de la cartera de créditos. Para argumentar lo anterior se debería tener información sobre las cuantías de las pérdidas que han afrontado las entidades financieras por el incumplimiento de las obligaciones de las empresas que conforman la cartera de créditos que se menciona en este estudio. Sin negar la relevancia de una argumentación en este sentido y lo importante que puede ser abordar el tema en futuras investigaciones, este propósito no está dentro de los alcances del presente artículo.

Edinson Caicedo Cerezo

Doctorando en Empresa, Universitat de Barcelona, Barcelona, España; Máster en Investigación en Empresa, Finanzas y Seguros, Universitat de Barcelona, Barcelona, España, 2009; Magíster en Ciencias de la Organización (1999) y Estadístico (1992), Universidad del Valle, Cali, Colombia; profesor asociado y miembro del Grupo de Investigación en Solvencia y Riesgo Financiero, Departamento de Contabilidad y Finanzas, Facultad de Administración de la misma institución. Sus áreas de interés en la investigación son: solvencia en seguros y finanzas y gestión de riesgos financieros en entidades financieras, no financieras, aseguradoras y microfinancieras.

M. Mercè Claramunt Bielsa

Doctora en Economía y Empresa (1992) y licenciada en Ciencias Económicas y actuario en Seguros (1987), de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España. Profesora titular de la universidad y miembro del Grup de Recerca en Teoria de Jocs, Investigació Operativa i Optimització (2009SGR960), Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial, Facultat d'Economia i Empresa, Universitat de Barcelona, Barcelona, España. Sus áreas de interés en la investigación son la solvencia en seguros y finanzas, la teoría de la ruina y los procesos estocásticos.

Montserrat Casanovas Ramón

Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España, 1977; European Financial Advisor, European Financial Planning Association, Barcelona, España, 2003; analista financiero, Instituto Español de Analistas Financieros, Madrid, España, 1980; auditora financiera, Colegio de Economistas de Cataluña, Barcelona, España, 1977. Profesora catedrática de Universidad y miembro del Grup de Recerca en Economia i Gestó de la Incertesa, Departament d'Economia i Organització d'Empreses, Facultat d'Economia i Empresa, a Universitat de Barcelona, España. Sus áreas de interés en la investigación son la valoración de empresas, los mercados financieros, las finanzas corporativas, la teoría de la decisión y la gestión de riesgos financieros.

Referencias

Atiya, A. F. (2001). Bankruptcy prediction for credit risk using neural networks: A survey and new results. *IEEE Transactions on Neural Networks*, *12*(4), 929-935.

Asmussen, S., & Albrecher, S. (2010). *Ruin probabilities* (2nd Ed.). Singapore: World Scientific.

Basilea (2004). *Convergencia internacional de medidas y normas de capital. Marco revisado Junio*. Basilea: Banco de Pagos Internacionales Press & Communications, CH-4002.

Beard, R. E., Pentantikäinen, T., & Pesonen, E. (1984). *Risk theory: The stochastic basis of insurance* (3rd Ed.). Nueva York: Chapman and Hall.

Caicedo, C. E., Claramunt, B. M-M., & Casanovas, R. M. (2011). Medición del riesgo de crédito mediante modelos estructurales: Una aplicación al mercado colombiano. *Revista Cuadernos de Administración*, *24*(42), en prensa.

Carreras, P. M. (2006). *Credit risk modeling using insurance methods*. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona, España.

Chen, C-J., & Panjer, H. (2009). A bridge from ruin theory to credit risk. *Review of Quantitative Finance and Accounting, 32*(4), 373-403.

Crouhy, M., Galai, D., & Mark, R. (2000). A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance, 24*, 59-117.

Daykin, C. D., Pentantikäinen, T., & Pesonen, E. (1994). *Practical risk theory for actuaries*. Londres: Chapman and Hall.

De Lara, H. A. (2003). *Medición y control de riesgos financieros*. México: Limusa Noriega Editores.

Dickson, D. (2005). *Insurance risk and ruin*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dunkel, J., & Weber, S. (2007). Efficient Monte Carlo methods for convex risk measures in portfolio credit risk models. *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference*, *1-5*, 937-945.

Geske, R. (1977). The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *12*(4), 541-552.

Greene, W. H. (2000). *Econometric analysis* (2nd ed.). Nueva York: Prentice Hall Internacional Editions.

Gujarati, D. (2003). *Econometría*. México: McGraw Hill.

Jackson, P., Nickell, P., & Perraudin, W. (1999). *Credit risk modeling*. Bank of England: Financial Stability Review.

JP Morgan and Company (1997). *CreditMetrics (documento técnico)*. Nueva York: JP Morgan.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene J., & Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory using R*. (2nd ed.). Berling Heildelberg: Springer.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (1998). *Loss models: From data to decisions*. Nueva York: John Wiley & Sons.

Márquez, J. (2006). *Una nueva visión del riesgo de crédito*. México: Limusa/Noriega Editores.

McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management*. Princeton, NJ: University Press.

Merton, R. (1974). On the pricing of the corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, *29*(2), 449-470.

Ramaswamy, S. (2005). Simulated credit loss distribution. *Journal of Portfolio Management*, *31*, 91-99.

Soros, G., Simons, J., Paulson, J., Griffin, K., & Falcone, P. (2008, 16 noviembre). *Statement before The U.S House of Representatives Committee on Oversight and Goverment Reform.* U.S. Congres. Disponible en: *http://republicans.oversight.house.gov.*

Wehrspohn, U. (2002, 12 Octubre). *Estimation of default probabilities Part 3: Stochastic default probabilities: CreditRisk* +. Disponible en: DOI: 10.2139/ssrn.370241.

Wei, R. (2008). Development of credit risk model based on fuzzy theory and its application for credit risk management of commercial banks in China. *4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing,* 1-31, 10339-10342.

Zhu, Y., & Chiu, W. H. (2007). Credit risk assessment using the RBF neural network. Information. *Management and Algorithms, II,* 125-128.

RECEPCIÓN DEL ARTÍCULO: 01/03/2011
ENVÍO EVALUACIÓN A AUTORES: 05/04/2011
RECEPCIÓN CORRECCIONES: 15/04/2011
ACEPTACIÓN ARTÍCULO: 13/06/2011

Apéndice

A.1. Características de X_i en el modelo individual

La v.a. X_i puede escribirse como: $X_i = B_i \cdot I_i$, donde I_i es una variable aleatoria de Bernoulli dada por:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } q_i \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - q_i = p_i \end{cases}$$

con esperanza $E[I_i] = q_i$ y varianza $V[I_i] = q_i \cdot p_i$, de forma que B_i, v.a. positiva que representa el monto de la pérdida dado el incumplimiento es $B_i = X_i \mid (I_i = 1)$.

La esperanza, la varianza y el coeficiente de asimetría de X_i en función de la esperanza, varianza y momentos de la variable B_i, vienen dados por (Dickson, 2005):

$$E[X_i] = q_i \cdot E[B_i],$$

$$V[X_i] = q_i \cdot V[B_i] + p_i \cdot q_i \cdot E^2[B_i],$$

$$\mu_3(X_i) = q_i \cdot \alpha_3(B_i) - 3 \cdot q_i^2 \cdot \alpha_2(B_i) \cdot \alpha_1(B_i) + 2 \cdot q_i^3 \alpha_1^3(B_i),$$

$$As\left[X_i\right] = \frac{\mu_3(X_i)}{(V[X_i])^{\frac{3}{2}}},$$

siendo $\alpha_j(B_i)$ $\alpha_i(B_i)$ el momento ordinario de orden J de B_i.

A.2. Distribuciones de Poisson, Binomial Negativa y el método de Panjer en la aproximación del modelo colectivo al modelo individual

Para el desarrollo de este apartado se ha seguido Dickson (2005) y Kaas *et al.* (2008), por tanto, en dichos manuales pueden encontrarse más detalles sobre las expresiones aquí incluidas.

A.2.1. Distribución Poisson

En el caso que $N_i \sim Poisson(\lambda_i)$ entonces X_i se distribuye Poisson Compuesta de la forma $X_i \sim PoiComp(\lambda_i, B_i)$. Luego la pérdida total S, formada por n créditos con nivel de pérdidas X_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), también se distribuye Poisson Compuesta de la forma: $S \sim PoiComp(\lambda, B)$, con

$$\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \text{ y } F_X = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i F_{B_i}}{\lambda}.$$

Las condiciones usuales o típicas para λ_i son:

Caso 1: $\lambda_i = q_i$ y Caso 2: $\lambda_i = -\ln(1-q_i)$.

A.2.2. Binomial Negativa

La distribución binomial negativa puede surgir como una distribución de Poisson en la que consideramos que el parámetro λ es una variable aleatoria con distribución gamma, es decir, como una distribución de Poisson mixta siendo la variable aleatoria de mixtura una gamma.

Específicamente, si $N_i \mid \lambda_i \sim Poisson(\lambda_i)$ y $\lambda_i \sim Gamma(a, b)$ entonces X_i se distribuye binomial negativa compuesta. Luego la pérdida total S, conformada por n créditos con nivel de exposición X_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), también se distribuye binomial negativa compuesta, $S \sim BNComp(a^*, b^*, X^*)$. De acuerdo con Wehrspohn (2002) las estimaciones de los parámetros a^* y b^* son:

$$a^{*}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{I=n}\lambda_i^{*}\right)^{2}}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i/2\right)^{2}} \text{ y } b^{*}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i/2\right)^{2}}{\sum_{i=1}^{I=n}\lambda_i^{*}}$$

donde $\lambda_i = q_i$ y $\lambda_i^{*}=\dfrac{B_i q_i}{\left[\dfrac{B_i}{vud}\right]\bullet vud}$ y vud es el valor de la unidad para transformar en valores enteros las B_i.

A.2.3. Estimación de la función de distribución de S mediante el método de recurrencia de Panjer

La función de distribución de la pérdida total con el modelo colectivo, puede calcularse a través del método de recurrencia de Panjer en su versión discreta.

El método de Panjer se utiliza en distribuciones de número de sucesos que cumplen con la siguiente ecuación de recurrencia en el cálculo de sus probabilidades:

$p_k = P[N = k]$,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=c+\frac{d}{k+1} \quad k=0,1,2,3,\ldots$$

Las únicas distribuciones del número que cumplen la propiedad recursiva anterior son: Poisson, Binomial Negativa y Binomial (Kaas *et al*., 2008).

En su versión discreta, el método de Panjer requiere que las cuantías individuales tomen valores enteros positivos. Siendo los niveles de exposición a incumplimiento y la tasa de recuperación variables positivas, la probabilidad de que la pérdida total sea cero coincide con la probabilidad de que no se presente ningún incumplimiento. Luego $p_0 = P[S = 0] = P[N = 0]$. La fórmula de recurrencia de Panjer es:

$$P[S=s]=\sum_{y=1}^{s}\left(c+\frac{d\bullet y}{s}\right)P[x=y]P[S=s-y],$$
$s=1,2,3,\ldots$

Si $S \sim PoiComp(\lambda, X)$, entonces $c = 0$ y $d = \lambda$; cuando $S \sim BNComp(a^{*}, b^{*}, X)$ entonces $c=\dfrac{b^{*}}{1+b^{*}}$ y $d=c\bullet(a^{*}-1)$